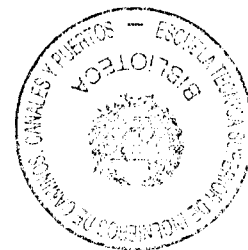


TESIS DOCTORAL



**ANÁLISIS DEL PANDEO DE PILARES EN
RÉGIMEN NO LINEAL MEDIANTE
SPLINES GENERALIZADOS**

Por

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID	
ETS. INGENIEROS DE CAMINOS	
BIBLIOTECA	
TIPO. ENTRADA	R. 59.129
N.º DOCUMENTO	
N.º DE COPIAS	
SIGNATURA	113C 457

MIGUEL ANGEL ORTEGA SÁNCHEZ

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
**LIBRO EXCLUIDO
DE PRESTAMO**

Presentada en la

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR

DE

INGENIEROS DE CAMINOS CANALES Y PUERTOS

DE LA

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Para la obtención del

Grado de Doctor Ingeniero de Caminos Canales y Puertos

Madrid, Mayo de 2004

Departamento de Matemáticas e Informática aplicadas a la Ingeniería Civil
de la E. T. S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la
Universidad Politécnica de Madrid.

TESIS DOCTORAL

ANÁLISIS DEL PANDEO DE PILARES EN RÉGIMEN NO LINEAL MEDIANTE SPLINES GENERALIZADOS

Por

MIGUEL ANGEL ORTEGA SÁNCHEZ

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Directores de la Tesis:

D. José Luis Romero Martín

Dr. Ingeniero de Caminos, C. y P.
Profesor Titular de Universidad.
Unidad Docente de Análisis
Numérico del Departamento de
Lenguajes y S. I. e I. S. de la
Facultad de Informática de la
Universidad Politécnica de Madrid

D. Emilio de la Rosa Oliver

Dr. Ingeniero de Caminos, C. y P.
Catedrático del Departamento de
Matemáticas e Informática
aplicadas a la Ingeniería Civil de la
E.T.S. de Ingenieros de Caminos,
C. y P. de la Universidad
Politécnica de Madrid

Madrid, Mayo de 2004

TESIS DOCTORAL

ANÁLISIS DEL PANDEO DE PILARES EN
RÉGIMEN NO LINEAL MEDIANTE
SPLINES GENERALIZADOS

Por

MIGUEL ANGEL ORTEGA SÁNCHEZ

Directores de la Tesis:

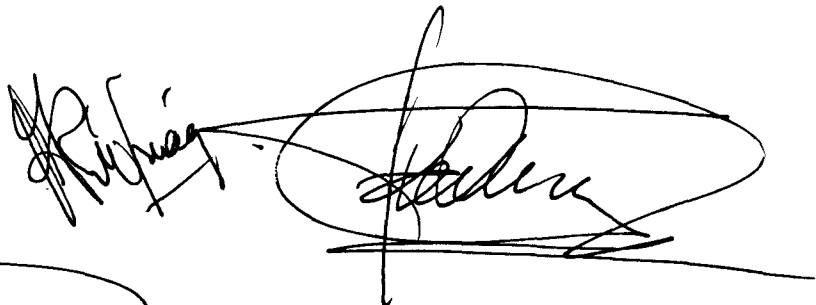

D. José Luis Romero Martín y D. Emilio de la Rosa Oliver

TRIBUNAL ENCARGADO DE JUZGAR LA TESIS DOCTORAL

Presidente:



Vocales:



Vocal Secretario:



El Tribunal acuerda otorgarle la calificación de:

SOBRESALIENTE CUM LAUDE per unaanimidad

Madrid, 10 de Septiembre de 2004

**A mis padres Amancio y M^a Anunciación
y a mi hermana Alicia**

PRÓLOGO

Cuando se escribe este prólogo, que en realidad debería ser el epílogo de la presente memoria de investigación, se puede decir que se ha terminado de escribir una tesis doctoral en un campo particular como es el del cálculo de estructuras con una peculiaridad añadida: su desarrollo y presentación en el Departamento de Matemática e Informática aplicadas a al Ingeniería Civil. Es por ello que su contenido habría que situarlo en el campo de la Física Matemática y su directa aplicación a la ingeniería. Esta decisión es una elección del autor al considerar que éste es el ámbito adecuado donde debe situarse cualquier trabajo relacionado con la teoría de estructuras. Esta elección, por otra parte, ha marcado el desarrollo de la misma.

Aunque se ha gestado en un departamento de matemáticas hay que considerarla como una tesis de orientación práctica fundamentada con instrumentos matemáticos y escrita con un lenguaje matemático.

El contenido de la tesis ha estado condicionado por dos aspectos: por una parte el desarrollo de unos instrumentos de análisis, en este caso la extensión de la teoría de splines y por otra la aplicación de dichos instrumentos a un problema de interés práctico. En ambos aspectos las aportaciones del autor dieron finalmente sus frutos. En primer lugar se quiere mencionar que en su trabajo profesional en el campo de la ingeniería había desarrollado una serie de programas para el cálculo de emparrillados de cimentación basados en un cálculo matricial que utilizaba funciones solución de la ecuación homogénea de la viga flotante en un medio de Winkler. Esto sugirió la idea de hacer una tesis consistente en el desarrollo de nuevos elementos finitos basados en funciones forma que fueran solución de la ecuación homogénea del problema que se tratase de estudiar. Este planteamiento enlazaba con los trabajos del Profesor Dr. D. José L. Romero en el campo de la teoría de splines y elementos finitos.

En los primeros trabajos se llegó, antes de tener noticia del artículo de P. Tong en uno de los apéndices de la obra clásica de elementos finitos de Taylor y Zienckiewicz, a la propiedad de exactitud nodal cuando se emplean soluciones de la homogénea. Se obtuvo el mismo resultado que P. Tong sin necesidad de imponer que la forma bilineal de la formulación débil sea definida positiva y que las funciones de prueba y de ponderación en el método de elementos finitos pertenezcan al mismo espacio como plantea dicho autor. Esta diferencia fundamental permitió el desarrollo de técnicas matriciales y en particular la utilización de la metodología de los elementos finitos en el campo de los splines generalizados y viceversa.

La aplicación práctica surgió en unos seminarios con los Profesores: Dr. D. Emilio de la Rosa, Dr. D. José Manuel Corrales y Dr. D. José L. Romero, en los que se trataba de comentar la teoría de splines hasta el momento desarrollada. En uno de estos encuentros el autor presentó un ejemplo de aplicación de la teoría de splines a problemas relacionados con el cálculo de elementos prismáticos en los que el operador que gobierna la ecuación era de carácter no lineal. Esta idea que en los inicios no pasaba de ser mera curiosidad y que planteaba algunos problemas cuando se trataba de aplicar

dentro de un cálculo general de estructuras resultó de gran interés cuando con el paso del tiempo se aplicó al cálculo de pilares en régimen no lineal considerando fenómenos de segundo orden al tener en cuenta el axil. Su utilización para estos elementos estructurales para casos isostáticos y estados de carga sencillos dio lugar a lo que en el presente trabajo se ha denominado método algebraico. Conforme se fueron poniendo de manifiesto las posibilidades que proporcionaba este método para determinar cargas críticas de pandeo al mismo tiempo que se conocían las trayectorias estables e inestables se creyó conveniente extender estas ideas a casos más generales. El resultado de estos trabajos fue el desarrollo del método general presentado en la tesis basado en la utilización de la técnica de elementos finitos para problemas lineales y el proceso de homotopía para tener en cuenta la no linealidad del material.

Seguramente cada tesis doctoral tiene su propia historia, especialmente si como sucede en el presente caso, su realización se extiende en un período de tiempo más o menos largo en el que han ido surgiendo ideas que ahora parecen sencillas pero que han requerido su tiempo para su adecuada consideración, maduración e integración en el marco de una teoría. Ello ha sido posible en gran medida debido a la comprensión, y apoyo moral y científico del Profesor Dr. D. Emilio de la Rosa que ha seguido a lo largo del tiempo las aportaciones que en esta línea de trabajo se venían desarrollando. Asimismo hay que destacar la intensa labor realizada por el Profesor Dr. D. José L. Romero en relación con los trabajos de esta tesis y que forman parte de su línea de investigación en el campo de la teoría de splines y elementos finitos.

El autor a parte de la satisfacción que le proporciona ver culminados los esfuerzos realizados con la terminación final de la tesis no le queda nada más que dejar constancia de su más sincera gratitud a las personas anteriormente mencionadas pues a lo largo del tiempo en el que se fueron gestando las ideas que finalmente han permitido su redacción, ha tenido la oportunidad de profundizar en el conocimiento de las técnicas actuales del cálculo de estructuras, lo que de por sí solo justificarían el tiempo dedicado a alcanzar el objetivo final de realizar una tesis doctoral.

INDICE

RESUMEN.....	XV
---------------------	-----------

ABSTRACT	XVII
-----------------------	-------------

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN.....	3
1.2 MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS.....	6
1.2.1 Motivación.....	6
1.2.2 Objetivos.....	7
1.3 ALCANCE Y APORTACIONES.....	8
1.3.1 Alcance.....	8
1.3.2 Aportaciones.....	9
1.4 CONTENIDO.....	12

CAPÍTULO 2. EL PROBLEMA DE LAS PIEZAS CON CARGAS AXILES. ANTECEDENTES HISTÓRICOS Y MÉTODOS DE CÁLCULO

2.1 HISTORIA Y ANTECEDENTES.....	17
2.1.1 Creación del modelo.....	18
2.1.2 Desarrollo de los instrumentos de análisis.....	19
2.1.3 Ampliación del análisis a nuevos problemas.....	20
2.1.4 Métodos numéricos.....	22
2.1.5 Hormigón armado.....	23
2.2 EL PROBLEMA DE PANDEO DE UNA BARRA CON NO LINEALIDAD GEOMÉTRICA.....	27
2.3 INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA OBJETO DE ESTA INVESTIGACIÓN.....	33
2.4 ECUACIONES CONSTITUTIVAS Y SUPERFICIE MECÁNICA.....	40
2.4.1 Ecuaciones constitutivas.....	40
2.4.2 Relación momento-curvatura.....	44
2.5 ESTABILIDAD Y BIFURCACIÓN.....	48
2.5.1 Estabilidad.....	48
2.5.2 Bifurcación.....	55
2.6 METODOS DE CÁLCULO NO LINEAL DE VIGAS-COLUMNA.....	57
2.6.1 Introducción.....	57
2.6.2 Cálculo plástico de vigas-columna post-pandeo.....	58
2.6.3 Aproximaciones mediante elementos línea.....	68
2.6.4 Hormigón. Métodos numéricos.....	68
2.7 PILARES DE HORMIGÓN ARMADO.....	71

2.7.1 Introducción.....	71
2.7.2 Ecuaciones $\sigma - \varepsilon$ del hormigón.....	72
2.7.3 Relaciones momento-curvatura.....	74
2.7.4 Diagrama trilineal momento-curvatura.....	78
2.7.5 Métodos de cálculo no lineal.....	81
2.7.6 Comprobación de elementos esbeltos.....	82
2.8 RESUMEN Y COMENTARIOS FINALES.....	88

CAPÍTULO 3. SPLINES GENERALIZADOS

3.1 INTRODUCCIÓN.....	91
3.2 SPLINES GENERALIZADOS.....	92
3.2.1 Preliminares.....	93
3.2.2 Concepto de spline generalizado.....	96
3.3 FORMULACIÓN MATRICIAL DE LOS SPLINES GENERALIZADOS	102
3.3.1 Ecuación de equilibrio local del spline generalizado.....	102
3.3.2 Ejemplos de construcción de la ecuación de equilibrio local.....	105
3.3.3 Ecuación de equilibrio global del spline generalizado.....	111
3.3.4 Interpolación con splines generalizados.....	113
3.4 ANÁLISIS DE PROBLEMAS DE CONTORNO UNIDIMENSIONALES CON SPLINES GENERALIZADOS. SOLUCIÓN NODAL EXACTA Y ACCIONES REPARTIDAS EQUIVALENTES.....	116
3.4.1 Solución nodal exacta en problemas de contorno unidimensionales.....	116
3.4.2 Acciones repartidas equivalentes en problemas de contorno.....	125
3.4.3 Comentarios.....	128
3.5 APLICACIÓN AL ANÁLISIS DEL PANDEO DE PILARES EN RÉGIMEN LINEAL.....	129
3.5.1 Generalidades.....	129
3.5.2 Aplicación del concepto de acción repartida equivalente a la viga-columna	132
3.5.3 Ejemplo de aplicación.....	136

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DEL PANDEO DE PILARES EN RÉGIMEN NO LINEAL MEDIANTE SPLINES GENERALIZADOS

4.1 INTRODUCCIÓN.....	151
4.2 MODELOS DISCRETOS PARA EL ESTUDIO DEL PANDEO DE PILARES EN RÉGIMEN NO LINEAL.....	152
4.2.1 Modelo con un grado de libertad.....	152
4.2.2 Modelo con varios grados de libertad.....	175
4.2.3 Ejemplo de ménsula con un grado de libertad.....	180
4.2.4 Ejemplo de ménsula con cuatro grados de libertad.....	187
4.2.5 Comentarios finales.....	195
4.3 PANDEO DE PILARES EN RÉGIMEN NO LINEAL EN EL CASO CONTINUO.....	196
4.3.1 Formulación del problema de pandeo en régimen no lineal.....	196
4.3.2 Discretización mediante elementos finitos.....	199
4.3.3 Comentarios sobre la no unicidad de solución del problema.....	202

4.4 PILAR LINEAL EQUIVALENTE.....	204
4.4.1 Introducción.....	204
4.4.2 Teorema de equivalencia.....	215
4.4.3 Comentarios.....	220
4.5 MÉTODO ALGEBRAICO PROPUESTO.....	221
4.5.1 Generalidades.....	222
4.5.2 Aplicación a algunos problemas de pandeo en régimen lineal.....	225
4.5.3 Método algebraico para problemas en régimen no lineal.....	228
4.5.4 Aplicación al estudio de la ménsula en régimen no lineal.....	237
4.6 MÉTODO GENERAL PROPUESTO.....	255
4.6.1 Generalidades	255
4.6.2 Pasos para la aplicación del método.....	257
4.6.3 Ejemplo de aplicación.....	258
4.6.4 Conclusiones.....	269

CAPÍTULO 5. EJEMPLOS Y APLICACIONES

5.1 MÉTODO ALGEBRAICO.....	273
5.1.1 Introducción.....	273
5.1.2 Ejemplo 1.....	276
5.1.3 Ejemplo 2.....	284
5.1.4 Ejemplo 3.....	289
5.1.5 Ejemplo 4.....	296
5.2 MÉTODO GÉNERAL.....	302
5.2.1 Introducción	302
5.2.2 Ejemplo 5.....	303
5.2.3 Ejemplo 6.....	317
5.2.4 Ejemplo 7.....	321
5.2.5 Ejemplo 8.....	325
5.2.6 Ejemplo 9.....	331
5.2.7 Ejemplo 10.....	337
5.2.8 Comentarios.....	347

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES Y TRABAJOS DE INVESTIGACION FUTUROS

6.1 CONCLUSIONES	351
6.1.1 Formulación del problema.....	351
6.1.2 Superficie mecánica.....	352
6.1.3 Splines generalizados.....	352
6.1.4 Problemas discretos.....	352
6.1.5 Problemas continuos.....	353
6.1.6 Método algebraico.....	353
6.1.7 Método general.....	353
6.1.8 Aplicaciones.....	353
6.1.9 Comparación de los métodos propuestos con los métodos habituales de cálculo de la viga-columna.....	354

6.2 TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN FUTUROS.....	356
BIBLIOGRAFÍA.....	361
CURRICULUM VITAE	

RESUMEN

El objetivo fundamental de la presente memoria ha sido la realización de un estudio sobre el comportamiento de los pilares esbeltos sometidos a pandeo en régimen no lineal mediante la técnica de splines generalizados. Dicha técnica puede considerarse como una variante de la metodología de cálculo por elementos finitos. Para ello tras una revisión de los antecedentes históricos y los métodos actuales de cálculo de elementos viga-columna sometidos a cargas axiales en situaciones de no linealidad se exponen los resultados más destacados de trabajos realizados con anterioridad sobre splines generalizados y elementos finitos que son básicos para esta investigación: propiedad de solución nodal exacta y concepto de acción repartida equivalente. Se aplican después dichos resultados al estudio del pilar sometido a pandeo en régimen lineal, ilustrándose con un ejemplo la utilidad de los mismos.

Después mediante modelos discretos se introducen los fenómenos de inestabilidad, bifurcación y las trayectorias en problemas con no linealidad geométrica y del material. A continuación se recogen las aportaciones fundamentales de la tesis: el concepto de pilar lineal equivalente y el teorema de equivalencia que permiten un tratamiento linealizado del problema no lineal. La aportación se centra esencialmente en el caso de no linealidad del material. Se desarrollan posteriormente en la memoria los dos métodos de análisis propuestos que son:

- a) Método algebraico. Utilizado en el caso de problemas isostáticos en los que es posible predecir la ley de momentos o equivalentemente la distribución de curvaturas. Para este tipo de problemas la utilización de relaciones momento-curvatura dada por una poligonal permite establecer una serie de ecuaciones de equilibrio y compatibilidad con las que resolver el problema determinando la deformada de equilibrio.
- b) Método general. El concepto de pilar lineal equivalente y el teorema de equivalencia permiten resolver problemas no lineales debido a la no linealidad del material mediante la resolución de problemas lineales utilizando la técnica de los elementos finitos con splines generalizados. Mediante el concepto de pilar lineal equivalente se le asigna a cada elemento una rigidez constante. Esta distribución de rigideces se lleva a cabo mediante un proceso de homotopía que parte de una relación lineal momento-curvatura en cada elemento y que tiene como estado final la relación no lineal momento-curvatura de cada elemento. Mediante un proceso iterativo las curvaturas obtenidas en un paso de la homotopía permiten obtener las rigideces de los elementos en el siguiente paso. El resultado final cuando se ha terminado el proceso consiste en una distribución de rigideces entre elementos en los que finalmente se alcanza un estado de compatibilidad y equilibrio.

Seguidamente se expone un conjunto de aplicaciones de los dos métodos citados a problemas de pandeo de pilares en régimen no lineal con distintos estados de carga y diferentes tipos de restricciones, destacando finalmente las principales conclusiones de esta memoria e indicando los posibles trabajos de investigación futuros que pueden desarrollarse a partir de las ideas aportadas en este estudio.

ABSTRACT

The main goal of this work is to study the buckling behavior of slender columns with a non-linear response using the generalized splines technique. This technique can be considered a variant of the finite element methodology. Therefore, after reviewing the background to and current methods of calculating beam-column elements with axial loads in non-linear situations, the most prominent results of earlier work on generalized splines and finite elements, essential for this research, are explained: the property of exact nodal solutions and the concept of equivalent distributed load. These results are then applied to examine the buckling behavior of columns in a linear response, and an example is given to illustrate how useful these results are.

Afterwards, discrete models are used to introduce the phenomena of instability, bifurcation and trajectories in geometrically and materially non-linear problems. Following on from this, the fundamental contributions of this research are then described: the concept of equivalent linear column and the equivalence theorem. These two contributions allow non-linear problems to be dealt with a linearly way. The two proposed methods of analysis are then developed:

- c) Algebraic method. Used for isostatic problems where the law of bending moments or, equivalently, curvatures distribution can be predicted. For this problem type, a series of equilibrium and compatibility equations can be established using the moment-curvature relationships given by a polygonal to solve the problem by determining the deformed of equilibrium solution.
- d) General method. The concept of equivalent linear column and the theorem of equivalence allow materially non-linear problems to be solved by linear problem solving using the finite elements technique with generalized splines. Using the equivalent linear column concept, each element is assigned a constant flexural rigidity. These rigidities are distributed through a process of homotopy that starts with a linear moment-curvature relationship in each element and ends with the non-linear moment-curvature relationship of each element. The curvatures yielded in one homotopy step output the rigidities of the elements in the next step in an iterative process. The final result at the end of the process is a distribution of rigidities across elements in which a state of compatibility and equilibrium is finally achieved.

Then a series of applications of the two above-mentioned methods to buckling column problems with a non-linear response with different load states and constraint types are explained, stressing the main findings of this research and specifying possible future research work that could follow on from the ideas that have materialized in the present study.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 INTRODUCCION.

Se presenta en esta memoria un estudio sobre el comportamiento de los pilares esbeltos sometidos a pandeo en régimen no lineal desarrollado mediante la técnica de splines generalizados. Dicha técnica puede considerarse como una variante de la metodología de cálculo por elementos finitos.

El estudio del comportamiento de los pilares sometidos a compresión y en particular el análisis de la estabilidad de los mismos es en la actualidad un tema central en el cálculo de estructuras y ha sido en su origen un problema cuyo estudio se situó en las áreas del análisis matemático llamando la atención de autores como L. Euler, J. L. Lagrange y G. Kirchhoff entre otros, cuyas aportaciones crearon modelos que siguen siendo referencia en la actualidad.

Desde el trabajo originario y fructífero de L. Euler en 1744 [Eul44] que se constituye en la primera y a la vez gran aportación sobre la inestabilidad y pandeo de pilares con un planteamiento de no linealidad geométrica, habría de pasar un largo período de algo más de un siglo hasta que por un lado G. Kirchhoff en (1852) [Kir52] desde una vertiente más teórica amplió el análisis a grandes deformaciones al considerar la curvatura exacta de la pieza deformada y por otro Engesser en 1884 [Eng89] desde un punto de vista práctico extendió la idea de Euler a pilares cuyo material tiene un comportamiento constitutivo no lineal. Sin embargo pese a la trascendental modificación del último autor sus razonamientos siguen manteniendo la misma estructura del operador que gobierna la ecuación diferencial en el caso de linealidad geométrica planteado por L. Euler.

Desde entonces la incorporación de una gran variedad de aspectos que caracterizan el comportamiento de los pilares ha sido constante. En el caso del modelo analizado en el presente trabajo, se ha tratado de recoger dos cuestiones básicas que destacan en el análisis de los pilares: la no linealidad geométrica y fundamentalmente la no linealidad del material. Ambos aspectos se ven reflejadas en la estructura de la ecuación y en los coeficientes de la misma. Al mismo tiempo se han desarrollado distintos métodos de análisis y de solución cuyos resultados giran en torno al estudio de trayectorias, puntos críticos y de bifurcación. En este marco, el presente trabajo lleva a cabo una aplicación basándose en el análisis de la ecuación diferencial:

$$\left[g(x, P, \chi(u)) \right]'' + Pu'' = f(x) \quad (1.1.1)$$

que modeliza el comportamiento de la pieza recta viga-columna, donde la ecuación de equilibrio es $M'' + Pu'' = f(x)$ y la ecuación constitutiva $M = g(x, P, \chi(u))$. En el tratamiento de dicho problema se pueden distinguir dos vertientes: una teórica y otra práctica que interactúan mutuamente. El hecho de contemplar la discusión de la ecuación (1.1.1) desde un punto de vista estructural permite interpretar y caracterizar sus distintos términos, particularmente $M = g(x, P, \chi(u))$ así como las distintas condiciones de contorno que se pueden imponer, incidiendo de forma directa en sus soluciones.

En relación con el campo en el que se desarrolla la tesis, este estudio se puede considerar una vía de análisis alternativa a otras líneas de trabajo desarrolladas a lo

largo del siglo XX entre las que se mencionan por su interés la de introducción de imperfecciones por Koiter [Koi45] y la consideración de fenómenos plásticos en el comportamiento de los materiales cuyas consecuencias fueron puestas de relieve por el clásico modelo de Shanley, [Sha46], [Sha47], enfoques que amplían de una forma definitiva el estudio del fenómeno de la inestabilidad en pilares. Los trabajos en la línea de Koiter se pueden considerar como la aplicación del método de las perturbaciones [Ste98], [Ste99], con una gran tradición en distintos ámbitos de la matemática aplicada, al estudio de pilares [Cas01]. Por otra parte la conexión entre inestabilidad y plasticidad en el área de las estructuras para el análisis de elementos prismáticos supuso la apertura de un frente que no se puede considerar cerrado en la actualidad en particular porque, pese a los avances en el campo de la plasticidad en las últimas décadas, su fundamentación no se ha completado todavía.

Por otro lado, el planteamiento originario de la no linealidad geométrica reaparece con fuerza en los años sesenta del siglo XX con el trabajo pionero de R. J. Gallagher y J. Padlog [GaP66], tendencia que se ve reforzada con la utilización de la técnica del Método de los Elementos Finitos (en lo sucesivo MEF). Su avance supone la aparición de distintas alternativas: por una parte, la consideración de grandes deformaciones, lo cual representa el abandono de la linealidad geométrica dando entrada a distintas definiciones o medidas de deformación (deformación de Green, deformación de giro, etc.) en el marco de una teoría de no linealidad. Por otra parte su tratamiento desde el punto de vista numérico da lugar a un segundo tipo de alternativas de procedimientos para obtener soluciones: incrementales, iterativos, etc. La combinación de ambas posibilidades, no linealidad y métodos numéricos de solución ofrece un panorama variado que tiene una amplia gama de estrategias en la resolución de problemas no lineales.

En la actualidad, los elementos estructurales lineales de directriz recta sometidos a cargas axiales siguen suministrando una gran variedad de temas de estudios y áreas de trabajo. En las obras de Z. P. Bazant y L. Cedolin [BaC91], W. F. Chen y E. M. Lui [ChL87], W. F. Chen y Atsuta [ChA76] y S. Kitipornchai, G. J. Hancock y M. A. Bradford [KHB95] se ofrece una amplia recopilación de las distintas aportaciones y análisis sobre este tipo de elementos estructurales: análisis de elementos viga-columna como parte de entramados reticulados, estudio de vigas con secciones arbitrarias, piezas mixtas acero-hormigón, análisis probabilísticos y de fiabilidad, influencia de fenómenos reológicos (fluencia, viscoelasticidad y viscoplasticidad) así como el efecto de la fractura y daño sobre las condiciones de estabilidad, análisis de la estabilidad de elementos sometidos a acciones dinámicas, establecimiento de los fundamentos de la inestabilidad sobre principios termodinámicos para estructuras con materiales plásticos, etc. son entre otras las áreas de estudio en relación con la inestabilidad de piezas rectas.

Por su parte, la presente exposición se centra fundamentalmente como se ha indicado en las líneas anteriores en el estudio de elementos con directriz recta sometidos a una carga axial y estados de carga perpendiculares a la directriz, comportamiento no lineal de los materiales evitando en cualquier caso deformaciones residuales, con definición del campo de deformaciones de acuerdo con la teoría de la linealidad geométrica de forma que la curvatura de la pieza se aproxima linealmente teniendo en cuenta además la hipótesis de Bernoulli-Euler de deformaciones planas de las secciones de piezas prismáticas. Bajo estas hipótesis se elabora un modelo que se puede considerar clásico en su planteamiento al mismo tiempo que se desarrolla una metodología cuyo

tratamiento y análisis introduce variantes respecto a las distintas líneas de trabajo actuales, sobre las que se considera presenta ciertas ventajas desde el punto de vista de su aplicación al cálculo de estructuras con materiales caracterizados por su comportamiento no lineal como es el caso del hormigón armado.

De acuerdo con lo anterior la aportación del presente trabajo se encuentra en el tratamiento que se le da a la no linealidad del material mediante la aproximación lineal a trozos de la relación momentos curvatura junto con el método empleado en la resolución del problema. Dicho método se basa en el uso de splines generalizados en combinación con el MEF que como se ha demostrado en trabajos anteriores presenta ciertas ventajas pues por una parte permite obtener soluciones nodales exactas [Ton69], [RoO98] y por otra mejorar la aproximación de la solución mediante el concepto de acción repartida equivalente [RoO99] favoreciendo la convergencia de los algoritmos numéricos. Otro de los aspectos de interés del presente trabajo es precisamente el de los algoritmos numéricos utilizados para resolver el problema general que están basados en el empleo de homotopías y en los que en el proceso de convergencia hacia la solución aparecen ciclos iterativos del tipo predictor-corrector cuya utilización resulta inevitable por tratarse de un problema no lineal y en los que la utilización del método basado en splines generalizados mejora la convergencia hacia la solución.

Respecto de la no linealidad, el método propuesto en el presente estudio se aplica a estructuras sometidas a restricciones y limitaciones del nivel deformaciones utilizándose un modelo lineal de pequeños desplazamientos y por lo tanto situado en el marco de la linealidad geométrica como objetivo principal en el que se mantiene la estructura clásica del operador diferencial de la ecuación alterando el término correspondiente a la relación constitutiva del material.

1.2 MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS.

1.2.1 Motivación

El presente trabajo se encuentra dentro de una línea particular de investigación sobre teoría de splines y sus estrechas relaciones con la evolución del cálculo de estructuras lineales de barras prismáticas [RMC90], [RGM92], [RCG93] y que posteriormente encontró su encaje definitivo dentro de la teoría del MEF [RoO98], [RoO99] lográndose una notable mejora de los resultados respecto a los obtenidos mediante la utilización de los Elementos Finitos tradicionales en el campo de aplicación al estudio de las piezas prismáticas en régimen lineal. Hay que mencionar en este sentido que estos trabajos no tienen antecedentes claros dentro de la ya amplia y extensa teoría de splines y menos en la propia teoría del cálculo de estructuras. Solamente cabe citar como antecedente previo en el campo de las estructuras el trabajo de P. Tong [Ton69], recogido también en la obra de Zienkiewicz O. C. y Taylor R. L. [ZiT94]. Asimismo en la literatura matemática de elementos finitos, algunos autores como A. J. Davis [Dav86] y Douglas y Dupont [DoD74] sitúan, casos particulares de aplicación del MEF donde observan que se produce solución nodal exacta, dentro del área denominada con el término de superconvergencia.

Partiendo de estas aportaciones iniciales, la primera motivación de esta tesis se encuentra en el deseo de desarrollar una aplicación de la teoría de splines generalizados en el área del cálculo no lineal de estructuras. Esta posibilidad se encontró finalmente en el campo de los pilares, debido al interés por el estudio del comportamiento de la pieza esbelta sometida a compresión en régimen no lineal tanto desde una perspectiva teórica como práctica de forma que el desarrollo realizado se ha orientado, por un lado, al análisis numérico del problema no lineal mediante elementos finitos con splines generalizados y por otro lado no se ha querido perder el punto de vista de la aplicación, de modo que los resultados derivados de los procedimientos aportados puedan ser utilizados directamente, y con ciertas ventajas sobre los de otros métodos, en el análisis, diseño y dimensionamiento de pilares esbeltos.

Una segunda motivación que justifica el desarrollo del presente trabajo viene de la oportunidad de llevar a cabo una aportación en el marco del cálculo de estructuras ya que la elaboración de un método para el análisis de elementos sometidos a compresión permite su extensión e integración en un cálculo general de estructuras ampliando los planteamientos clásicos recogidos en diversas obras como por ejemplo: [Prz68] y [Liv64].

Por otra parte una tercera motivación complementaria de las anteriores tiene su justificación en la posibilidad de llevar a cabo una aplicación del método propuesto en el área de cálculo de estructuras de hormigón armado dado que este material presenta un comportamiento altamente no lineal debido a la colaboración de dos materiales diferentes, cada uno de los cuales tiene a su vez una ley constitutiva no lineal, dando lugar a un método de cálculo de pilares de hormigón, que se complementa con un método simplificado de carácter algebraico para casos particulares frecuentes.

1.2.2 Objetivos

La línea de trabajo desarrollada en la presente tesis se había aplicado en una serie de artículos y trabajos previos en distintos tipos de problemas: interpolación [RoO99], viga de Timoshenko [ROC02], fundación elástica [RoO99], para casos en régimen lineal. En el presente trabajo el objetivo principal consiste en comprobar las posibilidades de la técnica de splines generalizados en problemas no lineales como es el caso del pandeo de pilares en el que como se ha indicado se pueden dar tanto condiciones geométricas como del material no lineales que inciden en la naturaleza y solución de la ecuación, conduciendo a un problema no lineal de contorno.

Al tratar de resolver numéricamente un problema no lineal ha sido necesario llevar a cabo una serie de aportaciones que forman parte del método presentado en la tesis y que se recogen en el siguiente apartado. Entre los objetivos se consideran:

- La aplicación del concepto de acción repartida equivalente a través del uso de splines generalizados que además conduce a un desarrollo analítico mediante el que aproximar los resultados dentro de cada elemento, y en ciertos problemas permite obtener soluciones exactas que por otras vías presentan mayor complejidad analítica.
- El desarrollo de procedimientos de resolución algebraicos que se pueden obtener al aplicar el método de la acción repartida equivalente en cierto tipo de problemas.
- Emplear la idea de analogía elástica que surge al aproximar la relación momento curvatura mediante una función lineal a trozos o poligonal y que permite una sencilla aplicación del MEF.
- Utilización de métodos basados en técnicas de homotopía como alternativa a métodos iterativos como el de Newton Raphson.
- Comprobar el método propuesto en distintas condiciones. En particular la posibilidad de considerar una pieza recta con características variables, cambios de sección de la pieza, ecuaciones constitutivas del material distintas para cada sección, diferentes condiciones de contorno así como la consideración de funciones de carga genéricas.
- En relación con el cálculo de pilares de hormigón al que se le presta una especial atención a lo largo de la presente exposición, se ha pretendido también como objetivo dar un procedimiento de cálculo alternativo en dos niveles: en un primer nivel más práctico se trataría de aplicar el método algebraico propuesto a problemas en los que es posible prever la respuesta del pilar de forma análoga a los procedimientos basados en la deformada senoidal, dada la sencillez de la aplicación del mismo. En un segundo nivel aplicando el procedimiento general propuesto a cualquier caso de pieza con características variables.

1.3 ALCANCE Y APORTACIONES.

1.3.1 Alcance

De acuerdo con lo indicado en la introducción, el modelo elegido para representar el comportamiento de los elementos estructurales viga-columna sobre los que se establece la discusión de las aportaciones de la presente memoria viene caracterizado por la ecuación (1.1.1) que como es conocido rige el comportamiento de barras de directriz recta sometidos a compresión axial. La estructura de dicha ecuación y el método utilizado para resolverla establece una delimitación de sus posibilidades. Por otra parte los objetivos y el desarrollo del trabajo cuentan con una serie de condicionantes que de alguna manera marcan la línea de investigación.

Conviene señalar algunas cuestiones previamente en relación con la terminología y que han sido recogidas por diversos autores, entre los que citamos al Profesor Batanero. Dicho autor en su artículo sobre “Los problemas de la inestabilidad elástica” [Bat61] indica lo siguiente: se conoce como teoría de tensiones de primer orden, aquella donde se supone que las deformaciones son tan pequeñas que se puede admitir el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio en la estructura sin deformar, es decir no intervienen en el equilibrio que se establece entre los esfuerzos internos y las sollicitaciones exteriores. Asimismo la teoría de tensiones de segundo orden se refiere a aquellos casos donde la deformabilidad de la pieza o de la estructura es de cierta consideración y se hace necesario tener en cuenta los desplazamientos de los puntos de aplicación de las acciones exteriores para plantear las ecuaciones de equilibrio. No obstante las deformaciones siguen siendo suficientemente pequeñas como para admitir la aproximación lineal de la curvatura, es decir $\chi(u) = u''$, y además prescindir, en general, de los acortamientos y alargamientos de las barras debidos a las cargas axiales, y de la influencia de los esfuerzos cortantes sobre la curvatura. Finalmente en casos de fuertes deformaciones se puede hacer necesario considerar el valor exacto de la curvatura $\chi(u) = u'' / (1 + u'^2)^{3/2}$ manteniendo aún en muchos casos las simplificaciones admitidas anteriormente. Esto es lo que se conoce como teoría de tensiones de tercer orden.

El comportamiento del modelo recogido en este trabajo en la ecuación (1.1.1) se caracteriza por los siguientes aspectos:

- 1) La ecuación representa el equilibrio de una sección genérica de la pieza recta comprimida en la que se tiene en cuenta la posición de la carga P de acuerdo con la deformada (cálculo en segundo orden).
- 2) La barra se considera sometida simultáneamente a distintos tipos de cargas: momentos y cargas repartidas y puntuales perpendiculares a la directriz antes de la deformación, es decir nuestro elemento de trabajo es la viga-columna.
- 3) Dicha formulación de la ecuación diferencial de equilibrio tiene lugar en un marco teórico simplificado donde no se considera el acortamiento por esfuerzos axiales y donde cada punto del eje de la pieza en el estado original se desplaza sobre la perpendicular a dicho eje.

- 4) Se considera la hipótesis habitual de Bernoulli-Euler típica de piezas prismáticas en las que la longitud de la pieza es muy superior a las dimensiones de la sección, de acuerdo con la cual es aceptable suponer que las secciones planas perpendiculares al eje de la pieza antes de la deformación se mantienen planas y perpendiculares a dicho eje después de la deformación. Es decir no se tiene en cuenta la deformación por cortante como en el modelo de Timoshenko.
- 5) Se considera una ley constitutiva de comportamiento del material tensión deformación no lineal. La utilización de las propiedades geométricas anteriores permite determinar una relación momento-curvatura denominada como superficie mecánica. De forma que para cada axil se puede establecer una relación momento curvatura no lineal. Dicha ley resulta como consecuencia de adoptar la hipótesis de un comportamiento elástico no lineal del material.
- 6) La ecuación (1.1.1) se puede simplificar considerando una aproximación lineal de la curvatura exacta de la pieza. Aunque también es posible abordar y resolver el problema teniendo en cuenta la no linealidad geométrica cuando se utiliza en la formulación del mismo el valor exacto de la curvatura, desarrollando los algoritmos adecuados.
- 7) Además el problema admite diversos tipos de condiciones de contorno que representan distintas formas de apoyo y restricción de movimiento tanto en los extremos como en puntos intermedios.

Todo lo anterior conduce a la resolución de un problema de contorno no lineal de cuarto orden de ecuaciones diferenciales ordinarias donde la no linealidad del problema y por tanto su dificultad proviene del comportamiento no lineal del material. Así mismo para el caso donde se considera el valor exacto de la curvatura, resulta un problema no lineal donde se tiene no linealidad geométrica y no linealidad del material. Hay que indicar que la terminología no lineal se refiere a que la ecuación diferencial que resulta es no lineal bien por el material, bien por la curvatura, o por ambas a la vez.

1.3.2 Aportaciones

En el análisis de la viga-columna que se lleva a cabo en el presente trabajo se han conseguido algunas aportaciones que se consideran de interés y que se enumeran a continuación. Dichas aportaciones son consecuencias propias del método utilizado tanto desde el punto de vista teórico como desde una vertiente práctica.

Desde una vertiente teórica:

- 1) Aunque se han encontrado trabajos en los que se utilizan las soluciones de la ecuación homogénea que gobierna el problema como base para su resolución, como se indica en diversos apartados del capítulo tercero de este trabajo, la novedad en el presente trabajo radica en la utilización de dichas soluciones como funciones de forma o aproximación en el MEF y la mejora de dicha técnica mediante la utilización de la solución correspondiente a la acción repartida equivalente.

- 2) Esto además permite resolver el problema de contorno con una discretización de pocos elementos al mismo tiempo que se consigue una excelente aproximación de la deformada y leyes de esfuerzos.
- 3) Otra novedosa aportación consiste en la aproximación de la relación momentos curvatura no lineal mediante segmentos de recta en cada elemento. Si bien en algunas áreas de estructuras la relación momento curvatura se aproxima mediante leyes bilineales o trilineales como en el caso habitual del hormigón armado, en el método propuesto además de esta idea de linealizar la relación momento curvatura se emplea la de aproximar la relación momento curvatura en cada elemento, dependiendo de la zona de curvatura que afecta al elemento, por un segmentos de recta.
- 4) Al tratarse de un problema no lineal es necesario utilizar un proceso iterativo que en este caso se basa en una aproximación homotópica entre un primer problema de relación momento curvatura lineal y un último problema con la relación momento curvatura propia del elemento, de forma que en cada uno de los pasos las soluciones son nodalmente exactas hasta llegar a la relación momento-curvatura definitiva del material.
- 5) Cada uno de las operaciones que conlleva el proceso de homotopía se realiza a través de un cálculo lineal mediante el uso del concepto de pilar equivalente con el que se sustituye una pieza en la que la rigidez es variable a lo largo de la directriz por otra con rigidez constante por tramos que se denomina pilar lineal equivalente.

Desde un punto de vista práctico:

- 6) Para los casos de piezas generalmente isostáticas con estados simplificados, se desarrolla un procedimiento que permite, a partir de la simple resolución de un sistema no lineal de ecuaciones, obtener la solución exacta del problema simplificado.
- 7) Todo ello permite desarrollar un método para el análisis clásico de la pieza sometida a cargas axiales en sus distintos aspectos: la estabilidad de pilares tratando de conocer las zonas del diagrama carga-desplazamiento determinando las zonas de estabilidad e inestabilidad así como los puntos límites del diagrama que separan ambas zonas. Asimismo se aborda el problema de la bifurcación y se determinan las cargas críticas.
- 8) Análisis de pilares de hormigón en los que la no linealidad no solo viene de la propia relación constitutiva de los materiales sino que además hay que tener en cuenta que las secciones están formadas por dos materiales, uno de los cuales al no soportar tracciones introduce una mayor complejidad en el comportamiento de la pieza pero que se puede recoger mediante la utilización de la idea de la superficie mecánica.
- 9) El método propuesto, es flexible para permitir la introducción de variantes en el modelo con lo que se contemplan distintas situaciones de carga, vigas columnas de sección variable, distintas condiciones de contorno, etc.

Resumiendo, en el presente trabajo, dentro de la línea del MEF, se utilizan los splines generalizados para mejorar los resultados de los elementos finitos tradicionales. De esta forma las soluciones obtenidas son exactas en relación con los problemas linealizados a parte de reducir el número de elementos y el costo de cálculo. Por otro lado la técnica del MEF y de homotopía se complementan al tratar de resolver un problema de no linealidad en el material. De este modo al utilizar los splines se consigue la exactitud en las condiciones de equilibrio y geométricas de compatibilidad en cada paso frente a otras funciones aproximantes como pueden ser las polinómicas en las que se pierde la exactitud de la solución en cada paso produciéndose una convergencia en la que aunque se respetan o alcanzan condiciones de equilibrio las deformadas en cada paso y por lo tanto en la solución no son exactas.

Finalmente esta línea de trabajo de la que no se ha encontrado similares en la literatura consultada se caracteriza por:

- 1) Creación de una metodología general de cálculo.
- 2) Utilización de splines generalizados.
- 3) Aplicación del concepto de acción repartida equivalente.
- 4) Uso de superficie mecánica linealizada a trozos obtenida al aproximar mediante segmentos la superficie mecánica correspondiente al plano de la carga axil.
- 5) Introducción del concepto de pilar lineal equivalente que permite establecer una analogía entre un pilar en régimen no lineal y otro en régimen lineal.
- 6) Desarrollo de un método de cálculo de vigas-columna para casos simplificados: método algebraico propuesto.
- 7) Formulación de un método para casos generales basado en la teoría de splines generalizados en el contexto de los elementos finitos y la utilización de homotopías para la asignación de rigideces en la resolución del problema no lineal de vigas-columna: método general propuesto.
- 8) Análisis de distintos casos de estabilidad de vigas-columna y en particular el estudio de pilares de hormigón armado.

1.4 CONTENIDO

El presente trabajo ha sido dividido en seis capítulos. Un breve resumen del contenido de los mismos es el siguiente:

A continuación de la presente introducción en el **capítulo segundo** se lleva a cabo una revisión histórica en la que se ponen de relieve tanto los elementos que caracterizan la naturaleza del problema y que han aparecido con el avance del estudio, así como los distintos planteamientos que han ido ampliando la formulación del problema y los instrumentos de análisis del mismo. El resultado ha sido la extensión progresiva del estudio a problemas de interés técnico. En los aspectos históricos se describen por una parte las cuestiones planteadas, el marco teórico en el que se resuelven y los métodos numéricos desarrollados. Finalmente se hace un repaso de las principales aportaciones en el análisis de pilares de hormigón armado.

Después se expone de manera esquemática un problema con gran trascendencia tanto histórica como técnica. Se trata del pandeo de una barra con la consideración del valor exacto de la curvatura es decir con no linealidad geométrica. Siempre nos ha llamado la atención el procedimiento de resolución de este problema donde el número de hipótesis simplificadoras utilizadas es mínimo pues éstas se reducen fundamentalmente a que la pieza no se acorta por el esfuerzo axial y a que la relación momento curvatura es lineal. Aunque el método de resolución es difícilmente generalizable, las enseñanzas que proporciona el resultado sobre el comportamiento estable de la pieza en las configuraciones postcríticas son de un interés indudable.

Seguidamente se realiza una introducción al problema objeto de esta investigación. Se intenta en cierto modo establecer un cierto paralelismo con el problema anterior en el sentido de reducir al mínimo las hipótesis para la formulación de la ecuación, considerando éstas solamente al final. Se tiene en cuenta, una vez obtenida la ecuación de equilibrio, la relación momento curvatura y la simplificación de la aproximación lineal de la curvatura.

A continuación se describen las ecuaciones constitutivas y se recoge el concepto de superficie mecánica que permite establecer las principales relaciones del modelo.

En el siguiente apartado y de forma resumida se mencionan algunas ideas sobre dos aspectos básicos que forman parte de la naturaleza del problema estudiado: la estabilidad y la bifurcación. Dos fenómenos que aparecen en el comportamiento de piezas comprimidas con los que se relacionan diversos conceptos como puntos límite y bifurcación que completan la descripción del problema. Estas ideas de estabilidad y bifurcación son relacionadas con la no linealidad del material, lo que plantea algunas cuestiones particulares del problema de pandeo.

A continuación se describen diversos métodos de cálculo para la resolución de problemas no lineales de piezas comprimidas axialmente.

Finalmente se hace un repaso de los métodos de cálculo de pilares de hormigón armado en los que los problemas no lineales se presentan de forma directa siendo éste el rasgo principal de su comportamiento.

Seguidamente en el **capítulo tercero** se exponen los conceptos y resultados necesarios sobre la teoría de splines generalizados y su aplicación en el método de los elementos finitos mediante el cual se va a abordar el estudio de los problemas lineales de pandeo y la elaboración de un método numérico de resolución.

En un primer apartado se recoge el concepto de spline generalizado. Después se describe la formulación matricial de las mismas, incluyendo en el contexto abstracto de la interpolación con dichas funciones la posibilidad de considerar acciones puntuales, lo que no es usual en la literatura sobre interpolación con splines.

Posteriormente se aborda la resolución de problemas de contorno unidimensionales con splines generalizados en el marco de los elementos finitos demostrando que con dichas funciones se puede obtener solución nodal exacta no solo para desplazamientos sino también para esfuerzos. Dicho apartado finaliza con el desarrollo del concepto de acción repartida equivalente el cual consideramos que es de gran interés por la optimización de resultados que permite hacer en el cálculo por elementos finitos, permitiendo que los problemas se resuelvan con un número reducido de elementos.

Finalmente se realiza una aplicación de toda la teoría expuesta y en particular de la propiedad de solución nodal exacta y del concepto de acción repartida equivalente, al análisis de pilares en régimen lineal, donde además en un ejemplo se pone de manifiesto de forma práctica las ventajas derivadas de la metodología de cálculo con splines.

Después en el **capítulo cuarto** en primer lugar se introducen modelos conceptuales discretos para el estudio del pandeo en régimen no lineal destacando las ventajas de los mismos en la realización de análisis de tipo cualitativo y su interés para la comprensión del fenómeno de pandeo en los casos de no linealidad geométrica o del material.

En otro apartado se aborda el problema del pandeo de pilares en régimen no lineal en el caso continuo, formulándose en términos variacionales el problema objeto de este trabajo e incluyendo la manera de abordar la resolución mediante la discretización con elementos finitos.

A continuación se introduce el concepto de pilar lineal equivalente obteniéndose un resultado, de gran importancia para esta investigación, que es la analogía entre la deformada de una pieza en régimen no lineal y la de otra en régimen lineal. Dicho resultado se concreta en un teorema que hemos denominado de equivalencia. Esto permite determinar la solución del problema de pandeo en régimen no lineal mediante splines generalizados, a través de dos planteamientos diferentes que dan lugar a los métodos: algebraico y general propuestos.

El método algebraico se expone en el apartado siguiente. Consiste en una metodología de cálculo para casos simplificados de estados de carga y condiciones de contorno para los que se pueden predecir con facilidad el aspecto de la ley de momentos flectores y los tramos en donde rigen las leyes momento curvatura correspondientes a los distintos lados de la poligonal. De esta forma se recogen y resuelven las situaciones habituales de cálculo de pilares empotrados y biarticulados que se han abordado por otras vías como indica Chen (Ojalde, Newmark, etc.), y que en el caso particular de pilares de hormigón han sido objeto de importantes simplificaciones conduciendo finalmente a métodos como el de la deformada senoidal. El resultado final consiste básicamente en una

metodología de tipo algebraico que permite resolver problemas de pandeo en régimen no lineal discretizando la pieza en cierto número de tramos.

El capítulo finaliza con el apartado sobre el método general que consiste esencialmente en una utilización combinada de los splines generalizados dentro de la metodología de elementos finitos consecuencia del teorema de equivalencia y simultáneamente el empleo de una homotopía que transforma relaciones constitutivas lineales momento curvatura para los diferentes tramos de la pieza en las relaciones constitutivas definitivas que son no lineales. Esta combinación permite a través de un proceso de avance y corrección obtener la solución del problema no lineal para el caso de una ley curva momento curvatura con tanta aproximación como se desee empleando un número suficiente de elementos. Cuando la ley momento curvatura viene dada por una poligonal se podría conseguir incluso solución nodal exacta para el problema no lineal determinando de manera adecuada la posición de los nodos de los elementos.

En el capítulo quinto como muestra de la versatilidad de los métodos algebraico y general propuestos en esta investigación se llevan a cabo una serie de ejemplos y aplicaciones al cálculo de pilares en distintas situaciones de cargas, geometría y condiciones de vínculo.

Finalmente se dedica el **capítulo sexto** a recoger las principales conclusiones que se derivan del trabajo de investigación realizado y se indican posibles vías de continuación del mismo en relación con futuras extensiones de la metodología presentada y nuevas aplicaciones posibles.

CAPÍTULO 2

EL PROBLEMA DE LAS PIEZAS CON CARGAS AXILES. **ANTECEDENTES HISTÓRICOS Y MÉTODOS DE** **CÁLCULO.**

2.1 HISTORIA Y ANTECEDENTES

El estudio del comportamiento de las piezas esbeltas comprimidas se puede considerar uno de los problema tipo de la física y de la ingeniería práctica que ha mantenido una estrecha relación con el campo matemático. A dicho problema han prestado atención los autores más relevantes, de cuyos esfuerzos se obtuvieron frutos destacados y aportaciones brillantes a partir de las cuales se desarrollaron y consolidaron distintos elementos del análisis. En su evolución confluyen distintas ramas unas de carácter práctico como la resistencia de materiales desde una vertiente ingenieril y otras de tipo teórico dando lugar a una interacción entre el problema real y la teoría.

La modelización del problema real tratando de poner de manifiesto los distintos aspectos o variables que intervienen: comportamiento de los materiales, geometría del problema forma de la sección, secciones planas (Bernoulli-Euler), cargas, etc. ha ido dando lugar a distintos planteamientos: grandes o pequeñas deformaciones y técnicas de resolución.

La evolución no es continua y en el avance se van entrecruzando distintas cuestiones. A grandes rasgos se pueden distinguir diferentes periodos y fases que caracterizan este proceso:

- Creación del modelo. El estudio de elementos de directriz recta ha dado lugar a distintos análisis y planteamientos en torno al problema de piezas cargadas axialmente que ha permitido al mismo tiempo una depuración y extensión de dicho problema.
- El estudio del pandeo de forma paralelo a otras ramas de la técnica y del conocimiento en general ha favorecido el desarrollo de los instrumentos de análisis en el campo matemático.
- A partir de finales del siglo XIX con el avance tecnológico tiene lugar una extensión de los problemas tratados en los que encuentran aplicación dichos instrumentos.
- En particular a lo largo del siglo XX se produce el gran desarrollo de los métodos numéricos los cuales permiten abordar de una forma definitiva gran variedad de problemas no lineales. En relación con el tema tratado en el presente trabajo la no linealidad viene dada por el comportamiento del material. Y como ejemplo particular con características propias de no linealidad del material se encuentra el estudio de elementos de hormigón armado.

Por otra parte de acuerdo con lo expuesto anteriormente, en el estudio de problemas no lineales se puede hablar de la existencia de dos líneas de trabajo: una en el área de la matemática en la que se han aplicado métodos que tiene una cierta tradición como son los métodos de continuación o de homotopía. Y otra en el campo de la técnica y en especial en el campo de los medios continuos y de las estructuras dada su evolución en la que de una forma natural se empezaron estudiando problemas con una formulación lineal que dieron lugar a unas técnicas y formas de resolución: métodos matriciales, métodos de desplazamientos, compatibilidad, etc. Su extensión a problemas no lineales ya venía de alguna manera marcada por los métodos utilizados en los problemas

lineales. De esta forma los primeros métodos en el campo no lineal fueron los incrementales utilizando el concepto de matriz de rigidez tangente que fueron evolucionando por la línea de los métodos de Newton-Raphson los cuales se vieron complementados por distintas técnicas de control para evitar situaciones de no convergencia o acumulación de errores. Con la consideración de los métodos de continuación en el campo de la técnica quizás se pueda hablar finalmente de un acercamiento de métodos a la hora de tratar de resolver problemas no lineales.

2.1.1 Creación del modelo

Desde el punto de vista histórico pueden citarse, aunque de manera esquemática, algunos hechos y aportaciones notables en relación con las primeras etapas del problema de pandeo: Tal y como se indica en Timoshenko [Tim53] y en Love [Lov44] el primer científico que se ocupó de estudiar el comportamiento resistente de una pieza prismática fue Galileo. En su publicación de 1638 “Discorsi e Dimostrazioni matematiche” sin utilizar ninguna ley que relacionara tensión con deformación trata de obtener algunos resultados sobre la resistencia de una viga sometida a cargas transversales, y aunque algunas de las hipótesis que emplea en su análisis no son correctas (por ejemplo la posición de la fibra neutra), su forma de abordar el problema representa un modelo que es seguido por investigadores posteriores, particularmente por Mariotte. Este problema, y en particular el de determinación de la elástica o deformada de la viga, es conocido como el problema de Galileo.

Respecto al problema de pandeo propiamente, Musschenbroek en 1729 a través de su programa experimental de resistencia de materiales puso de manifiesto que la carga de pandeo es inversamente proporcional al cuadrado de la longitud de la pieza [Tru75]. Jacobo Bernoulli algunos años antes obtiene de una manera precisa la ecuación de la elástica en 1705 basándose en la hipótesis de Mariotte sobre la fibra neutra, considerando la proporcionalidad existente entre la curvatura de la elástica y el momento flector. Euler en 1744 [Tim53] mediante su método de cálculo de variaciones obtiene a partir de la sugerencia de Daniel Bernoulli la ecuación diferencial de la elástica, publicando dicho resultado en “Methodus inveniendi líneas curvas maximi minimive proprietate gaudentes”. En este trabajo Euler obtuvo ya el valor de la carga de pandeo, pero en 1759 en su publicación “Sur la force des colonnes” obtiene de nuevo el valor de dicha carga a partir de una simplificación (ecuación linealizada) de la ecuación diferencial de la elástica. Hay que señalar que la carga de pandeo que da Euler contiene una constante C , que denomina coeficiente de elasticidad absoluta de la pieza, en lugar de la rigidez EI , y para la que da las dimensiones correctas de una fuerza por el cuadrado de una longitud. En publicaciones posteriores considera el caso de piezas de sección variable y otros con carga axial distribuida a lo largo de la longitud de la pieza, pero para algunos de estos problemas la solución que obtiene no es correcta.

Al mismo tiempo se profundiza en distintas líneas de trabajo. Así por ejemplo, en 1770 Lagrange en su publicación “Sur la figure des colonnes” estudia la ecuación linealizada de Euler [Tim53], [Tru75] y obtiene la sucesión de valores de cargas críticas posibles para la pieza biarticulada relacionando cada carga con la correspondiente deformada. Asimismo considerando el valor exacto de la curvatura determina las deformadas para cargas que exceden el valor de la carga crítica. Lagrange también estudia cómo debe ser el éntasis o abultamiento del fuste para un pilar de altura y volumen dados de manera que la carga de pandeo sea lo mayor posible. Concluye erróneamente que la mejor

forma es un cilindro circular, es decir que el éntasis no aumenta la carga de pandeo [Tim53, p. 39]. Posteriormente Clausen en 1851 determina que la pieza óptima frente al pandeo es aquella donde la variación de la sección circular a lo largo del fuste da un perfil algo parecido al de una cicloide [Tru75, p. 284]. En relación con este punto de problema de cálculo de variaciones isoperimétrico sobre el pandeo de la pieza recta hay multitud de publicaciones de gran interés. Una de ellas es la de Keller (1960, The shape of the strongest column pag. 303 de Truesdell) en ella se conjetura que la pieza más resistente al pandeo es una cuya sección varía de la misma forma que la determinada por Clausen pero en lugar de secciones circulares éstas sean triángulos equiláteros que mantienen el paralelismo de los lados y con el baricentro en el eje de la pieza.

Por otra parte el problema sobre el comportamiento de la pieza sometida a estados más generales de carga que la compresión, es abordado de una manera muy completa por Kirchhoff en 1859 generalizando resultados anteriores obtenidos por Euler [Vil97,p.167]. Trata con extensión el problema de grandes desplazamientos y pequeñas deformaciones de una pieza elástica inicialmente recta y condiciones de contorno más generales que las consideradas por Euler.

Finalmente la consideración de las propiedades de los materiales dio lugar a nuevas interpretaciones de las ecuaciones de la viga-columna. Así, Lamarle en 1845 limita la aplicación de la fórmula de Euler al límite de proporcionalidad del acero y posteriormente los trabajos de Engesser (1889) [Eng89] y Considere (1891) [Con91] introducen el comportamiento de los materiales con lo que de alguna manera a finales del siglo XIX quedan planteados los distintos aspectos físicos que afectan al modelo de comportamiento de la viga-columna en la línea en la que se trata en el presente trabajo.

2.1.2 Desarrollo de los instrumentos de análisis

Debido al desarrollo y ampliación del estudio de la viga-columna su análisis se ha situado en el extenso campo de la estabilidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Campo desde el que algunos autores han tratado el problema de la viga-columna y que constituye el marco del que el presente trabajo forma parte.

En este sentido, los trabajos de Euler [Eul44] sobre el pandeo de barras comprimidas abren un extenso capítulo en el análisis y en la matemática aplicada en el que quedan incluidos una gran variedad de problemas a los que a su vez pertenecen todos aquellos relacionados con el estudio de vigas-columnas. La expansión que tiene lugar a partir de finales del siglo XIX con los trabajos de Poincaré [Poi85] permiten ampliar los conceptos de estabilidad y bifurcación mediante los trabajos de Lyapunov sobre estabilidad [Lia92] y los trabajos de Andonov y colaboradores [AVK87] sobre la Bifurcación de Hopf en 1930. Para el análisis de este tipo de problemas se desarrollan distintos métodos numéricos para la determinación de trayectorias, ramas de bifurcación secundarias y puntos críticos destacando entre ellos los métodos de continuación u homotopía.

En la literatura matemática el concepto de continuación u homotopía se puede encontrar en los años treinta. El uso de los métodos de continuación como un método numérico se atribuye a Davidenco [Dav53] según Felippa [Fel00]. Por su parte los métodos de continuación basados en el concepto de longitud de arco es atribuido a Haselgovre [Has61] y Klopfenstein [Klo61], aunque estas aportaciones permanecen olvidadas hasta

finales de los años setenta. Por su parte Deist y Sefor [DeS67] introducen las ideas básicas.

En los años setenta el interés se fija hacia algoritmos para el cálculo de "ramas-trayectorias generales" y longitud del paso del parámetro de control. Aportaciones entre las que cabe mencionar:

- El concepto de pseudo longitud-arco: [Rik72] y [Kel77].
- Utilización de la parametrización local: [Rhi81] , [Sey79b] y [Sey84].
- Adaptación de la longitud del paso y optimización del número de pasos Seydel [Sey77], [Sey84].

Esta estrategia está en el núcleo de distintos algoritmos sobre la longitud de paso. Esto ha dado lugar a que los principios básicos del método de continuación sean útiles para otros problemas.

Durante un largo tiempo el tratamiento mediante los métodos numéricos fue dominado por la implementación de métodos analíticos. Los ordenadores fueron usados como instrumentos que amplificaban el potencial analítico de los investigadores. Como los métodos analíticos tratan problemas particulares los métodos numéricos que los complementan tenían poco alcance.

Sin embargo a finales de los 70, los métodos numéricos se basaron en ideas que no habían sido utilizadas anteriormente en los métodos analíticos. Ejemplos de estas nuevas tendencias fueron:

- Los sistemas de trayectorias: [Sey77] y [Sey79a]. Esta posibilidad hizo uso de la capacidad para resolver complejos sistemas de ecuaciones no lineales mediante métodos iterativos.
- Los métodos de Seydel: [Sey77] y [Sey79a], incluyendo las trayectorias básicas del sistema fueron primeramente formulados para casos de problemas de contorno infinito dimensionales y posteriormente simplificados para casos finito dimensionales [Sey79c].
- Idea de la regularización de Moore: [Moo80].
- Noción de funciones test de bifurcación de Seydel: [Sey77],

2.1.3 Ampliación del análisis a nuevos problemas

Hay que señalar que los trabajos de Euler, Lagrange y Kirchhoff contemplan casos de problemas lineales y no lineales para desplazamientos grandes, pero en todos los casos consideran un comportamiento elástico y lineal para los materiales y piezas esbeltas.

Junto a los problemas clásicos de determinación de cargas críticas de pandeo se estudian problemas de bifurcación de posiciones de equilibrio en la línea de Soutwell y Timoshenko que tratan de obtener distintas formas de equilibrio para la misma carga y mismo contenido energético dichas formas críticas aparecen sólo en sistemas susceptibles de una deformación sin cambio de longitud (placas, vigas, etc.).

Los valores de la carga crítica que se obtienen para las teorías anteriores dependen de la rigidez de la pieza pero no de la tensión de rotura de los materiales. Dichas teorías son

insuficientes para estudiar el comportamiento de la pieza comprimida cuando ésta es corta o el material es elástico no lineal o cuando es plástico. Para estos casos el comportamiento resistente de la pieza viene marcado esencialmente por las tensiones de agotamiento de los materiales.

Una teoría de pandeo que tiene en cuenta este comportamiento plástico de los materiales es la teoría del módulo tangente propuesta inicialmente por Considere [Con91] y desarrollada en detalle por Engesser en 1889 [Eng89], (véase [ChA76] y [ChL87]). En esta teoría en la expresión de la carga de Euler se sustituye el módulo de elasticidad E por el módulo tangente E_t del material. Posteriormente el mismo autor propuso una teoría de módulo reducido empleando un módulo “efectivo” situado entre E y E_t .

Tras la aportación de Engesser y ante la falta de desarrollos teóricos en este nuevo planteamiento se combinan los estudios experimentales, en los que se pone de manifiesto el comportamiento del tipo de material y argumentaciones empírico-teóricas.

Uno de los primeros autores que introduce los criterios del comportamiento del material para definir la carga o tensión crítica teniendo en cuenta al mismo tiempo las características y tipo de material fue Tetmajer que establecía una relación entre la tensión crítica y la esbeltez de la pieza de tipo lineal para hierro de construcción o acero fundido y una relación parabólica para material de fundición. Karmán por su parte establece unas relaciones análogas sobre la interpretación de ensayos, considerando que cuando hay fibras que superan el límite elástico su módulo de elasticidad es distinto de aquellas que no lo han superado de esta forma llega a resultados análogos a los de Engesser.

Por otro lado una teoría general para determinar la carga de pandeo de pilares con carga excéntrica fue propuesta por Karmán (1910) [Kar10]. Dicha teoría se basa en las relaciones tensión-deformación del material, hipótesis de Bernoulli-Euler mientras que el método numérico se basa en la integración numérica variando las pendientes de la deformada a lo largo de la pieza. La validez de la Teoría de Karmán fue probada por Chawalla [Cha34] mediante ensayos con pilares metálicos articulados. Ros y Brunner [RoB26] simplificaron el método de Karmán suponiendo que la deformada era una semionda de la función senoidal. Westergaard y Osgood [WeO28] propusieron usar como deformada una porción de la función coseno ya que la función seno es inconsistente con las condiciones de contorno cuando hay momentos en los extremos pero mantuvieron una rigidez (EI) constante.

Los primeros pasos del estudio de la estabilidad en condiciones de plastificación se hacen a través de modelos que tratan de explicar el fenómeno de la inestabilidad cuando en determinados puntos de la pieza se entra en fase plástica.

La primera gran aportación en esta línea fue Shanley que elaboró su celebre modelo en 1947 [Sha47]. Shanley puso de manifiesto a través de su modelo y de multitud de experimentos que la teoría del módulo tangente era más realista que la del módulo reducido.

A partir de los trabajos de Engesser y Shanley ha habido multitud de estudios sobre el comportamiento de piezas rectas cortas y esbeltas en régimen elástico lineal o no lineal

o régimen plástico, sometidas a compresión simultáneamente con otros estados de cargas: viga-columna.

Hutchinson [Hut73] extiende el análisis de Shanley considerando un modelo similar pero con una distribución continua de resortes cuya respuesta se considera elasto-plástica estudiando dos casos: ley bilineal y Ramberg-Osgood de tensión deformación.

El estudio de Cimetière y Léger [CiL96], trató de demostrar matemáticamente que en el modelo plástico de Shanley existen infinitos puntos de pandeo entre la carga crítica del módulo tangente y la carga crítica de Euler.

Es a partir del desarrollo de la teoría de la plasticidad cuando los avances en esta línea se consolidan de una forma más rigurosa a través de los trabajos de Hill y Petryck, [Bat02].

2.1.4 Métodos numéricos

La posibilidad de abordar nuevos aspectos relacionados con el comportamiento de los pilares ha sido posible en gran parte gracias al desarrollo de nuevos métodos numéricos. Si muchas de las aproximaciones a los problemas lineales se obtenían mediante técnicas de desarrollos en serie (Timoshenko), diferencias finitas o los métodos energéticos de Rayleigh-Ritz, Stodola-Vianello, los problemas no lineales requieren métodos iterativos y de discretización. El soporte de estas técnicas ha sido el MEF en colaboración con distintos algoritmos numéricos como el de Newton-Raphson y sus distintas variantes.

A diferencia de los matemáticos los ingenieros guiados por necesidades prácticas desarrollaron una serie de técnicas numéricas tratando de obtener resultados fiables dando lugar al desarrollo de diversas técnicas que en el campo de las estructuras y de los medios continuos se recoge en las líneas siguientes.

Durante el período 1960-1975 [Fel00], los esfuerzos de los investigadores se dedicaron a la correcta formulación y superación de ciertos problemas (discretización y mallado, establecimiento de las ecuaciones constitutivas de los materiales, formulación de los distintos tipos de elementos) del MEF. El esfuerzo en esta dirección dio lugar a que en los problemas no lineales el desarrollo de los procedimientos para resolver las ecuaciones planteadas se relegaban a un segundo término lo cual propició el predominio de los métodos de tipo incremental que resultaban los más naturales.

Cuando la formulación del método quedó correctamente establecida y se llegó a una utilización práctica de los residuos del balance de fuerzas de equilibrio y de las matrices de rigidez tangente a finales de los años sesenta, los métodos incrementales dieron paso a procesos iterativos. En esta línea, a principios de los años setenta se empezaron a utilizar los métodos de Newton en el campo de los problemas geoméricamente no lineales. Estos métodos se extendieron a otros tipos de problemas como el de la elasticidad no lineal al mismo tiempo que se utilizaban distintas variantes del método de Newton: modificado, gradiente conjugado y cuasi-Newton, [DeM77], [Fle87].

Sin embargo se presentaron ciertas dificultades cuando en la resolución aparecían singularidades como en los puntos de bifurcación, puntos límite, etc. El aumento del interés por el estudio de situaciones post-pandeo o post-colapso dio lugar al desarrollo

de distintos métodos de control en los pasos de iteración para resolver los problemas: control de desplazamientos, control de cargas, control mixto de cargas-desplazamiento, control de longitud de arco entre otros. No obstante el cruce de puntos de bifurcación simples y múltiples sigue siendo objeto de investigación.

A continuación se mencionan algunos autores que hicieron sus aportaciones en esta línea de trabajo.

Como señala Crisfield [Cri91], el tratamiento de los problema no lineales se posibilita mediante el desarrollo de métodos numéricos, en particular encuentra un gran desarrollo gracias a la aparición del MEF en los años sesenta con las publicaciones de Clough [Clo60], Turner, Dill, Martin y Melosh [TDM60].

Los primeros trabajos sobre no linealidad geométrica aparecen en los años sesenta del siglo XX con las aportaciones de Holand y Moan [Hom69], Kapur y Hart [KaH66], Gallager y al. [GGP67], [GaP66]. Los métodos incrementales fueron utilizados inicialmente por Turner et al. [TDM60] y Argyris ([Arg64], [Arg65]). Estos métodos se extendieron al estudio de problemas con no linealidad del material ([Mar71], [Zie82]).

El uso de los métodos incrementales puso de relieve que se producía una acumulación de errores inadmisibles por lo que se pasó a utilizar el método de Newton-Raphson tal y como hicieron Mallet y Marcal [MaM68] y Oden [Ode67]. Sin embargo el método de Newton-Raphson en su versión pura tiene un costo alto en cada iteración por lo que se utiliza el método de Newton Raphson modificado, cuasi-Newton y gradiente conjugado. El uso del método de Newton-Raphson modificado fue aconsejado por Oden [Ode69] y Zienckiewicz [Zie82].

Los métodos basados en la técnica cuasi-Newton se relaciona como ponen de relieve Nayak y Zienckiewicz [NaZ72] con los procedimientos de aceleración. Así mismo la utilización de métodos incrementales (predictor) e iterativos (corrector) se debe a Brebbia y Connor [BrC69] mientras que Murray y Wilson [MuW68] por su parte introducen los métodos de continuación en el campo de la ingeniería con el propósito de describir las trayectorias de estados de equilibrio.

Los primeros trabajos sobre puntos límite se deben a Sharif y Popov [ShP71] y Sabir y Lock [SaL72]. Al aplicar los métodos de continuación aparecen dificultades cuando se trata de encontrar los puntos críticos así mismo las necesidades de analizar situaciones de post-pandeo y post-collapso han dado lugar a nuevos perfeccionamientos como la utilización de procedimientos con control de desplazamientos o cargas en particular se aplican las técnicas de "longitud de arco" que introducen Riks ([Rik72], [Rik79] y Wempner [Wem71]).

2.1.5 Hormigón armado

En el marco de los métodos elaborados para el análisis de estructuras en condiciones de no linealidad, el desarrollo de métodos aplicados al hormigón armado tiene su historia particular dadas las especiales características que presenta este material que hacen de su cálculo una rama con características propias dentro del cálculo de estructuras. Por su parte el análisis de los elementos a compresión en hormigón armado como es el caso de

los pilares presenta distintas alternativas de acuerdo con los distintos grados de simplificación adoptados.

La línea tradicional en el cálculo de elementos de hormigón ha consistido en llevar a cabo un cálculo elástico de primer orden de la estructura y en un segundo paso realizar el estudio de los elementos a compresión de forma aislada considerando a su vez distintas situaciones simplificadas tratando de reproducir su comportamiento en la estructura mediante: diferentes condiciones de contorno en los apoyos (articulados, empotrados, libres, restricciones elásticas, etc.) y distintos estados de carga en los extremos.

Sin embargo el cálculo lineal presenta en el caso del hormigón algunos problemas: la hipótesis de la rigidez (EI) constante solo es válida para niveles de tensiones bajos pero cuando la tensión supera $0.5f_{cj}$ (resistencia del hormigón a los j días) el diagrama real se aleja de la linealidad (J. M. Carreras [Car92]). Junto a esto en los cálculos es práctica habitual no tener en cuenta la colaboración de las armaduras pero además cuando la estructura es esbelta los fenómenos de segundo orden afectan al valor de los esfuerzos. Por otra parte en el caso de estructuras de hormigón, debido al comportamiento de los materiales, hay que tener en cuenta distintos grados de empotramiento, redistribución de esfuerzos, evolución de la deformada, etc., aspectos que no son recogidos por un análisis elástico-lineal. Es por ello que un análisis más completo requiere la consideración de la no linealidad geométrica y del material.

Una vez que se comprendió la importancia de los efectos de segundo orden en el comportamiento de los pilares, los primeros trabajos en el campo de los pilares de hormigón armado trataron de poner de manifiesto su funcionamiento mediante el estudio de la pieza aislada. En un principio se aplicaron las teorías clásicas ya mencionadas del módulo tangente de Engesser para cargas concentradas y los métodos numéricos de Karmán y sus variantes para cargas excéntricas. Desde el punto de vista práctico la primera gran aportación fue la de Baumann (1930-1933) [Bau34] que utilizando el método de Karmán y determinando las propiedades del hormigón mediante ensayos consiguió una buena coincidencia entre la teoría y los ensayos de columnas cargadas excéntricamente. Ernst, Hromadik y Riveland (1953) [EHR53] empleando la variante de Westergaard y Osgood y la relación tensión deformación de Hognestad aplicaron el método a columnas con cargas excéntricas y con condiciones de contorno mediante articulaciones así mismo Broms y Viest (1958) [BrV58] utilizando la deformada senoidal y siguiendo el procedimiento de los últimos autores lo aplican a columnas con articulaciones y restricciones elásticas al giro comparando los resultados teóricos obtenidos para las cargas de pandeo con los ensayos llevados a cabo por: Baumann [Bau34], Thomas (1939) [Tho39], Hanson y Rosenström (1947) [HaR47], Ramboll (1951) [Ram51], Ernst, Hromadik y Rively (1953) [EHR53], Gehler y Hütter (1954) [GeH54].

Chang y Ferguson (1963) [ChF63] describen un método para la obtención de la deformada de una pieza cargada axialmente comparando los resultados con la hipótesis de la deformada de una onda de coseno siguiendo el método de Ernst, Hromadik y Riveland. Los resultados de Chang y Ferguson demuestran que en general la longitud crítica de la deformada del coseno es menor que la obtenida con el método numérico para una columna y carga específica, observándose que el error de la hipótesis del coseno aumenta cuando la carga axial disminuye. Esto se debe a que la hipótesis de la

deformada del coseno tiene una rigidez constante que no se ve afectada por la aparición de fisuras aspecto que se evita mediante el método numérico. El método propuesto por estos autores les permite extender las conclusiones a pilares con carga excéntrica igual en los extremos.

Pfrang y Siess (1963, 1964) [PfS64] ofrecen un modelo de cálculo incremental que permite resolver el problema de la deformada y los esfuerzos de un pilar con excentricidades diferentes en los extremos.

La finalidad de todos estos trabajos era combinar estos resultados con un análisis lineal. En esta línea hay que situar los estudios que se llevan a cabo por autores franceses. En este sentido hay que indicar que en la tradición francesa se ha utilizado la deformada senoidal como base de sus investigaciones de acuerdo con la propuesta por P. Faessel et al. [FMF73] que utiliza dicha hipótesis para aproximar la deformada de los pilares facilitando el cálculo de los mismos.

En principio dicha deformada se utilizó para pilares con excentricidades iguales en los extremos. La sección de referencia en este caso es la sección central en la que el momento es mayor y además permitía establecer una relación sencilla entre la deformada y la curvatura dando lugar a la directriz geométrica como contrapunto a la directriz mecánica representada por la relación momentos-curvatura de la sección.

Basados en esta idea, Robinson y Modhabi (1968) [RoM68] llevan a cabo un cálculo de las cargas de pandeo para pilares articulados comparando los resultados con ensayos de corta duración obteniendo una buena correlación para secciones con plano medio de simetría y aceptable para secciones que no tienen plano medio de simetría.

Morisset (1973) (véase [FMF73]) presenta mediante tablas la influencia de los distintos factores que afectan al pandeo de pilares.

Foure (1973) (véase [FMF73]) por su parte extiende el método de la deformada senoidal a pilares con excentricidades distintas en los extremos. Por lo que el pilar deformado está representado por un arco de una función coseno.

Los ensayos de Robinson, Foure y Bourghli (1975) [RFB75] tratan de respaldar este planteamiento indicando la influencia de distintas variables en la carga de pandeo.

En el marco de los trabajos del Comité Europeo del Hormigón hay que destacar las aportaciones de Jäger en 1959 que propone un método iterativo por aproximaciones sucesivas para obtener la deformada y los trabajos de Aas-Jackobsen [Aas66], [Aas72].

Otros aspectos que se han estudiado en el pandeo de pilares de hormigón han sido el efecto de la fluencia del hormigón (S. P. Mauch [Mau66], Fouré (1973) [Fou73]), la existencia de cargas biaxiales (Robinson, Foure y Sahébdjem (1975) [RFS75], J. B. McGregor y S. L. Barter [McB66]), efecto de las restricciones (Alfred L. Parme [Par66], I. Martin y E. Olivieri [MaO66]).

Todas estas aportaciones son recogidas por los distintos códigos y normas de hormigón que en algunos casos como el del Comité Europeo del Hormigón se traducen en

manuales [CEB78] en los que se proponen distintos métodos de cálculo que se mencionan en el apartado 2.7.

El hormigón armado es un material que muestra un comportamiento altamente no lineal desde el momento en el que se fisura y en particular en las proximidades de los estados de colapso. Para estimar su comportamiento es necesaria una adecuada modelización de los comportamientos no lineales tanto geométricos como del material. En esta línea el MEF ha permitido desarrollar distintas líneas de trabajo para modelizar el comportamiento del hormigón armado y pretensado así como los distintos tipos de elementos estructurales de los que forma parte.

En líneas generales se pueden distinguir en la actualidad dos grandes líneas en el cálculo de elementos prismáticos de hormigón armado y pretensado como señala A. Marí [Mar91]: por una parte la utilización de métodos matriciales clásicos adaptados a problemas no lineales y por otra la utilización del MEF en elementos unidimensionales. Todo ello teniendo en cuenta los distintos aspectos que presenta el hormigón armado: fisuración, fluencia, retracción, etc.

Como señala A. Mari [Mar91], el MEF ha sido ampliamente utilizado en su modalidad de elementos barra en el área del cálculo de estructuras de hormigón. Según este autor el primer trabajo en este campo fue el realizado por Ngo y Scordelis (1967) [NgS67]. En el tema específico de estructuras de barras son interesantes los trabajos de Selna [Sel67], Aas Jackobsen [Aas73] que consideró efectos de segundo orden junto a la fluencia, Kang [Kan77] que consideró en entramados planos el efecto del pretensado. Hellesland y Scordelis [HeS81] utilizaron el modelo de Kang para estudiar el comportamiento de pilas de puente bajo deformaciones impuestas. Basado en el trabajo [Cha82] A. R. Marí, desarrolló un modelo de análisis no lineal por elementos finitos para entramados espaciales de hormigón armado y pretensado.

Como indican K. W. Wong y R. F. Warner [WoW97], en las últimas décadas se han desarrollado distintas técnicas que recogen su comportamiento no lineal destacando los trabajos de Aas-Jakobson y Grenacher [AaG74], Bazant, Pan y Pijaudier-Cabot [BPP87], Wong, Yeo y Warner [WYW88], [OwH80], Sun, Bradford y Gilbert [SBG94], Kawano y Warner [KaW95].

Finalmente en relación con otros modelos basados en formulaciones distintas de los elementos finitos cabe mencionar los trabajos de Menegotto y Pinto [MeP74], Grelat [Gre78], [MGF83], Irls [Irl83], Carol [Car87], Marí y Carrascón [CMC87] algunos de los cuales se mencionan en el apartado 2.7.

2.2 EL PROBLEMA DE PANDEO DE UNA BARRA CON NO LINEALIDAD GEOMÉTRICA

Antes de desarrollar en los capítulos siguientes los procedimientos de análisis para el problema de pandeo en régimen no lineal con no linealidad del material que es el objetivo de esta investigación y cuya definición se introduce en el apartado siguiente, incluimos en éste capítulo el problema de la barra de Euler. Dicho problema constituye una referencia obligada en este tipo de trabajos al ser probablemente uno de los casos de bifurcación del equilibrio que más publicaciones y comunicaciones ha suscitado (véase [TiG61], [Sta79] y [Sta71]). El problema consiste en determinar la deformada de equilibrio para cargas superiores a la carga crítica, cuando se emplea en la ecuación diferencial el valor exacto de la curvatura.

Tomando los ejes coordenados como se indica en la figura 2.2.1 la ecuación diferencial de la pieza de longitud l y de rigidez constante $A = EI$ sometida únicamente a la carga axial P es

$$A \frac{d\theta}{ds} = -Pu$$

ya que el momento flector M es igual, por un lado, por la linealidad en la relación constitutiva momento-curvatura, al producto de la rigidez por la curvatura y por otro, como se trata de un problema homogéneo donde no hay otras acciones, al producto de la carga P por el brazo u

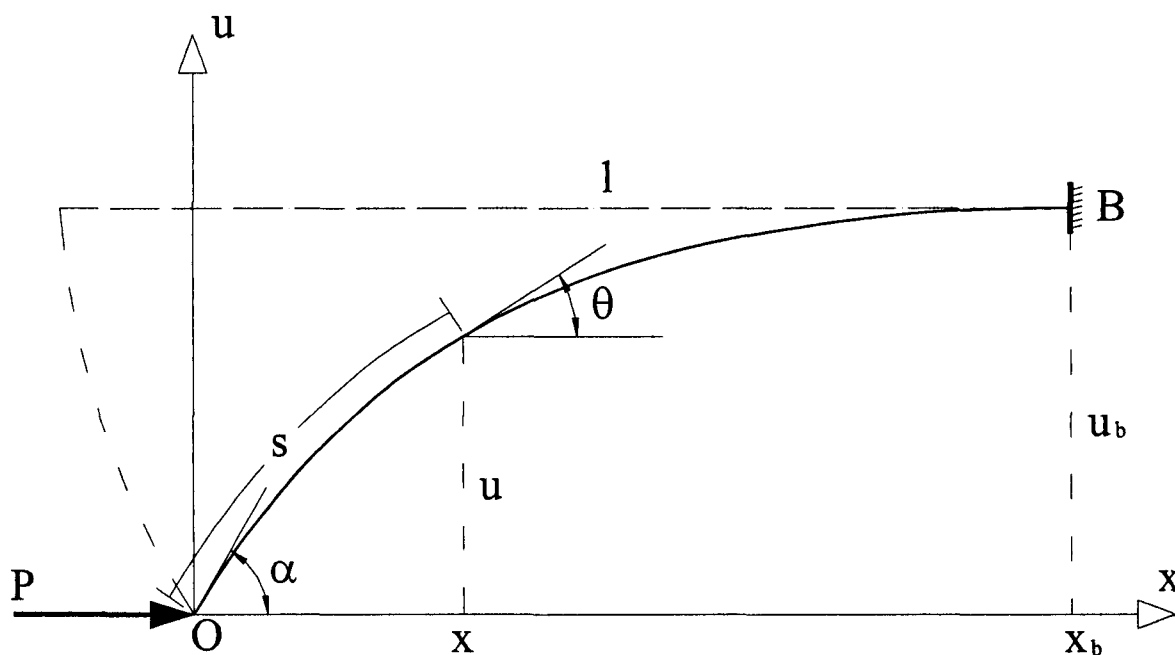


Figura 2.2.1

Teniendo en cuenta que la curvatura es $\chi(u) = d\theta/ds = u''/(1+u'^2)^{3/2}$ la ecuación puede ponerse como

$$A\chi(u) + Pu = 0$$

o equivalentemente como

$$A \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}} + Pu = 0$$

Como condiciones de contorno se podrían poner $u(0) = 0$ y $u(x_b) = u_b$ las cuales resultan en principio de poco interés práctico pues tanto x_b como u_b son inicialmente desconocidos, aunque como veremos se podrán obtener en términos de la longitud l de la pieza y del valor de la carga P . Resulta más interesante considerar previamente el problema de valor inicial correspondiente a la ecuación diferencial que resulta al derivar la ecuación inicial respecto de la variable longitud de arco s , es decir

$$A \frac{d^2\theta}{ds^2} + P \frac{du}{ds} = 0$$

y como $du/ds = \sin\theta$ queda

$$A \frac{d^2\theta}{ds^2} + P \sin\theta = 0 \quad (2.2.1)$$

Como la curvatura en $s = 0$ es nula ya que no hay ningún momento exterior aplicado entonces $d\theta/ds = 0$. Por otra parte el ángulo para $s = 0$ es α como se puede ver en la figura 2.2.1. En resumen las condiciones iniciales para la ecuación diferencial de segundo orden anterior son $\theta(0) = \alpha$ y $\theta'(0) = 0$. A partir de esta ecuación Kirchhoff establece en 1889 una analogía entre este problema y el de las oscilaciones de un péndulo [TiG61,p.84] siendo las variables análogas, por un lado t (tiempo) y s (longitud de arco), por otro (l/g) (cociente entre la longitud y la aceleración de la gravedad) y (A/P) (cociente entre la rigidez y el valor de la carga axial).

Multiplicando ambos miembros de (2.2.1) por $d\theta/ds$ e integrando entre $s = 0$ y s resulta

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = r^2 (\cos\theta - \cos\alpha)$$

donde $r^2 = P/A$. Despejando ahora ds teniendo en cuenta que para $ds > 0$ es $d\theta < 0$ queda

$$ds = - \frac{ds}{r\sqrt{2}\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$$

La longitud l de la pieza verifica

$$l = \int_0^l ds = \int_\alpha^0 - \frac{ds}{r\sqrt{2}\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} = \int_0^\alpha \frac{ds}{2r\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

donde $\cos\theta - \cos\alpha = 2(\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(\theta/2))$. Haciendo ahora el cambio de variable $\sin(\theta/2) = \sin\varphi \sin(\alpha/2)$ para el que $\varphi = 0$ si $\theta = 0$ y $\varphi = \pi/2$ si $\theta = \alpha$.

De dicho cambio de variable se tiene

$$d\theta = 2 \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \varphi d\varphi}{\cos \frac{\theta}{2}} = 2 \frac{k \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

donde $k = \sin(\alpha/2)$.

De acuerdo con la relación

$$\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$$

la expresión de la longitud puede ponerse en términos de la variable φ mediante

$$l = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{r\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Por otra parte la flecha u_b , se obtiene considerando que $du = \sin\theta ds$ y además que

$$\sin\theta = 2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2k\sin\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

resultando

$$u_b = \int_\alpha^0 - \frac{\sin\theta d\theta}{r\sqrt{2}\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} = \frac{2k}{r} \int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi = \frac{2k}{r}$$

Asimismo de $dx = \cos\theta ds$ es decir

$$dx = \cos\theta \frac{-d\theta}{r\sqrt{2}\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$$

y de $\cos\theta = 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - 2k^2 \sin^2 \varphi$ se obtiene

$$x_b = \int_\alpha^0 - \frac{\cos\theta d\theta}{r\sqrt{2}\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} = \frac{2}{r} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - \frac{1}{r} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Teniendo en cuenta el desarrollo en serie de las integrales elípticas completas de primera y segunda especie \hat{K} y \hat{E} respectivamente [Pui70,p.71], donde

$$\hat{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right)^2 k^4 + \dots \right]$$

$$\hat{E}(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right)^2 k^4 - \dots \right]$$

resulta que la longitud es $l = \hat{K}(k)/r$, por tanto el valor de la carga P verifica

$$P = \hat{K}^2(k) \frac{A}{l^2} \geq \frac{\pi^2 A}{4l^2}$$

pues para cualquier $k = \sin \frac{\alpha}{2} \geq 0$ es $\hat{K}(k) \geq \pi/2$ (para $k=0$, $\hat{K}(k) = \pi/2$).

Este resultado es muy importante pues indica que la carga P a partir de la cual la pieza se curva (pandeo) es el valor crítico

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 A}{4l^2}$$

y que para valores superiores hay nuevas configuraciones de equilibrio. Como por otra parte la pieza sin deformar es también configuración de equilibrio, se produce en la carga crítica una bifurcación del equilibrio para dicho valor.

La flecha u_b puede aproximarse por la expresión $4lk/\pi$ pues

$$u_b = \frac{2k}{r} = \frac{2kl}{\hat{K}} = \frac{4lk}{\pi} \frac{1}{1 + \frac{k^2}{4} + \dots} < \frac{4lk}{\pi}$$

Las gráficas de P y u_b en función de $k = \sin(\alpha/2)$ tienen el aspecto que se indica en (a) y (b) respectivamente de la figura 2.2.2

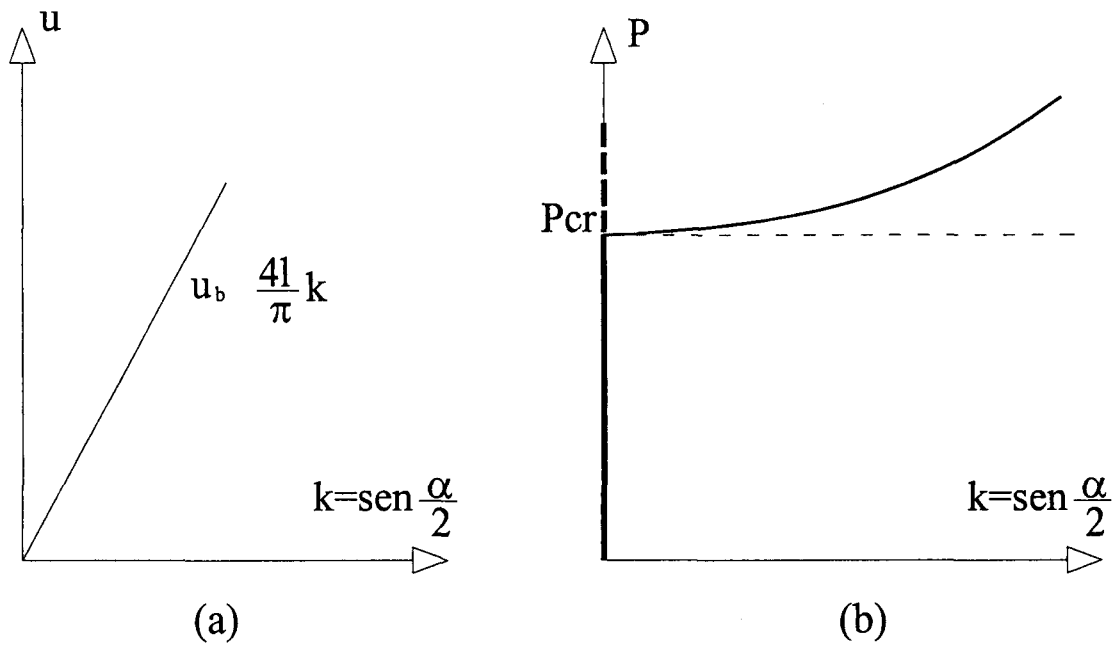


Figura 2.2.2

Las posiciones de equilibrio para cargas inferiores al valor crítico y ligeramente superiores se esquematizan en la figura 2.2.3

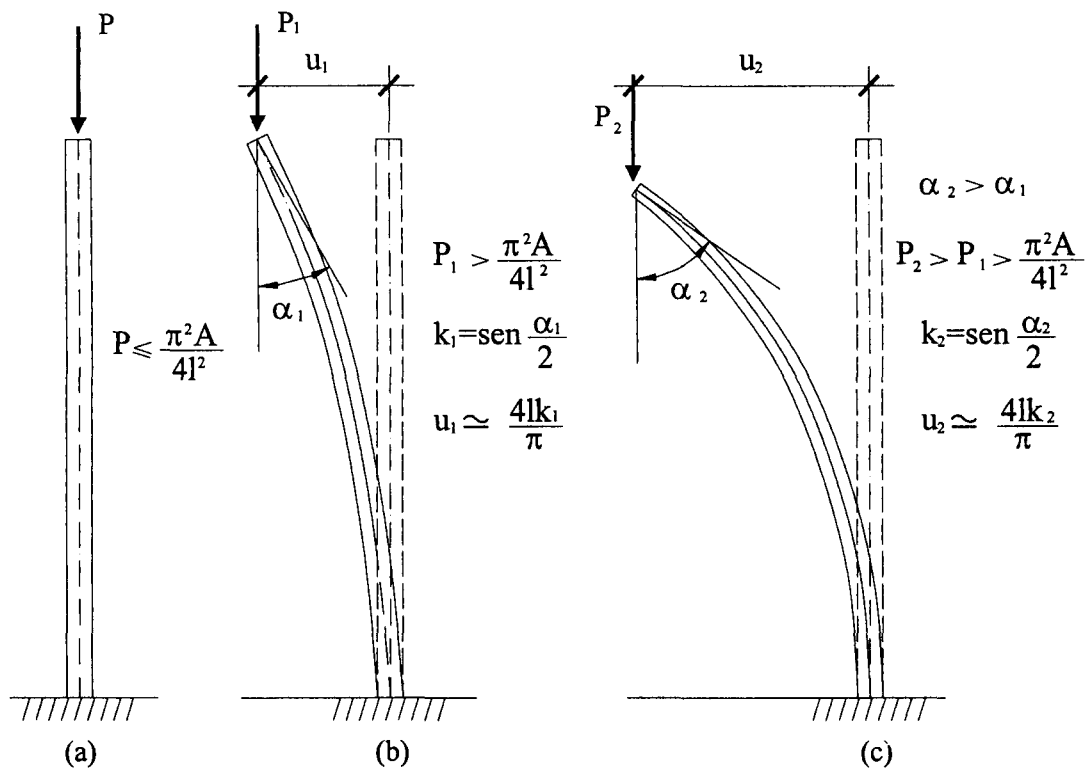


Figura 2.2.3

Resumiendo se tiene que para valores de la carga inferiores a P_{cr} hay una posición de equilibrio que es la del pilar sin pandear, como se indica en (a). Puede demostrarse que dicha posición es de equilibrio estable [Zei87]. Cuando la carga es ligeramente superior

a la crítica hay dos posiciones de equilibrio: la vertical que es inestable y la curvada o pandeada como se indica en (b), que es estable. Esta última al aumentar la carga tiene un aumento correlativo de la flecha tal y como se indica en (c).

Este caso que se ha podido resolver por métodos de integración elemental, con resultados expresados mediante integrales elípticas, constituye realmente una excepción pues la mayoría de los problemas no lineales requieren necesariamente la utilización de métodos numéricos para determinar sus soluciones de manera aproximada. Como ya se ha comentado hay multitud de trabajos que se refieren a este problema por distintos motivos. Los de orientación más ingenieril para indicar que realmente al llegar a la carga crítica hay una posición deformada que no es de equilibrio indiferente como se deduce del modelo linealizado (véase [TiG61] o [PiW94]). Por otra parte los de orientación más matemática como [Zei87], [Sta71], [Sta79] y [Ngu00] lo emplean para introducir multitud de conceptos en el desarrollo de la teoría de análisis no lineal de problemas continuos relacionados con la teoría de estabilidad y bifurcación.

2.3 INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA OBJETO DE ESTA INVESTIGACIÓN

El objetivo de este apartado es introducir el problema que se va a estudiar en este trabajo el cual consiste en el análisis del pandeo de pilares en régimen no lineal donde la no linealidad del problema se debe al comportamiento del material. En apartados posteriores se desarrollan los conceptos y elementos necesarios para la determinación de la denominada superficie mecánica que sintetiza las propiedades del material mediante una relación momento-curvatura. Dicha relación es de la forma

$$M = g(x, P, \chi(u))$$

En la relación anterior para cada carga P y cada sección x de la pieza el momento que se desarrolla es función de la curvatura $\chi(u)$, siendo dicha dependencia de la forma que se indica en la figura 2.3.1

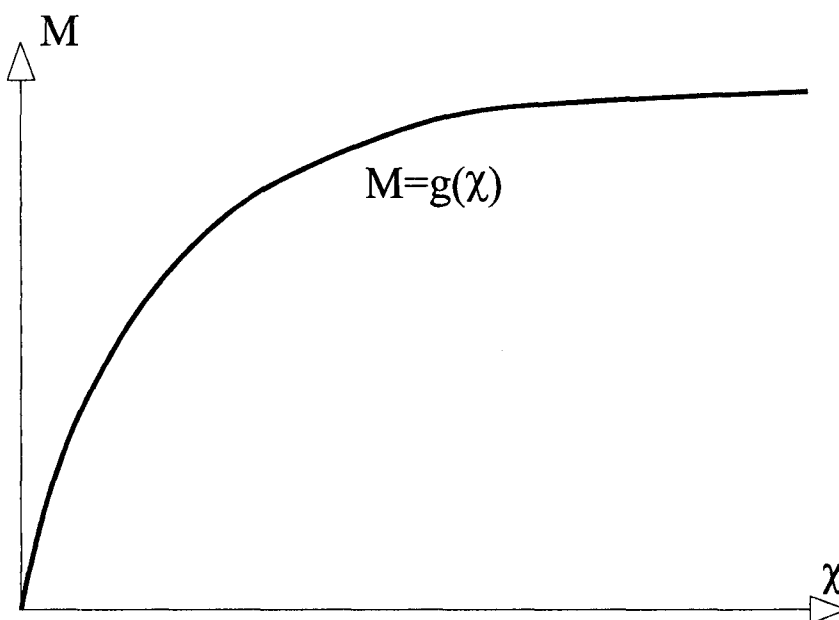


Figura 2.3.1

Es decir la función es creciente con derivada, en los puntos donde esté definida, decreciente.

La inclusión de la variable x se debe a la posibilidad de variar a lo largo de la directriz de la pieza, las características de la sección: dimensiones, cambio de material, cuantía de armaduras en piezas de hormigón, etc. Todos estos aspectos se desarrollan y comentan con detalle en los apartados siguientes, por lo que en este únicamente se hará referencia a determinadas cuestiones relacionadas con la forma de las gráficas de dichas funciones y sobre las modificaciones de las mismas al variar la carga P .

La relación anterior es la ecuación constitutiva que se tendrá en cuenta una vez deducida la ecuación de equilibrio tal y como se desarrolla a continuación para la pieza que se

considera en este estudio que es la viga-columna. Supongamos una pieza recta inextensible con una distribución transversal de carga $F(s)$ actuando de manera perpendicular a la directriz de la pieza sin deformar y que se mantiene perpendicular a la directriz inicial después de la deformación. Planteamos el equilibrio en la posición deformada, tal y como se indica en la figura 2.3.2, donde el axil P es constante y el cortante modificado o pseudocortante V (el que actúa perpendicularmente a la directriz inicial) y el momento flector M dependen de la longitud de arco s .

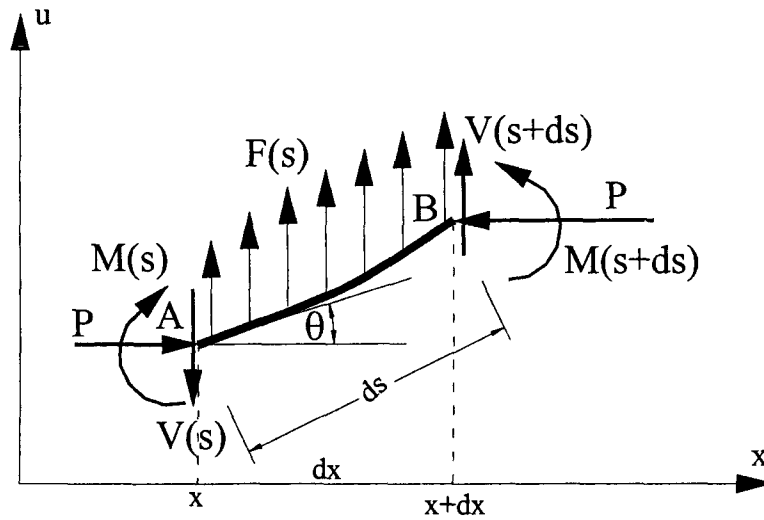


Figura 2.3.2

El equilibrio de fuerzas verticales conduce a la expresión

$$V(s + ds) - V(s) + F(s) ds = 0$$

es decir a la relación

$$-\frac{dV}{ds} = F(s)$$

Por otra parte del equilibrio de momentos (tomando momentos respecto del punto A)

$$M(s + ds) - M(s) + V(s + ds) ds \cos \theta + P ds \sin \theta = 0$$

donde se ha prescindido del momento producido por la carga $F(s)$, el cual es $F(s) \cos \theta (ds)^2 / 2$ y por tanto es un infinitésimo de orden superior respecto de ds .

De la ecuación de equilibrio de momentos se deduce

$$\frac{dM}{ds} + V(s) \cos \theta + P \sin \theta = 0$$

Eliminamos ahora el esfuerzo V entre las dos ecuaciones de equilibrio anteriores teniendo en cuenta que de la última ecuación se deduce que

$$V(s) = -(P \operatorname{tg} \theta + \frac{1}{\cos \theta} \frac{dM}{ds})$$

Derivando ahora la ecuación anterior respecto de la variable s se tiene la ecuación siguiente

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{dM}{ds} \right) + P \frac{d}{ds} (\operatorname{tg} \theta) = F(s) \quad (2.3.1)$$

Teniendo en cuenta que la relación constitutiva puede ponerse también como

$$M = g(s, P, d\theta/ds)$$

resulta la ecuación diferencial en la variable θ (giro) siguiente

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{d}{ds} \left[g(s, P, \frac{d\theta}{ds}) \right] \right) + P \frac{d}{ds} (\operatorname{tg} \theta) = F(s) \quad (2.3.2)$$

Obsérvese que la ecuación (2.3.2) permite teóricamente una vez consideradas las correspondientes condiciones auxiliares resolver el problema de pandeo para la elástica con no linealidad geométrica y no linealidad del material, de manera análoga a como se ha procedido en el clásico problema de no linealidad geométrica del apartado anterior.

La ecuación (2.3.1) también puede ponerse en términos del desplazamiento u y de la variable x teniendo en cuenta las relaciones

$$\begin{aligned} du &= ds \operatorname{sen} \theta, \quad dx = ds \cos \theta, \quad \frac{du}{dx} = \operatorname{tg} \theta \\ \frac{d(\cdot)}{ds} &= \frac{d(\cdot)}{dx} \frac{dx}{ds} = \cos \theta \frac{d(\cdot)}{dx} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Así (2.3.1) es también la expresión mixta

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dM}{dx} \right) + P \frac{d}{ds} \left(\frac{du}{dx} \right) = F(s)$$

y de la relación entre derivadas dada en (2.3.3) se obtiene

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + P \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{F(s)}{\cos \theta} \quad (2.3.4)$$

Es importante indicar que el dato de la acción repartida $F(s)$ dependiendo de la deformada u , se modifica, dando lugar a una acción repartida en la dirección del eje x (dirección de la pieza antes de la deformación). La relación entre $F(s)$ y $f(x)$ viene dada por $F(s)ds = f(x)dx$ luego

$$f(x) = \frac{F(s)}{\cos \theta}$$

Como puede verse la acción distribuida o repartida $f(x)$ depende de la solución $\theta(s)$ que se tenga en cada caso, es decir la correspondiente una vez fijadas las condiciones auxiliares en la ecuación diferencial (2.3.2)

De este modo (2.3.4) se transforma en la ecuación clásica

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + P \frac{d^2 u}{dx^2} = f(x)$$

dada por gran número de autores (véanse [ChA76,p.59] y [PiW94,p.623] entre otros) empleando otras vías de deducción diferentes a la aquí seguida donde hasta el momento no se han empleado hipótesis simplificadoras.

Considerando la ecuación constitutiva en la forma $M = g(x, P, u''/(1+u'^2)^{3/2})$ resulta la ecuación diferencial

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(g(x, P, \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}}) \right) + Pu'' = f(x) \quad (2.3.5)$$

Una simplificación notable del problema resulta al tomar en la ecuación anterior la función f igual al dato F , es decir se considera que la acción repartida no se modifica al deformarse la pieza. Esta simplificación va unida además a tomar como dominio para la variable x la longitud de la pieza l y no la proyección de la pieza deformada sobre la dirección del eje x . Esto hace que en realidad no se considere la pieza como inextensible.

En este trabajo se tendrá en cuenta que la acción $f(x)$ dato en cada elemento viene definida por cargas repartidas, puntuales y momentos. Además en los nodos de separación de los distintos elementos actúan también cargas puntuales y momentos.

A pesar de las hipótesis simplificadoras introducidas respecto al dominio y sobre la acción f , la ecuación diferencial es de cuarto orden no lineal, donde la no linealidad se debe por un lado a la no linealidad geométrica, resultado de considerar el valor exacto de la curvatura y por otro lado a la no linealidad del material dada por la relación momento-curvatura. Otra simplificación importante que se considerará también en este trabajo es la de aproximar la curvatura por la derivada segunda del desplazamiento, quedando entonces la ecuación en la forma

$$[g(x, P, u'')]'' + Pu'' = f(x)$$

Esta última es también no lineal debido únicamente al comportamiento del material. La simplificación anterior conduce a que la validez de los resultados sea más limitada cuando los desplazamientos y la curvatura de los distintos puntos de la deformada no sean pequeños. Por tanto, el modelo no será aplicable en el caso de grandes flechas.

Para la ecuación anterior se define un problema de contorno de n puntos $x_i, i = 1, \dots, n$ en el dominio formado por la unión de los elementos $[x_i, x_{i+1}], i = 1, \dots, n - 1$. Desde un punto de vista clásico la ecuación diferencial tendrá como dominio la unión de los intervalos abiertos correspondientes. Consideraremos que el axil P y la función $g(x, P, u'')$ no varían en cada intervalo. En realidad P en las aplicaciones será considerado como parámetro. Para cada sección y cada valor de P se tiene un diagrama diferente momento-curvatura, el cual resulta al seccionar como se verá la superficie mecánica por planos ortogonales al eje que representa la variable P . Esta variación del diagrama se debería tener en cuenta para el cálculo de la carga que produce la inestabilidad. No obstante en este trabajo, considerando que dicha variación en la mayoría de los casos es suave, no se tiene en cuenta. Por otra parte habrá otras situaciones donde manteniendo el valor de P y por tanto el diagrama momento-curvatura se alcanzará la inestabilidad al variar alguna de las restantes acciones sobre el pilar.

De manera muy esquemática se indica que las condiciones de contorno para el problema son las esenciales de Hermite-Birkoff consistentes en fijar en algunos nodos los valores del desplazamiento y/o de la derivada del desplazamiento, y las naturales que resultan asimismo al fijar en los nodos, de forma complementaria, los valores de cargas puntuales y momentos. Definiciones más precisas se dan en el capítulo siguiente para el caso de problemas lineales y en el capítulo cuarto para este problema no lineal.

Es interesante observar que las condiciones esenciales impuestas deben garantizar la existencia y unicidad de solución del correspondiente problema lineal para el que hay proporcionalidad en la relación momento curvatura. Sin embargo se verá en este trabajo que dichas condiciones no garantizan la unicidad de solución para determinados rangos de valores de P . Ello se debe a que por la propia naturaleza del problema la no linealidad hará que se pueda encontrar más de una deformada que satisface la ecuación diferencial y verifica las condiciones de contorno tanto esenciales como naturales. Se verá que hay soluciones unas estables y otras inestables.

Problemas no lineales como el de no linealidad geométrica del apartado anterior o como el introducido en éste, pueden ser enmarcados desde un punto de vista formal dentro del extenso campo de la teoría no lineal de la elasticidad o de los problemas de bifurcación del equilibrio. Referencias de interés en este campo que tienen un planteamiento bien fundamentado de los problemas, son la clásica obra de Love [Lov44] y la más reciente de Villaggio [Vil97], ambas muy orientadas al estudio de problemas unidimensionales. También pueden citarse [Ogd84], [Lur91], [MaH94] y [Ngu00] dedicadas al estudio de problemas no lineales de elasticidad y mecánica de medios continuos que tratan también problemas de bifurcación con un enfoque bien formalizado.

Desde un punto de vista más abstracto, es decir con orientación fundamentalmente matemática, la literatura sobre bifurcación en el contexto de los problemas no lineales es muy extensa. Algunas referencias que pueden citarse son entre otras los textos:

[KeA69], [Sat73], [Nir74], [Ber74] y [IoJ80] y los artículos: [Sta71] y [Kel77]. Gran parte del material del primer artículo fue recogido por su autor en el capítulo sobre problemas no lineales del libro sobre la función de Green y problemas de contorno [Sta79] el cual desde nuestro punto de vista constituye una excelente introducción al análisis de estos problemas.

Desde dicho enfoque abstracto el objetivo del análisis de estos problemas no lineales es estudiar ecuaciones del tipo

$$\Psi(\lambda, u) = 0$$

donde u es la incógnita, la cual es habitualmente una función y λ un parámetro. La resolución de la misma equivale a determinar la dependencia $u(\lambda)$. Quedan incluidos por ejemplo como casos particulares del problema abstracto anterior el problema de pandeo con no linealidad geométrica y también el de no linealidad del material objeto de esta investigación, donde el parámetro es la carga es decir $\lambda = P$ y la incógnita u la deformada.

Es interesante señalar que a veces la naturaleza del parámetro es totalmente artificial por ejemplo esto sucede en los problemas de homotopía también denominados de continuación. Para ver esto considérese una ecuación de incógnita u de la forma $f(u) = 0$ donde f es una aplicación de un espacio U en otro V . Este problema es muy general y puede incluir por tanto la resolución de ecuaciones algebraicas, problemas de contorno, etc. Sea ahora $h(u) = 0$ un problema similar al anterior pero de naturaleza más sencilla y de fácil resolución, supóngase por ejemplo que el problema correspondiente a f es no lineal y de difícil resolución, entonces la idea de la homotopía es incluir el problema dentro de una familia de problemas que dependa del parámetro λ en la forma

$$\Psi(\lambda, u) = \lambda f(u) + (1 - \lambda)h(u)$$

con $\lambda \in [0, 1]$ donde para $\lambda = 0$ se tenga un problema sencillo de resolver y para $\lambda = 1$ el problema original. Se ha establecido una homotopía o transformación continua:

$$\Psi : [0, 1] \times U \rightarrow V$$

donde $\Psi(0, u) = h(u)$ y $\Psi(1, u) = f(u)$. En definitiva se pretende determinar, desde este enfoque, $u(\lambda)$ suponiendo que se conoce o es sencillo de calcular $u(0)$. Hay además una técnica muy directa que permite obtener las soluciones de forma aproximada transformando el problema en uno de valor inicial (véase [Sta71], [Sta73], [Sta79] y [OrR70]) lo que es también aplicable al problema original que no es de homotopía. En efecto suponiendo suficiente regularidad a las funciones Ψ y u y derivando respecto del parámetro λ resulta la ecuación diferencial de primer orden en la variable λ

$$u'(\lambda) = \Phi(\lambda, u)$$

con

$$\Phi(\lambda, u) = - \left[\frac{\partial \Psi(\lambda, u)}{\partial u} \right]^{-1} \frac{\partial \Psi(\lambda, u)}{\partial \lambda}$$

donde se supone conocido o sencillo de calcular el valor inicial $u(\lambda_0)$.

En el capítulo cuarto de este trabajo se aplicará la idea de homotopía pero no con este planteamiento combinando la técnica de valor inicial con la de elementos finitos en la resolución del problema, sino utilizando un resultado de equivalencia entre el problema original no lineal y un problema lineal que se aborda mediante elementos finitos con splines generalizados.

2.4 ECUACIONES CONSTITUTIVAS Y SUPERFICIE MECÁNICA.

El concepto de superficie mecánica es un elemento clave para la formulación del problema (1.1.1) al mismo tiempo que posibilita el desarrollo de métodos numéricos para la obtención de soluciones aproximadas.

En este apartado se describe desde un punto de vista teórico una forma de construcción de la superficie mecánica a partir de las relaciones tensión-deformación de los materiales que componen la sección de forma que partiendo de la hipótesis de Bernoulli-Euler se establece para cada carga axial P una relación entre la curvatura y la distribución de tensiones en la sección y finalmente entre el momento resultante y la curvatura. Dicha relación representa la capacidad de respuesta frente a acciones exteriores de flexo-compresión.

A parte de este enfoque la superficie mecánica se puede determinar por vías empíricas o experimentales que por otra parte permiten el ajuste entre los modelos teóricos y el comportamiento real de una sección.

La superficie mecánica, junto a las características resistentes de la sección, puede recoger otros aspectos del comportamiento de los materiales de gran interés desde el punto de vista estructural como pueden ser fenómenos reológicos y viscoelásticos o viscoplásticos. En particular en el caso de secciones de hormigón armado la superficie mecánica modeliza de forma sencilla la aparición de fisuras y la rigidización de las secciones entre fisuras (tension-stiffening) así como el efecto de la fluencia o la retracción a lo largo del tiempo.

2.4.1 Ecuaciones constitutivas

El comportamiento de los materiales se define a partir de la relación constitutiva tensión-deformación de forma que junto a las condiciones cinemáticas de deformación y las ecuaciones de equilibrio la formulación del problema elástico se completa con las ecuaciones constitutivas que relacionan el estado de tensiones y deformaciones.

La ley de Hooke de proporcionalidad entre tensiones y deformaciones enunciada en (Hoo78) como una propiedad de los materiales se puede considerar la primera relación constitutiva aplicable al campo de la elasticidad lineal. Sin embargo, las relaciones de proporcionalidad que establece la teoría lineal de la elasticidad son válidas hasta ciertos niveles de deformación para los materiales habitualmente utilizados en cuyo rango de deformación las fuerzas internas son conservativas recuperando el estado inicial cuando las fuerzas exteriores desaparecen. Fuera del rango elástico las fuerzas exteriores desarrollan un trabajo que se consume en transformar la estructura de los materiales haciendo desaparecer las fuerzas conservativas dando lugar al consumo de energía y a la aparición de deformaciones no reversibles. Es necesario extender las relaciones constitutivas a estados plásticos y a materiales cuyo comportamiento no es Hookeano en su origen.

Los primeros trabajos que tratan de describir un material de forma diferente a como lo hace la teoría lineal procede de Bulffinger [Bul29]. Sin embargo el establecimiento de las bases teóricas para el desarrollo de los principios de las relaciones constitutivas

tienen lugar cuando las relaciones básicas de la elasticidad se plantean a partir de un funcional de energía interna del material en el que está impreso el comportamiento del material.

Considerando materiales elásticos reversibles en los que existe algún tipo de relación entre el estado de tensiones del material y el de deformaciones, la energía almacenada en un elemento diferencial del volumen considerando un funcional de energía dependiente de las deformaciones, sería [Nov53]:

$$dE = \mathfrak{I}(\varepsilon_{ij})dV \quad (2.4.19)$$

El tensor de deformaciones (ε_{ij}) viene definido por seis valores independientes. Si se utilizan las tres deformaciones principales del tensor (ε_i) y el material es isótropo:

$$dE = \mathfrak{I}(\varepsilon_i)dV \quad i = 1..3$$

El funcional de energía depende de tres variables independientes. De forma alternativa a la anterior se utilizan los invariantes del tensor de tensiones (a_i) que se obtienen a partir de la ecuación característica. De forma que:

$$E = \int_V \mathfrak{I}(a_i)dV \quad i = 1..3 \quad (2.4.20)$$

Como hace Novozhilov [Nov53], a partir de la expresión anterior y utilizando el Principio de los Trabajos Virtuales se pueden obtener las condiciones de equilibrio en un punto, incluso en condiciones de linealidad geométrica deduciéndose de las mismas las expresiones genéricas de las tensiones en el punto.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_2} + \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_1}(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_o} \left(\varepsilon_{yy} \cdot \varepsilon_{zz} - \frac{1}{4} \varepsilon_{yz}^2 \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_2} + \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_1}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) + \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_o} \left(\varepsilon_{xx} \cdot \varepsilon_{zz} - \frac{1}{4} \varepsilon_{xz}^2 \right) \\ \sigma_{zz} &= \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_2} + \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_1}(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}) + \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_o} \left(\varepsilon_{yy} \cdot \varepsilon_{xx} - \frac{1}{4} \varepsilon_{yx}^2 \right) \\ \sigma_{xy} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_1} \varepsilon_{xy} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_o} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{xz} \cdot \varepsilon_{yz} - \frac{1}{4} \varepsilon_{zz} \cdot \varepsilon_{xy} \right) \\ \sigma_{xz} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_1} \varepsilon_{xz} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_o} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{yz} - \frac{1}{4} \varepsilon_{yy} \cdot \varepsilon_{xz} \right) \\ \sigma_{yx} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_1} \varepsilon_{yz} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_o} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{xz} - \frac{1}{4} \varepsilon_{zz} \cdot \varepsilon_{yz} \right) \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

Estas relaciones ponen de relieve que la relación tensión deformación depende de tres variables independientes

$$\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_2}, \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_1}, \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_0}$$

que deben ser determinadas experimentalmente.

En el caso de que:

$$\mathfrak{I}(a_2, a_1, a_0) = A_1 a_2^2 + A_2 a_1 \quad (2.4.22)$$

con

$$A_2 = \frac{E}{1 + \mu} \quad 2A_1 + A_2 = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}$$

Se obtienen las relaciones ya conocidas de las ecuaciones de la elasticidad.

Si por otra parte se consideran las relaciones de los invariantes del tensor de tensiones:

$$c_2 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$c_2^2 - 3c_1 = \frac{1}{2} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{yz}^2)] \quad (2.4.23)$$

Sustituyendo los valores de las tensiones en las expresiones anteriores se tienen las relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} c_2 &= \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_2} + \frac{2}{3} a_2 \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_1} + \frac{1}{3} a_1 \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_0} \\ c_2^2 - 3c_1 &= \left(\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_1} \right)^2 (a_2^2 - 3a_1) + \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_1} \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_0} (a_2 a_1 - 9a_0) + \left(\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_0} \right)^2 (a_1^2 - 3a_2 a_0) \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

La experimentación demuestra que la primera ecuación se mantiene al pasar de un estado elástico a una fase plástica por lo que teniendo en cuenta que:

$$\frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{1}{3} \frac{E}{1 - 2\mu} a_2$$

resulta :

$$\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_2} + \frac{2}{3} a_2 \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_1} + \frac{1}{3} a_1 \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_0} = \frac{1}{3} \frac{E}{1 - 2\mu} a_2 \quad (2.4.25)$$

Por otra parte la experimentación demuestra que:

$$c_2^2 - 3c_1 \approx a_2^2 - 3a_1 \quad (2.4.26)$$

por lo que de la segunda ecuación debe resultar:

$$\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_0} = 0$$

$$\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_1} = -\Psi(T(a_2^2 - 3a_1))$$
(2.4.27)

Si se toman los invariantes:

$$S = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{c_2^2 - 3c_1}$$

$$T = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{a_2^2 - 3a_1}$$

se tiene:

$$\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial a_2} - \frac{2}{3} a_2 \Psi(T) = \frac{E}{3(1-2\mu)} a_2$$

$$S = T \Psi(T)$$
(2.4.28)

S se denomina Intensidad de tensiones tangenciales y T intensidad de deformaciones de cortante.

Sustituyendo las derivadas del funcional \mathfrak{I} deducidas de los desarrollos anteriores en las expresiones de las tensiones se llega a:

$$\left(\sigma_{xx} - \frac{1}{3} c_2 \right) = \Psi(T) \left(\varepsilon_{xx} - \frac{1}{3} a_2 \right)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \frac{1}{2} \Psi(T) \varepsilon_{xy}$$

$$\left(\sigma_{yy} - \frac{1}{3} c_2 \right) = \Psi(T) \left(\varepsilon_{yy} - \frac{1}{3} a_2 \right)$$
(2.4.29.a)

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \frac{1}{2} \Psi(T) \varepsilon_{xz}$$

$$\left(\sigma_{zz} - \frac{1}{3} c_2 \right) = \Psi(T) \left(\varepsilon_{zz} - \frac{1}{3} a_2 \right)$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \frac{1}{2} \Psi(T) \varepsilon_{yz}$$
(2.4.29.b)

Que son las relaciones propuestas por Hencky para materiales elasto-plásticos. Deducidas de acuerdo con lo anterior mediante una teoría elástica por lo que el comportamiento elastoplastico en tanto no haya reversibilidad de tensiones es decir se sigue un proceso monótono de carga, se puede asimilar a un comportamiento elástico desde el punto de vista teórico. En el mismo sentido Kachanov demostró que el comportamiento de un material elasto-plástico no se puede distinguir de uno elástico con el mismo diagrama tensión deformación.

Desde un punto de vista general, se podría establecer una expresión de \mathfrak{I} como desarrollo en serie de potencias de los invariantes (a_i). Teniendo en cuenta que para deformaciones nulas las tensiones también deben serlo, el desarrollo parte de términos de segundo grado y como además para deformaciones pequeñas la energía también debe ser pequeña no pueden considerarse potencia negativas por lo que la expresión es de la forma:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(a_2, a_1, a_0) = & A_1 a_2^2 + A_2 a_1 \\ & + B_1 a_2^3 + B_2 a_2 a_1 + B_3 a_0 \\ & + C_1 a_2^4 + C_2 a_2^2 a_1 + C_3 a_2 a_0 + C_4 a_1^2 + \dots\end{aligned}$$

En particular Voigt [Voi93] y Murnaghan [Mur37] proponen un desarrollo de la forma:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(a_2, a_1, a_0) = & A_1 a_2^2 + A_2 a_1 \\ & + B_1 a_2^3 + B_2 a_2 a_1 + B_3 a_0\end{aligned}\quad (2.4.30)$$

con cinco variables independientes A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 . A partir de las cuales por la aplicación de las relaciones anteriores de tensiones se tienen más completas que las de la teoría lineal que permiten obtener curvas de tensión deformación del tipo:

$$\sigma = S(\varepsilon)$$

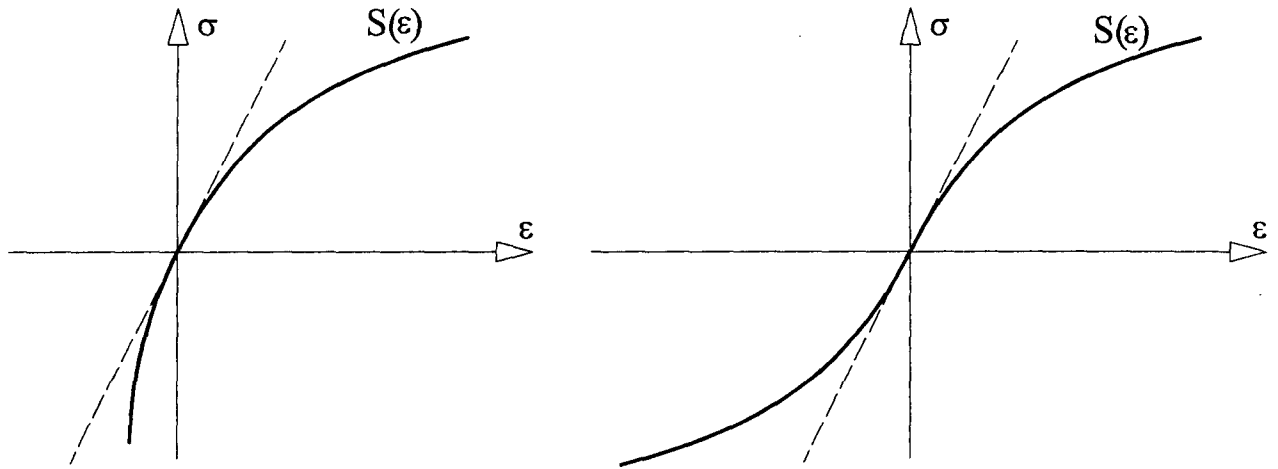


Figura 2.4.3

2.4.2 Relaciones momento curvatura

Si se tiene en cuenta que el axil es constante en toda la pieza, se tienen las relaciones:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{d\hat{u}}{dx} \quad \sigma = S(\varepsilon) \quad \sigma = \frac{P}{\Omega} \quad (2.4.1)$$

P = axil.

Ω = área de la sección

σ uniforme en la sección y ε_{xx} constante en toda la pieza.

\hat{u} =desplazamiento de la directriz de la pieza.

Se tiene:

$$\hat{\varepsilon}_{xx} = S^{-1} \left(\frac{P}{\Omega} \right) \quad (2.4.2)$$

y por tanto $\hat{u} = \varepsilon_{xx} x + k$ donde k es una constante que depende de las condiciones de contorno. Por ejemplo si $\hat{u} = 0$ en $x = 0$, $k = 0$ y $\hat{u} = \varepsilon_{xx} x$.

\hat{u} se puede considerar como una deformación generalizada y P su tensión generalizada. De forma que:

$$P = S \left(\frac{\hat{u} - k}{x} \right) \Omega \quad (2.4.4)$$

Seria la relación constitutiva generalizada de \hat{u} - P .

De acuerdo con lo anterior dada P y una sección, se tiene el punto $(\varepsilon_{xx}, \sigma)$.

$$\bar{\sigma} = S(\varepsilon) - \sigma = S(\varepsilon_{xx} + \bar{\varepsilon}) - \sigma = \hat{S}(\bar{\varepsilon}) - \sigma = \bar{S}(\bar{\varepsilon}) = \tilde{S}(y\chi) \quad (2.4.5)$$

$\bar{S}(\bar{\varepsilon})$ representa un cambio de ejes al punto $(\varepsilon_{xx}, \sigma)$ y $\tilde{S}(y\chi)$ un cambio de escala $(1/\chi)$ en $\bar{\varepsilon}$.

De acuerdo con la figura 2.4.1 en el punto $(\varepsilon_{xx}, \sigma)$ para cada curvatura (χ) se tiene una distribución de tensiones $\bar{\sigma}$. La resultante de dicha distribución de tensiones es nula lo que permite fijar (y_0) .

$$\int_{y_0-h}^{y_0} \bar{\sigma} b(y) dy = 0$$

$$\int_{y_0-h}^{y_0} \tilde{S}(y\chi) b(y) dy = 0$$

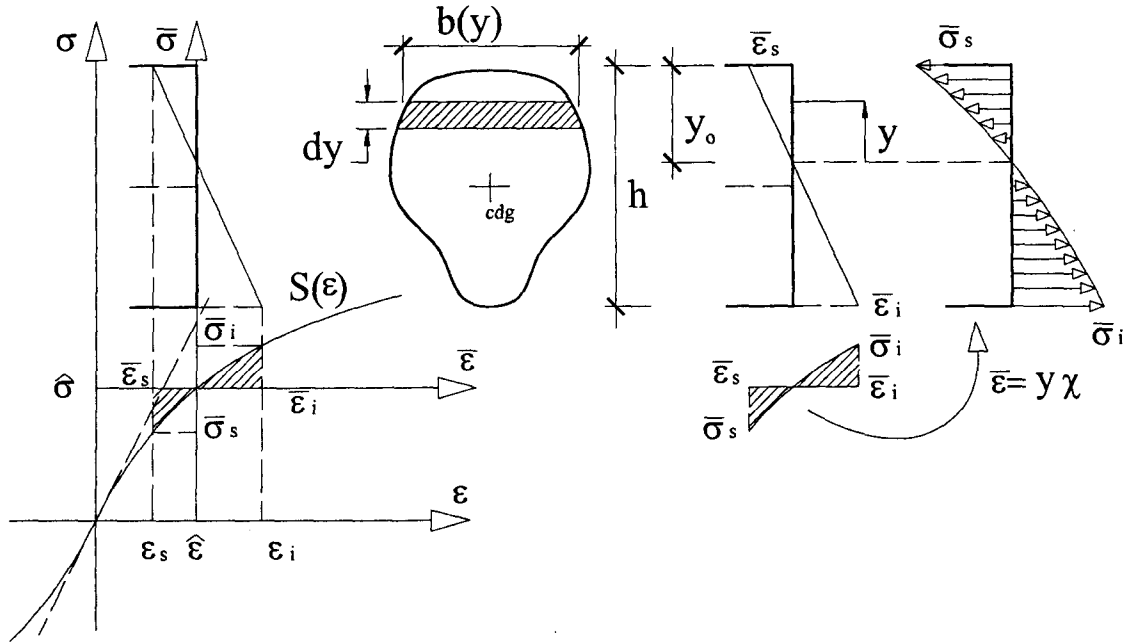


Figura 2.4.1

Una vez determinado y_0 el momento que actúa en la sección será por tanto:

$$M(\chi) = \int_{y_0-h}^{y_0} \tilde{S}(y\chi) b(y) y dy = 0 \quad (2.4.6)$$

$M(\chi)$ resultante de las tensiones que resultan de la deformación ($\varepsilon = -y\chi$) de la sección. Dada la relación entre χ y θ , igual que antes para el axil, se puede considerar a θ como una deformación generalizada y M su tensión generalizada asociada. De forma que para P dado la relación constitutiva vendría dada por la integral anterior, se puede poner la relación:

$$M = g(\chi) \quad (2.4.7)$$

Propiedades:

1) En realidad $M(\chi)$ depende también de P ya que la aplicación de la fórmula anterior para distintos valores de χ se hace con los ejes (ε, σ) en el punto (ε_x, σ) que depende de P . Por tanto se define la superficie mecánica como la relación:

$$M = M(P, \chi) \quad (2.4.8)$$

2) La derivada respecto a la curvatura tiene carácter de rigidez pudiéndose considerar el módulo tangente de rigidez a flexión de acuerdo con el planteamiento de Engesser.

$$K(\chi, P) = \frac{\partial M(P, \chi)}{\partial \chi}$$

$$\Delta M = K(P, \chi) \Delta \chi$$

En particular cuando $\chi=0$:

$$K(P, 0) = E_t I \quad (2.4.9)$$

Et es el módulo de Young tangente en el punto $(\varepsilon_{xx}, \sigma)$.

I es el momento de inercia de la sección.

3) La forma de la superficie mecánica pone de manifiesto una tendencia análoga a la seguida por la relación-tensión deformación con un crecimiento del momento y un decrecimiento de la pendiente de $M(\chi)$.

La relación momento curvatura como se ha visto se obtiene a partir de la ecuación constitutiva de los materiales tensión deformación de forma que en el caso de que en la relación tensión-deformación aparezcan puntos en los que existan cambios bruscos de comportamiento (por ejemplo el paso de una fase elástica a otra plástica) aparecerá un cambio de tendencia en la propia relación $M-\chi$. Por otra parte cuando la sección esta compuesta de varios materiales con distintas relaciones constitutivas el comportamiento general de la sección recogerá la evolución del comportamiento de los distintos materiales en la relación $M-\chi$ apareciendo esta relación como una propiedad de la sección. Esto último se pone de manifiesto de forma especial en el caso de secciones de hormigón en la que la fisuración del hormigón, el momento de plastificación de los distintos materiales, la relación no lineal del hormigón caracterizan las curvas $M-\chi$ de este material distintas a las de materiales homogéneos como el acero.

En general dado un axil, se suelen distinguir tres fases: una elástica en la que los materiales de la sección mantienen su estructura, una segunda fase en la que debido a la compresión del axil existen fibras extremas fuertemente comprimidas en las que aparece la plastificación. Cuando la curvatura (momento aumenta) pueden aparecer plastificaciones en la cara opuesta por tracción lo que supone entrar en una fase de debilitamiento de la sección. Estas situaciones se recogen en la figura 2.4.2 en la que se representan con carácter general unas curvas $M-\chi$ para secciones metálicas y del hormigón.

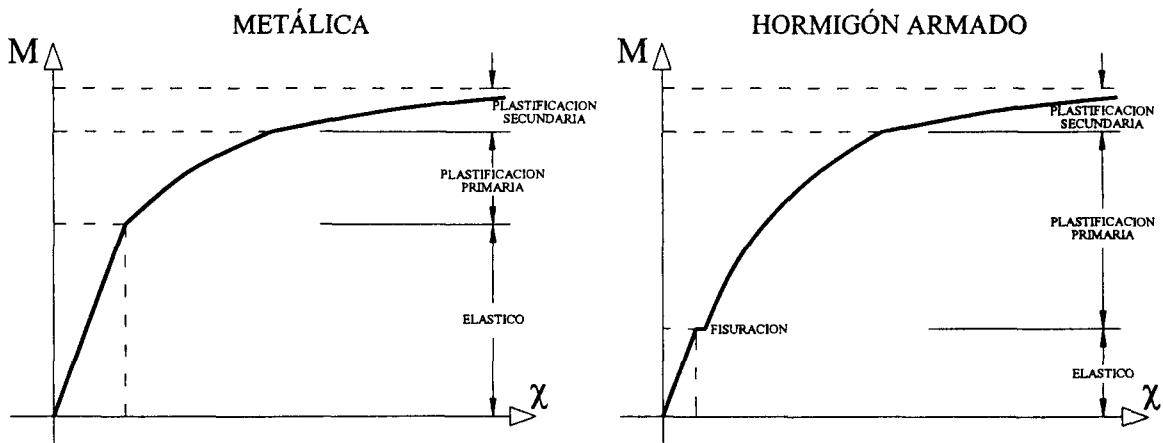


Figura 2.4.2

2.5 ESTABILIDAD Y BIFURCACION.

El estudio de fenómenos gobernados por sistemas de ecuaciones no lineales como algunos de los indicados en el apartado 2.1.2 ponen de relieve una serie de aspectos como: la estabilidad de la solución, la existencia de puntos críticos y en particular los puntos de bifurcación en los que puede producirse un cambio brusco de la solución del sistema.

Estas cuestiones también se plantean en el análisis de piezas cargadas axialmente que son objeto de análisis del presente trabajo, de hecho el término de pandeo desde un punto de vista práctico trata de recoger los fenómenos de estabilidad y bifurcación sin una clara distinción entre los mismos cuando se manifiesta físicamente el colapso de una pieza bajo carga axial. En este apartado se van a tratar de una forma resumida ambos conceptos para delimitar mejor la idea de pandeo. Posteriormente en el capítulo cuarto se hará una amplia introducción a dichos conceptos empleando modelos discretos.

2.5.1 Estabilidad

La definición y las propiedades de la estabilidad de los sistemas depende del área donde se pretendan aplicar. En el campo de la estabilidad de los medios elásticos, de una forma intuitiva Dirichlet definió el equilibrio de un sistema como estable si al desplazar los puntos del sistema desde la posición de equilibrio mediante un desplazamiento infinitesimal y dando una velocidad inicial pequeña el desplazamiento de los diferentes puntos del sistema permanecen en el transcurso del movimiento contenido dentro de unos límites pequeños. Desde un punto de vista estático representaría la capacidad de volver a su posición inicial cuando se perturba ligeramente su posición.

Como señala Felippa [Fep00] algunas de sus características son:

- La estabilidad es una solución de equilibrio del sistema.
- El problema de afirmar la estabilidad de la solución tiene que ver con el entorno de la posición de equilibrio y por tanto es una cualidad local.
- El problema de la estabilidad es esencialmente dinámico en su naturaleza.

Croll y Walker [CrW75] recogen los tres criterios básicos para el análisis de la estabilidad en los que se ponen de manifiesto las características anteriores: el estático, el dinámico y el energético.

Los criterios de estabilidad son necesarios adaptarlos a los distintos problemas así, dada la dificultad de encontrar criterios generales de estabilidad incluso para sistemas estáticos se recurre a planteamientos dinámicos que tienen su punto de partida en los criterios de Liapunov. Para evitar la aplicación de estos criterios a veces complejos se recurre a criterios cualitativos como los de Poincaré o al criterio de Lagrange-Dirichlet de tipo energético. Sin embargo se hace necesario ampliar los criterios para problemas no lineales (teorema de Poincaré-Liapunov -[BaC91]) así como a medios elástico y materiales elasto-plásticos (criterios de Koiter y Petryck [Bat02]).

Pero para un sistema conservativo los componentes dinámicos se pueden eliminar pudiéndose utilizar criterios estáticos.

Como es sabido para el caso de piezas rectas en teoría de pequeñas deformaciones, en estados homogéneos cuando el material es elástico, la carga de Euler representa un punto de bifurcación existiendo dos trayectorias una con $u=0$ (posición vertical) inestable cuando $P > P_{cr}$ y una trayectoria con $P(u) = P_{cr}$. En el caso de materiales no lineales con relaciones tensión deformación como en la figura 2.5.1 a figura 2.5.3 la carga crítica de pandeo, de acuerdo con la teoría de Engesser, vendría dada por el módulo tangente apareciendo una trayectoria descendente. En el caso no lineal existen dos soluciones de equilibrio del problema.

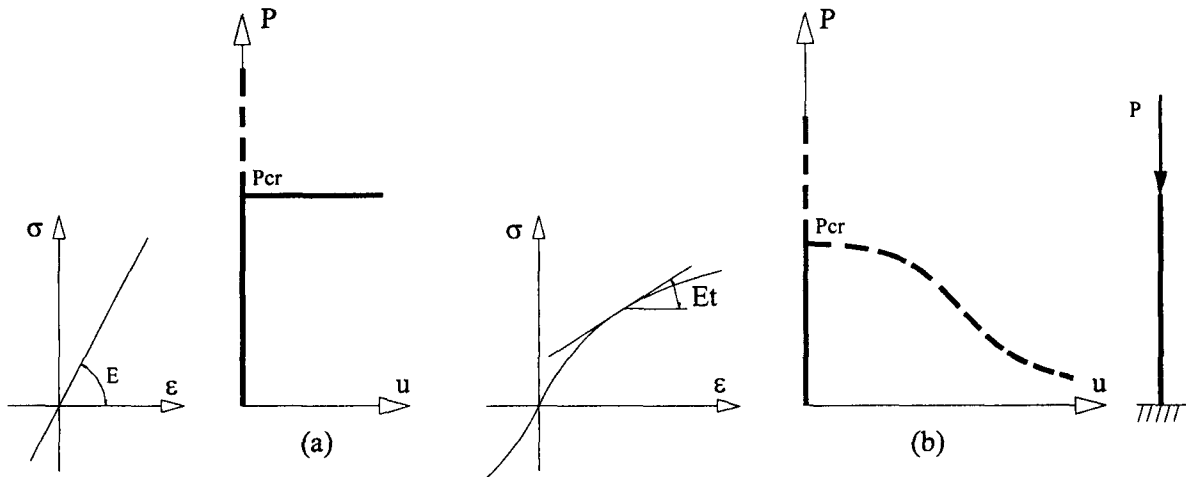


Figura 2.5.1

Fuera de la zona de pequeñas deformaciones se podría considerar la curvatura exacta. En este caso el problema lineal elástico con no linealidad geométrica (figura 2.5.2 a) es estable en el caso de no linealidad geométrica (figura 2.5.2 b) y del material podría existir una ligera zona de crecimiento para volver a descender cuando se pierda rigidez.

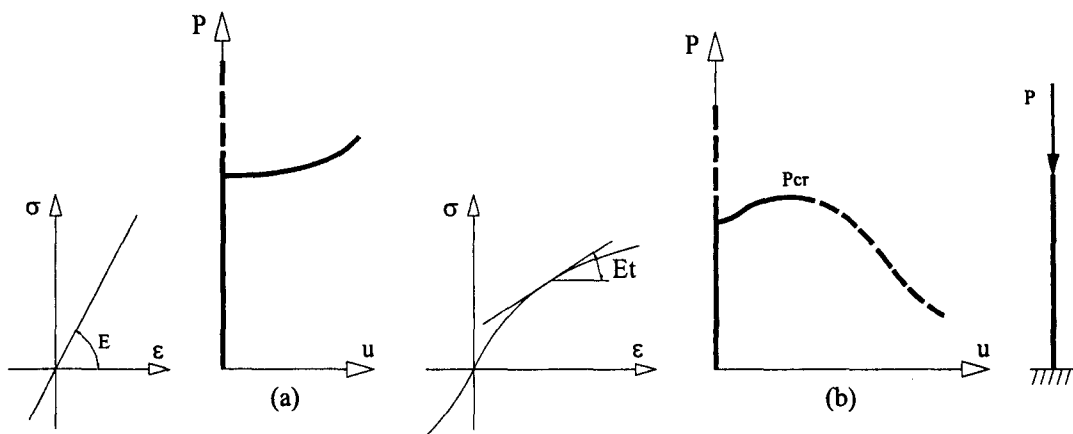


Figura 2.5.2

Para problemas no homogéneos, como es conocido, en el caso elástico la carga de pandeo de Euler es una cota superior a la que se aproxima asintóticamente produciéndose un incremento notable de desplazamientos cuando la carga del sistema se acerca a dicha carga crítica. En el caso de sistemas elásticos no lineales igual que en el caso homogéneo existe un máximo que separa la rama de carga de la de descarga.

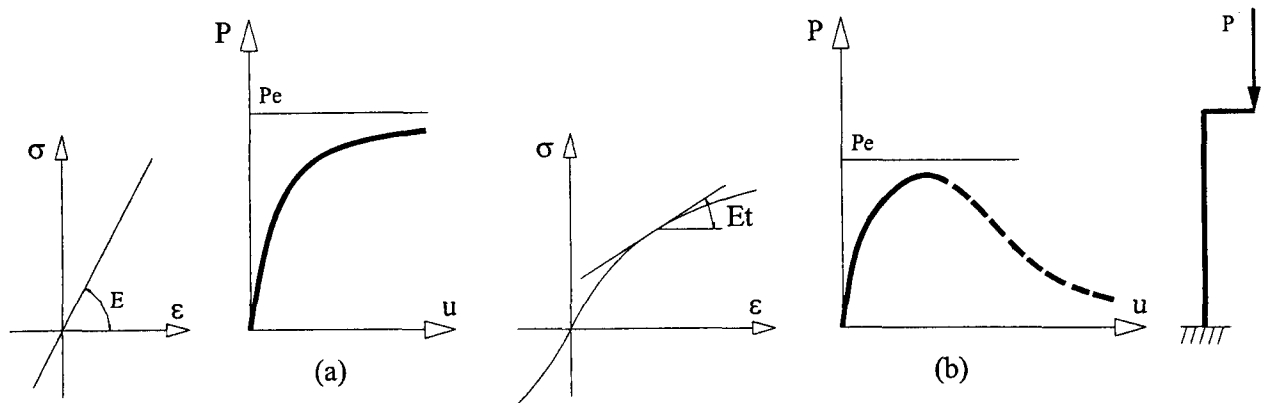


Figura 2.5.3

Criterios de estabilidad

Criterio estático.

El criterio estático se conoce también como Método de Euler. Otras denominaciones son método de energía o método de los estados adyacentes. Para aplicar este criterio se busca una nueva posición de equilibrio cuando se introduce una perturbación estática sacando al sistema de su posición inicial de equilibrio mediante un desplazamiento admisible. La estabilidad del sistema se estudia comparando la energía potencial del sistema adyacente con la que tenía en la posición de equilibrio. Si la energía es mayor el sistema es estable y si es igual tiene un equilibrio indiferente, en otro caso es inestable. Esta comparación se puede expresar en términos de la variación segunda de la energía potencial lo cual se puede deducir del carácter definido positivo de la matriz de rigidez tangente.

Criterio dinámico.

El criterio dinámico analiza perturbaciones dinámicas de la posición de equilibrio estático cuando se le somete al sistema a oscilaciones en torno a la posición de equilibrio. Este planteamiento da lugar a un problema de autovalores que determina los exponentes característicos y los modos de vibración. Los exponentes característicos son en general números complejos de forma que si todos los exponentes característicos tienen componentes reales negativas el equilibrio es dinámicamente estable e inestable en otro caso.

Los exponentes dependen del parámetro de control (λ -carga-). Para valores suficientemente pequeños de las cargas el sistema es estable pero cuando son lo suficientemente grandes el sistema es inestable y los exponentes quedan en el lado derecho del plano complejo. Si esto sucede los modos de vibración asociados se amplifican exponencialmente indicando la inestabilidad del sistema.

Test de la matriz de rigidez tangente.

La estabilidad de un sistema conservativo puede estudiarse analizando el espectro de la matriz tangente \mathbf{K} [Fel00]. El espectro en este caso está formado por el conjunto de (μ_i) de autovalores de la matriz de rigidez \mathbf{K} , es decir:

$$\mathbf{Kz} = \mu_i \mathbf{z} \quad (2.5.1)$$

Como \mathbf{K} es simétrica los valores μ_i son reales. Se pueden dar las siguientes situaciones:

- I) Si $\mu_i > 0 \quad \forall i$, el equilibrio del sistema es estable.
- II) Si $\mu_i = 0$ para algún i el equilibrio es neutro o indiferente.
- III) Si $\mu_i < 0$ para algún i , el equilibrio del sistema es inestable.

En los problemas de estructuras la matriz de rigidez depende de un parámetro de control (λ) y de la deformada (u), de forma que:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(u, \lambda) \quad (2.5.2)$$

Si como es usual los valores de los elementos de \mathbf{K} dependen continuamente de (λ) aumentando λ desde cero tendrá lugar una transición de la estabilidad Caso (I) a la inestabilidad caso (III) a través del caso (II) para lo cual es necesario que \mathbf{K} sea singular, es decir:

$$\text{Det}(\mathbf{K}) (\lambda_{\text{lim}}) = 0 \quad (2.5.3)$$

Y por tanto:

$$\mathbf{K}(u, \lambda_{\text{lim}}) \mathbf{z} = 0 \quad (2.5.4)$$

Con $\mathbf{z} \neq 0$ que es denominado el autovector nulo.

Las ecuaciones anteriores constituyen el test para encontrar el límite o frontera de la estabilidad.

Puntos críticos

En las trayectorias de carga-respuesta se distinguen una serie de puntos que definen comportamientos especiales como los puntos de retorno o fallo destacando por su significado físico los puntos límite y bifurcación.

Si se considera una barra articulada en su apoyo (vease figura 2.5.4) en el que existe un resorte que reacciona frente al giro de la barra con una constante " k " de forma que el momento del muelle frente a un giro θ es:

$$M = k\theta \quad (2.5.5)$$

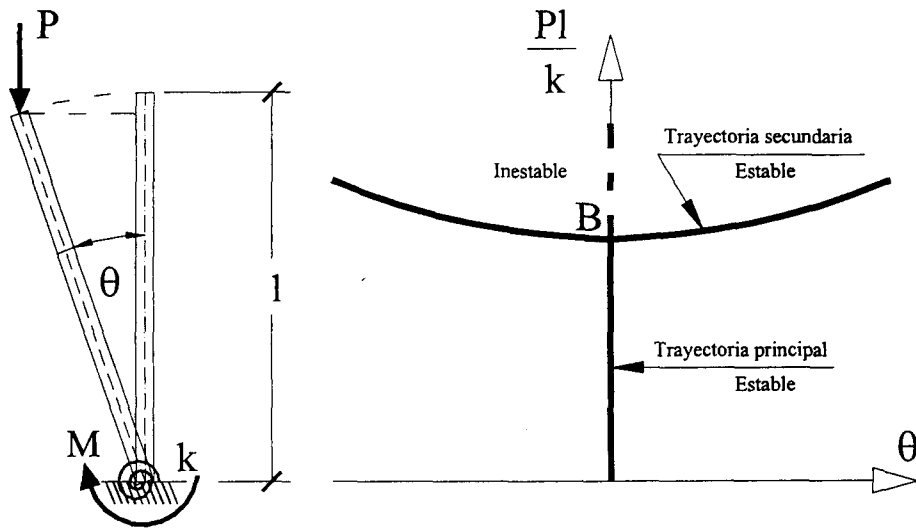


Figura 2.5.4

Se demuestra que para un giro θ la carga que mantiene esta configuración de equilibrio es:

$$P = \frac{k}{l} \frac{\theta}{\sin \theta} \quad (2.5.6)$$

de forma que se pueden considerar dos trayectorias de equilibrio:

- La principal con $\theta=0$ que es estable cuando $P < k/l$ e inestable si $P > k/l$.
- Y la secundaria por la expresión anterior que es estable.

La energía potencial del sistema es:

$$\Pi = \frac{1}{2} k \theta^2 - Pl(1 - \cos \theta) \quad (2.5.7)$$

La ecuación de equilibrio o residuo es:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = k\theta - Pl \sin \theta$$

y la segunda variación de la energía:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = k - Pl \cos \theta = k \left(1 - \frac{\theta \cos \theta}{\sin \theta} \right) = k \left(1 - \frac{\theta}{\tan \theta} \right) > 0$$

para $|\theta| < \pi/2$ y por tanto estable.

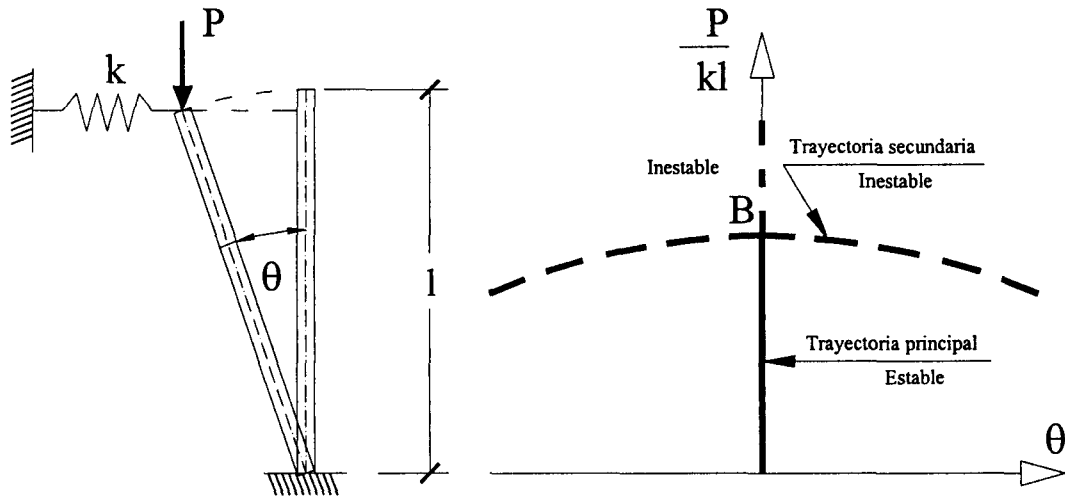


Figura 2.5.5

Para el caso de una barra articulada en su extremo inferior y apoyada elásticamente en el extremo opuesto figura 2.5.5, de forma que la respuesta del resorte es:

$$F = k\Delta l \quad (2.5.8)$$

Se demuestra que para un giro θ la carga que mantiene esta configuración de equilibrio es:

$$P = kl \cos \theta \quad (2.5.9)$$

Igual que antes aparecen dos trayectorias de equilibrio:

- La principal con $\theta=0$ que es estable cuando $P < kl$ e inestable si $P > kl$.
- Y la secundaria inestable.

La energía potencial del sistema es:

$$\Pi = \frac{1}{2} k(l \sin \theta)^2 - Pl(1 - \cos \theta) \quad (2.5.10)$$

La ecuación de equilibrio o residuo es:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = kl^2 \sin \theta \cos \theta - Pl \sin \theta = 0$$

y la segunda variación de la energía:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = kl^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - Pl \cos \theta = -kl^2 \sin^2 \theta < 0$$

y por lo tanto inestable.

El punto B en ambos casos representa un punto límite y a la vez un punto de bifurcación.

De acuerdo con esto existe una estrecha relación entre las configuraciones de equilibrio, los puntos críticos y la estabilidad del sistema.

En el caso de problemas más generales aparecen situaciones como las indicadas en la figura 2.5.6:

- Trayectorias con tramos inestables en los que la configuración de equilibrio saltaría de una rama estable a otra.
- Sistemas con bifurcaciones con trayectorias secundarias estables o inestables.

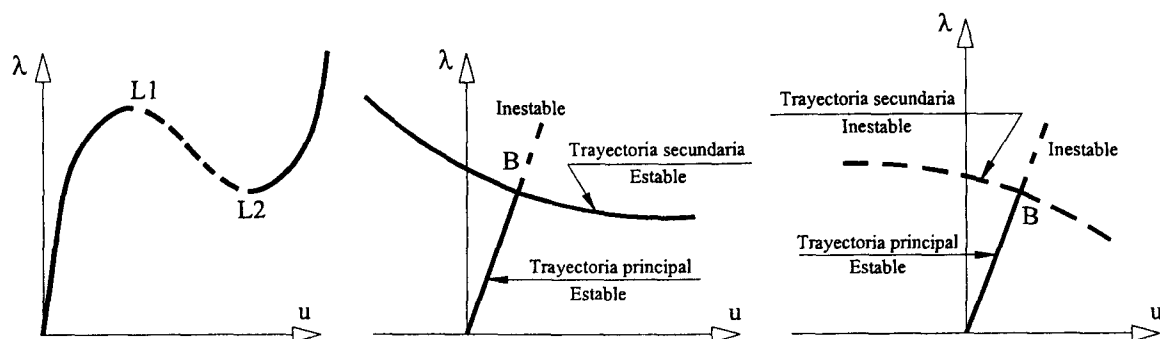


Figura 2.5.6

Y otras más generales en las que es posible distinguir los siguientes tipos de puntos críticos de interés:

- Puntos límite (L): aislados en los que la tangente a la trayectoria es única y perpendicular al eje λ .
- Puntos límite (L) múltiple. En los que existen varias tangentes a la trayectoria.
- Puntos de bifurcación (B) aislados en los que hay dos ramas de equilibrio que se cortan en dicho punto por lo tanto dos tangentes una a cada rama.
- Puntos de bifurcación (B) múltiples en los que confluyen más de dos trayectorias de equilibrio.

También se consideran como puntos críticos los puntos de retorno (T) en los que la tangente es perpendicular al eje de la variable estado pero tienen menos interés.

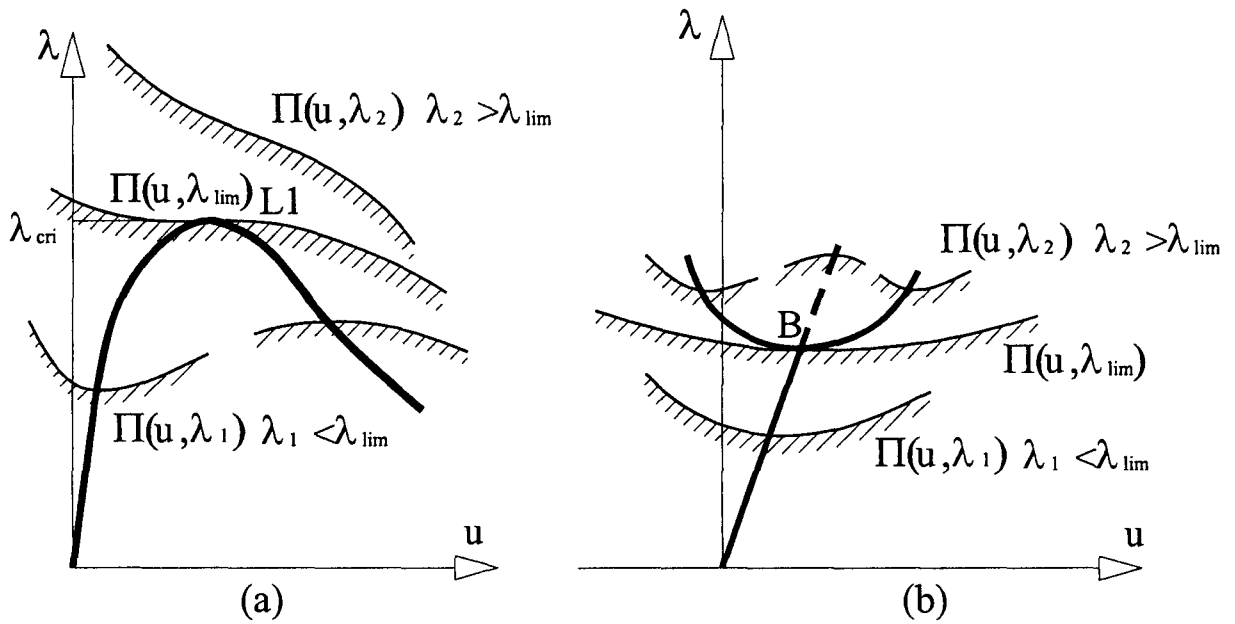


Figura 2.5.7

2.5.2 Bifurcación

El estudio de la estabilidad proporciona cualitativamente dos tipos de información. Por una parte permite establecer si una posición de equilibrio es estable o inestable y por otra en el caso de estabilidad interesa saber el grado de proximidad al punto crítico que separa la zona estable de la inestable. Junto a esta información otro de los aspectos que interesa conocer son los posibles puntos de bifurcación en los que se puede producir un cambio brusco e inesperado de la posición de equilibrio cuando la trayectoria alcanza un punto de bifurcación. Esto requiere la localización de las trayectorias y la determinación de los puntos de corte.

El problema de la bifurcación estática se establece abstractamente como la resolución de ecuaciones del tipo

$$\psi(\lambda, u) = 0 \quad (2.5.11)$$

Normalmente una variación gradual de un parámetro de control λ corresponde a una única y continua curva solución y la teoría de la estabilidad lineal describe bastante bien o adecuadamente el estado del sistema. Sin embargo existen un gran número de problemas para los cuales la estabilidad y número de curvas solución cambia abruptamente y la estructura del sistema varía bruscamente cuando el parámetro pasa a través de los valores críticos. Este tipo de fenómeno llamado bifurcación describe cambios cualitativos en sistemas dinámicos. En esta situación la estabilidad lineal falla y no da mucha información sobre el comportamiento cualitativo del problema no lineal. El análisis de la bifurcación y la estabilidad no lineal deben ser consideradas ya que los puntos de bifurcación pueden ser inestables.

Desde un punto de vista analítico Marsden J. E. y Hughes T. J. R. [MaH94] enumeran ciertos puntos básicos sobre el estudio y análisis de los problemas de bifurcación que se pasan a mencionar. Tras el primer paso de la determinación de los puntos de bifurcación

y de su estabilidad consideran necesario la introducción de imperfecciones en el sistema para conocer el grado de sensibilidad en la evolución de la estabilidad denominando a los sistemas estructuralmente estables cuando no son sensibles a las imperfecciones.

En el caso de problemas como los aquí estudiados hay un teorema que tiene gran interés en la teoría de la bifurcación que reduce el estudio de distintos problemas al estudio de una ecuación algebraica al transformar la ecuación del sistema $\Psi(\lambda, u) = 0$, en una expresión del tipo $(x^3 \pm \lambda x)$ mediante el procedimiento de Liapunov-Schmidt.

Por su parte con el uso de técnicas numéricas, el estudio de la ecuación anterior se lleva a cabo mediante el análisis de las trayectorias (λ, u) de estados de equilibrio. Los puntos de bifurcación aparecen cuando dos trayectorias se cruzan.

El análisis de la bifurcación no lineal puede llevarse a cabo en diferentes niveles de detalle de acuerdo con lo que requiera la aplicación. En general se pueden considerar cuatro niveles con creciente nivel de detalle suponiendo la existencia de un punto de bifurcación en B (figura 2.5.7 (b)).

1. Localización: en el trazado de una trayectoria se puede localizar la situación de un punto de bifurcación que generalmente se manifiesta por una singularidad del sistema.
2. Determinación del subespacio: una vez localizado el punto B se determinan los autovectores del problema en B ya que en este punto el sistema es singular.
3. Análisis de trayectorias: Encontrar las direcciones de las tangentes a las trayectorias que pasan por B.
4. Análisis de las curvaturas de las trayectorias.

Finalmente, en relación con la estabilidad y la bifurcación se indica algunas de las conclusiones del importante trabajo de Koiter [Koi45] ya mencionado en la introducción en el que se formula una teoría completamente general del inicio del post-pandeo. Examinando todas las posibles formas de la superficie de energía potencial cerca del punto de bifurcación y aprovechando las propiedades de continuidad, Koiter demostró que:

1. El equilibrio en el estado crítico es estable si la carga P para el estado de equilibrio adyacente postcrítico es mayor que la carga crítica de pandeo P_{cr} . El estado postcrítico es estable y la estructura es insensible a la imperfección.
2. El equilibrio en el estado crítico en la estructura perfecta es inestable si existe un estado de equilibrio adyacente postcrítico para el cual la carga P es menor que la carga crítica de pandeo P_{cr} . Las imperfecciones dan lugar a que la carga a la cual la estructura llega a ser inestable son menores que la carga P_{cr} .

Así mismo Koiter demostró también que entre las bifurcaciones inestables, las asimétricas tienen mayor sensibilidad a las imperfecciones que las inestables simétricas.

2.6. METODOS CALCULO NO LINEAL DE VIGAS-COLUMNA.

Se mencionan de forma esquemática en este apartado distintos métodos de cálculo no lineal de vigas-columna mediante los que se determina su deformada y esfuerzos y por tanto el análisis de otros aspectos como: la carga crítica de pandeo, trayectorias post-pandeo, etc.

En el caso de problemas no lineales se pueden presentar distintas hipótesis de comportamiento ya mencionadas:

- Problemas de segundo orden en los que se tiene en cuenta la posición de la carga en la pieza deformada.
- Problemas de segundo orden no lineales en geometría cuando se considera la verdadera curvatura.
- La consideración conjunta de los dos aspectos anteriores permite abordar problemas con grandes deformaciones
- Problemas no lineales debido al comportamiento del material. No solo debido a la no linealidad tensión deformación sino a otros aspectos como en el caso del hormigón la incapacidad de resistir tracciones, lo que da lugar a la aparición de fisuras que alteran el comportamiento de la sección máxime cuando como en este caso se trata de una sección compuesta.

En el caso de materiales plásticos se puede aplicar el método propuesto si las cargas se aplican de forma creciente y monótonamente evitando estados de descarga y situaciones de estados de deformación no reversibles.

Los procedimientos de análisis empleado son muy variados destacando las técnicas numéricas de diferencias finitas y elementos finitos y los métodos semianalíticos: desarrollo en serie, perturbación etc.

2.6.1 Introducción

Con el cálculo en régimen no lineal de vigas-columna se trata entre otros aspectos:

- Conocer el estado de deformaciones y esfuerzos internos y dimensionado de elementos estructurales.
- Determinar la trayectoria de carga-desplazamiento para conocer los puntos críticos y límites: establecer los estados de inestabilidad.
- Finalmente determinar los diagramas de interacción de cargas exteriores, esbeltez-cargas críticas, etc.

Métodos de cálculo.

La resolución de la ecuación diferencial se lleva a cabo mediante:

- Integración exacta de la ecuación diferencial para la obtención de soluciones analíticas.
- Integración mediante métodos numéricos.
- Aproximación de la deformada.

En el caso no lineal la dificultad se encuentra como ya se ha mencionado en la no linealidad del material y por lo tanto la no linealidad momento-curvatura así como la dependencia de la relación momento curvatura de la carga axial. En general los problemas se plantean con distintas líneas de trabajo:

Análisis elástico en segundo orden (Galambos[Gal68]).

En el caso de análisis de segundo orden cuando las cargas se refieren a la posición de formada se suele utilizar el método P- δ . Además este método puede recoger la consideración de la verdadera curvatura recogiendo el efecto pieza. Cuando además se recoge la translacionalidad de la estructura se dice que el análisis P- δ recoge el efecto pórtico. Como es conocido el método requiere un proceso iterativo.

Análisis elasto-plástico de primer orden. (Disque [Dis71], [CGL96]).

Cálculo incremental de cargas que trata de seguir la historia de formación de rótulas mediante un análisis de primer orden teniendo en cuenta la deformabilidad de los elementos frente a los métodos de formación de mecanismos con rótulas plásticas.

Análisis no lineal de segundo orden ([ChT 94]).

Igual que el anterior pero considerando los efectos de segundo orden.

2.6.2 Cálculo plástico de vigas-columna post-pandeo

En la obra de W. F. Chen y T. Atsuta [ChA76], se recogen diversos métodos que se repasan a continuación.

Método de la deformada. Soluciones exactas-cerradas.

Trata de resolver integrando exactamente la ecuación diferencial para problemas plásticos para una columna cargada excentricamente con sección rectangular.

Jezek (1936) fue el primero en obtener una solución analítica y cerrada de una columna excentricamente cargada para una sección rectangular con tensiones en régimen plástico. En su solución aparecían integrales elípticas.

Horne (1956) fue el primero en derivar las relación M - P - χ para secciones rectangulares de un material elástico-plástico perfecto. Demostró que la solución se podía obtener sin recurrir a métodos numéricos. Para el caso de Jezak obtuvo soluciones usando funciones elementales.

Hauck y Lee (1963) obtuvieron relaciones M - P - χ explícitas para secciones cajón y en H. Combinando estos resultados con los de Horne obtuvieron soluciones analíticas de la deformada de pilares elastoplásticos en todos los estados de plastificación.

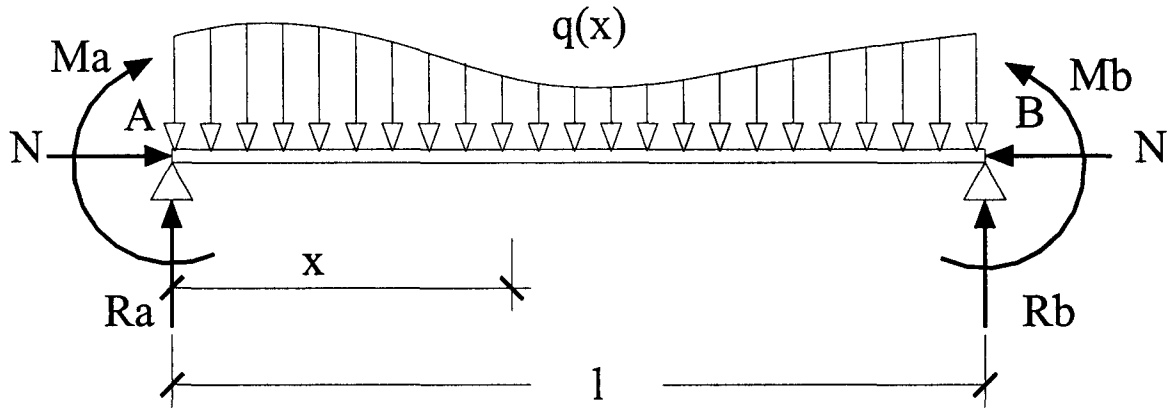


Figura 2.6.1

En la figura anterior si:

$$\begin{aligned}
 Q(x) &= \int_0^x q(\xi) d\xi \\
 Ra &= \frac{1}{l}(Mb - Ma) + \frac{1}{l} \int_0^l Q(x) dx \\
 Rb &= \frac{1}{l}(Ma - Mb) + \frac{1}{l} \int_0^l Q(x) dx + Q(l) \\
 M(x) &= Ma + \frac{x}{l}(Mb - Ma) + \frac{x}{l} \int_0^x Q(\xi) d\xi - \int_0^x q(\xi) d\xi + Nu(x)
 \end{aligned}
 \tag{2.6.1}$$

Ecuación que representa el equilibrio de la pieza. Si se tiene en cuenta la relación momento curvatura: $M = g(P, \chi)$ o la inversa $\chi = g^{-1}(M, P)$

Se pueden plantear tres métodos para la resolución de la ecuación del problema en condiciones de no linealidad del material dependiendo de la variable independiente que se emplee (u, χ, M).

En este caso se emplea como variable la deformada $u(x)$.

$$g(P, u'') = Ma + \frac{x}{l}(Mb - Ma) + \frac{x}{l} \int_0^x Q(\xi) d\xi - \int_0^x q(\xi) d\xi + Pu(x)$$

Supone la integración de la ecuación diferencial de la viga columna con comportamiento plástico mediante métodos numéricos por lo que las soluciones obtenidas no son soluciones generales sino soluciones con unas condiciones de contorno dadas obtenidas mediante métodos iterativos. De hecho los métodos más utilizados (véase [SaR03]) están basados en el método de tiro-corrección de forma que partiendo de las condiciones de un extremo y conocidas las curvaturas se van determinando por diferencias finitas la pendiente y deformada hasta llegar al extremo, repitiéndose el proceso hasta conseguir las condiciones requeridas en el extremo final.

También se puede partir de las condiciones en un extremo y calcular la longitud de la viga columna para la que se satisfacen las condiciones exigidas en el otro extremo [ChA76].

Curvas de deformación de la columna (CDC). Columna equivalente.

Una viga cargada axialmente sin excentricidades en los extremos es una columna equivalente de forma que una viga columna con momentos en los extremos será una porción de una viga columna equivalente de la viga columna original. A la curva deformada de la columna equivalente se la denomina curva de la deformación de la columna (CDC).

Von Karmán (1910) fue el primero en reconocer el hecho de que la deformada de una columna podía ser representada mediante una porción de curva deformada de otra columna denominada Curva de Columna Deformada (Column Deformed Curve -CDC-) Sobre la base de CDC correspondientes a los resultados de varias columnas para diferentes condiciones de carga y formas de la sección fueron representadas por Chwalla (1928, 1934) facilitando la resolución gráfica.

Como señala Chen [ChA76], otros autores que han ampliado la utilización del método CDC han sido: Horne 1956, Ellis 1958, Ojalvo 1960, Nel y Mansell 1963, Lu y Kamalvand 1968, Ellis, Jury y Kirk 1964 (soluciones tridimensionales para columnas cargadas biaxialmente, columnas con secciones en cajón de pared delgada).

Para una misma relación $\chi = g^{-1}(M, P)$ y carga axial P , se pueden representar una familia de columnas equivalentes o CDC que permiten resolver distintos tipos de problemas gráficamente como hace Ojalvo (1960) y Ojalvo y Fukumoto (1962).

Método CDC modificado.

Es una ampliación del método CDC cuando existen cargas perpendiculares a la directriz que fue presentado por Lu y Kamalvand (1968). Los procedimientos de integración son similares a los indicados en el apartado anterior. Igual que antes se pueden construir nomogramas con los que resolver gráficamente distintos tipos de problemas.

Métodos aproximados. Método de Jezek.

La solución del método de Westergard y Osgood basada en una deformada senoidal conduce a complicaciones analíticas por lo que Jezek propone un método simplificado del mismo, bajo las siguientes hipótesis:

- La deformada es una semionda de seno.
- El equilibrio se establece en la mitad de la columna.
- La relación deformación es perfectamente elasto-plástica.

Los resultados obtenidos mediante estas hipótesis comparados con los obtenidos analíticamente son aceptables desde el punto de vista práctico.

Método de la curvatura [ChA76].

En este caso se emplea como variable independiente la curvatura:

$$\frac{d^2}{dx^2} [g(P, u'')] + Pu'' = f \quad (2.6.2)$$

Esta ecuación se puede integrar numéricamente o en el caso de que se empleen unas relaciones momento curvatura simplificadas es posible integrar la ecuación diferencial en términos de la curvatura (véase [ChA76]).

El objetivo del método es establecer una relación entre la esbeltez y la carga crítica, Consiguiéndose una simplificación y reducción de los cálculos.

Método del momento.

En este caso se emplea el momento como variable independiente.

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + Pu'' = f \quad (2.6.3)$$

Si se hace la ecuación adimensional empleando:

M_y = Momento que agota la sección por flexión.

P_y = carga que agota la sección por axil

EI = rigidez de $g'(\chi=0, P)$.

χ_y = curvatura correspondiente al momento M_y .

$$m = \frac{M}{M_y} \quad p = \frac{P}{P_y} \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad \bar{q} = \frac{q}{M_y k^2} \quad \bar{\chi} = \frac{\chi}{\chi_y} = \frac{1}{\chi_y} g^{-1}(M, P) = \bar{g}^{-1}(m, p)$$

Con la relación:

$$\frac{d^2 m}{x^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dm}{dx} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dm} \left(\frac{dm}{dx} \right)^2$$

se tiene la ecuación:

$$\frac{dm}{dx} = k \sqrt{2D - 2G(m, p) - 2\bar{q}m}$$

$$G(m, p) = \int \bar{g}^{-1}(m, p) dm$$

$$D = \frac{1}{2k^2} \left(\frac{dm}{dx} \right)_0^2 + G(m_0, p) + \bar{q}m_0$$

La ecuación diferencial queda:

$$\frac{dm}{dx} = \sqrt{2k} \left[\frac{1}{2k^2} \left(\frac{dm}{dx} \right)_0^2 + G(m_0, p) - G(m, p) + q(m_0 - m) \right] \quad (2.6.4)$$

ecuación que se resuelve numericamente llegando a establecer distintos tipos de diagramas de interacción: carga axil-carga uniforme, relación entre la esbeltez y el momento máximo.

Método de Newmark.

El método de Newmark es un método numérico en el que se siguen los siguientes pasos:

- 1) El elemento viga-columna se discretiza en N puntos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ equidistantes Δx .
- 2) Se supone una deformada $w_i(x)$ de acuerdo con la notación de Chen [ChA76].
- 3) Con la deformada se determinan los momentos

$$M_i(x) = M_0(x) + P w_i(x), i = 1, 2, 3, \dots, N$$

Donde $M_0(x)$ es el momento de primer orden debido a las cargas perpendiculares a la directriz.

Teniendo en cuenta la relación momento curvatura $M = g(P, \chi)$ o la inversa $\chi = g^{-1}(M, P)$, conocido el momento $M_i(x)$ se obtiene la curvatura $\chi_i(x)$.

- 4) Con las curvaturas $\chi_i(x)$ se procede a una integración numérica de la ecuación:

4.1 Cálculo de pendientes iniciando con $\theta_1=0$:

$$\theta_i(x) = \sum_{k=0}^i \chi_k \Delta x \quad (2.6.5)$$

4.2 Cálculo de la nueva deformada $w_i(0)=0$.

$$\bar{w}_i(x) = \sum_{k=0}^i \theta_k \Delta x \quad (2.6.6)$$

4.3 Como se han impuesto unas condiciones iniciales, en particular $\theta_1=0$:

$$w_i = \bar{w}_i - \frac{1}{P} w_N \quad (2.6.7)$$

- 5) $w_i(x)$ es la nueva deformada con la que se repite el proceso hasta que se produce la convergencia.

Las ecuaciones anteriores pueden ser resueltas mediante distintos métodos numéricos basados en la discretización del problema: Método de los Elementos de Contorno, Método de las diferencias finitas, Método de los volúmenes Finitos, Método Espectral y por encima de los anteriores sobresale en el caso de problemas no lineales el MEF en sus distintas variantes (desplazamientos, equilibrio, mixto, híbrido) en combinación con el método de Newton-Raphson con el que a parte de la discretización del dominio se discretizan las cargas mediante un proceso incremental en cada uno de los cuales se establece una condición de equilibrio. A continuación se recogen algunos aspectos básicos del MEF cuando se utiliza el procedimiento de los desplazamientos para poner de relieve algunas de sus características y propiedades en relación con los problemas de estabilidad y bifurcación que se vienen estudiando así como la descripción de las trayectorias postpandeo.

En el método en desplazamientos, una vez discretizado el sistema, la ecuación de equilibrio se representa mediante el sistema residual en el que empleando una notación vectorial de acuerdo con Felippa expresamos:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \Lambda)=0 \quad (2.6.8)$$

\mathbf{r} = residuo.

\mathbf{u} = variable de estado.

Λ = variable de control.

Si el sistema es conservativo: $\Pi=\Pi(\mathbf{u}, \Lambda)$

$$\mathbf{r} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}} \quad (2.6.9)$$

Teniendo en cuenta que la ecuación residual desde el punto del vista físico representa una ecuación de equilibrio se puede escribir:

$$\mathbf{p}(\mathbf{u})=\mathbf{f}(\mathbf{u}, \Lambda) \quad (2.6.10)$$

$\mathbf{p}(\mathbf{u})$ son las fuerzas internas

$\mathbf{f}(\mathbf{u}, \Lambda)$ las fuerzas externas.

De foma que

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{p} - \mathbf{f} \\ \mathbf{p} &= \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}} \quad \mathbf{f} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}} \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

Con la energía potencial total: $\Pi = U - W$

U sería la energía interna del sistema y

W es el potencial del sistema de fuerzas en este caso conservativo.

Por otra parte Matriz Jacobiana coincide con la matriz Hessiana de la energía potencial:

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} \quad K_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial u_j} \quad (2.6.12)$$

como es conocido \mathbf{K} representa la matriz de rigidez tangente. Mientras que

$$\mathbf{Q} = -\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Lambda} \quad Q_{ij} = -\frac{\partial r_i}{\partial \Lambda_j} \quad (2.6.13)$$

Se denomina matriz de control o matriz de cargas incrementales.

En el caso de que las ecuaciones residuales sean dependientes de un parámetro λ , (2.6.8) queda:

$$\mathbf{r}(\lambda, \mathbf{u}) = 0$$

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} \quad \mathbf{q} = -\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \quad (2.6.14)$$

\mathbf{K} es la matriz tangente.

\mathbf{q} es el vector incremento de cargas.

El tratamiento de los distintos aspectos del análisis se apunta brevemente en las líneas siguientes:

a) Determinación de los estados de equilibrio a partir de $\mathbf{r}(\lambda, \mathbf{u}) = 0$

Estrictamente el residuo \mathbf{r} en la posición de equilibrio \mathbf{u} correspondiente a la solución de $\mathbf{r} = 0$. Sin embargo cuando se trata de determinar la posición del sistema \mathbf{u} , dado el estado de cargas \mathbf{f} , para un valor aproximado del sistema \mathbf{u}_m , se tiene el residuo $\mathbf{r}(\mathbf{u}_m)$, se puede aplicar el método de Newton:

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}_m)(\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_{m+1}) = \mathbf{r}(\mathbf{u}_m), \quad (2.6.15)$$

$$\mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{u}_m - \mathbf{K}(\mathbf{u}_m)^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{u}_m)$$

Para evitar en cada paso volver a calcular la matriz \mathbf{K} se utiliza el método de Newton Modificado. Otras alternativas son los métodos de cuasi-Newton, el gradiente conjugado o la relajación dinámica.

b) Estudio de las trayectorias. Tiene lugar cuando se trata de conocer las distintas posiciones de equilibrio cuando las variables de control (Λ) varían.

En este caso para un sistema de ecuaciones $r_i(u_i, \lambda_j) = 0$, ($i=1..n$, $j=1..m$), una posición infinitamente próxima a (u_i, λ_j) será $(u_i + du_i, \lambda_j + d\lambda_j)$ que cumplirá la relación:

$$\sum_j \frac{\partial r_i}{\partial u_j} du_j = \sum_k \frac{\partial r_i}{\partial \lambda_k} d\lambda_k$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$k = 1, \dots, m$$
(2.6.16)

En forma matricial:

$$\mathbf{K}d\mathbf{u} = \mathbf{Q}d\boldsymbol{\lambda}$$
(2.6.17)

Que expresada en incrementos es:

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{u} = \mathbf{Q}\Delta\boldsymbol{\lambda}$$
(2.6.18)

Para avanzar en la trayectoria el estado es conducido por medio de un proceso incremental. Entre las técnicas incrementales se distingue entre:

- Técnicas puramente incrementales también llamadas predictores.
- Técnicas correctivas también llamada predictor-corrector o técnicas iterativas incrementales.

En el proceso de avance incremental se producen acumulaciones de errores. Para evitar esta situación se emplean distintas técnicas de control:

$$c(\Delta\mathbf{u}, \Delta\boldsymbol{\lambda}) = 0$$
(2.6.19)

que se recogen gráficamente en la figura 2.6.2. de forma que el proceso incremental se lleva a cabo por el itinerario S-P-C.

En cada paso se evalúan los estados no equilibrados que resultan de la diferencia entre el problema lineal y no lineal. El proceso de convergencia de estos dos estados se mejora con distintas técnicas.

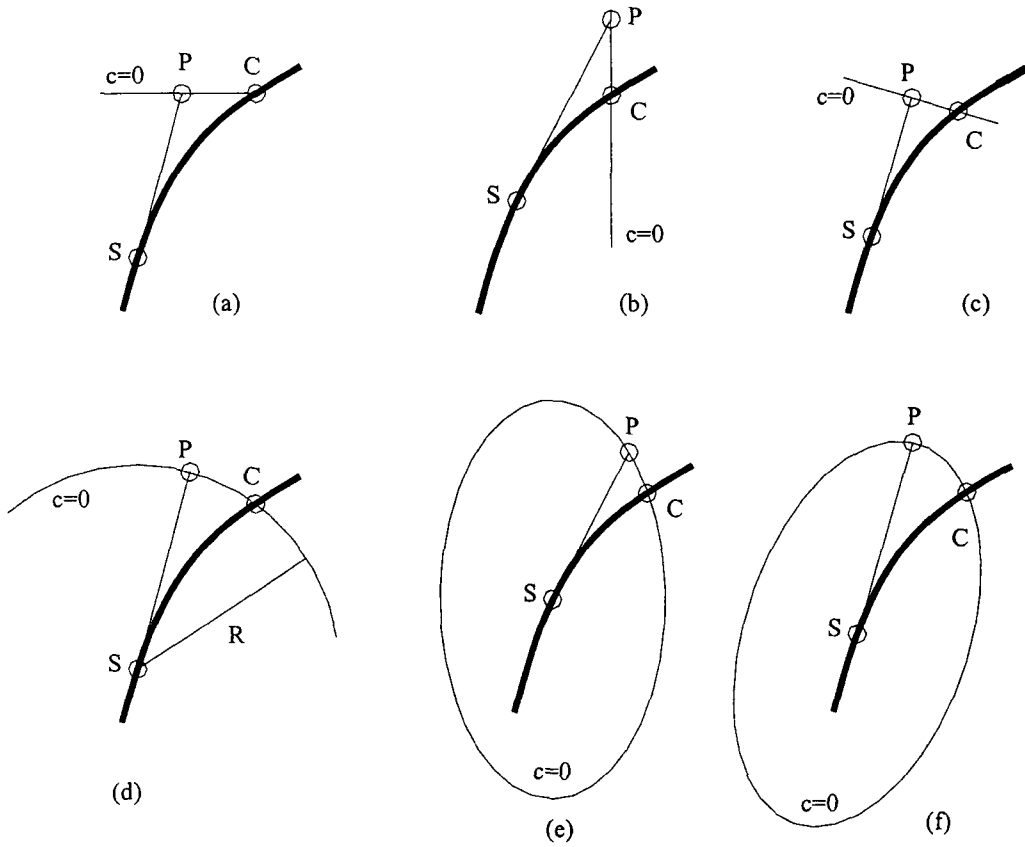


Figura 2.6.2

- (a) Control de cargas.
- (b) Control de desplazamiento.
- (c) Control de longitud de arco.
- (d) Control hiperesférico.
- (e) Control hiperelíptico global.
- (f) Control hiperelíptico local.

c) Determinación de los puntos de bifurcación.

El análisis de los puntos límite y bifurcación se lleva a cabo teniendo en cuenta la relación

$$\mathbf{Kz} = 0 \quad (2.6.20)$$

Para que \mathbf{z} sea un autovector distinto de cero del núcleo de \mathbf{K} , la matriz de rigidez \mathbf{K} debe ser singular. Teniendo en cuenta que además es simétrica, se puede poner:

$$\mathbf{z}^t \mathbf{K} d\mathbf{u} = \mathbf{z}^t \mathbf{Q} d\lambda$$

y por tanto

$$\mathbf{z}^t \mathbf{Q} d\lambda = 0 \quad (2.6.21)$$

En esta situación se pueden distinguir dos situaciones:



1) $\mathbf{z}^t \mathbf{Q} \neq 0$ en este caso debe suceder que a lo largo de la trayectoria el incremento infinitesimal de $d\lambda$ debe desvanecerse en relación con du , lo cual indica que nos encontramos en un punto límite que es aislado si el vector \mathbf{z} es único.

2) De otro lado puede suceder que:

$$\mathbf{z}^t \mathbf{Q} = 0 \quad (2.6.22)$$

en cuyo caso estamos en un punto de bifurcación que de forma análoga al caso anterior es aislado si el vector \mathbf{z} es único.

En estos problemas de singularidad se emplea el método de la longitud de arco para evitar puntos de bifurcación. De esta forma se introduce una nueva condición a las ecuaciones del problema como es la trayectoria sobre la que se busca la solución. En este sentido el procedimiento de resolución se considera un método de continuación que se resuelve mediante el uso del método de Newton-Raphson, Newton-Raphson modificado o quasi-Newton ([Rit03]).

Estos métodos iterativos de continuación comprenden cuatro aspectos:

- Parametrización mediante la utilización de un parámetro que permite controlar la evolución de las soluciones.
- Fase de predicción en la que se utiliza la información de la solución previamente calculada para predecir la siguiente solución.
- Fase de corrección en la que mediante un procedimiento numérico se trata de obtener la solución sugerida en la fase de predicción.
- Parámetros de control. Elección de ciertas variables mediante las que controlar la evolución de la convergencia de las soluciones.

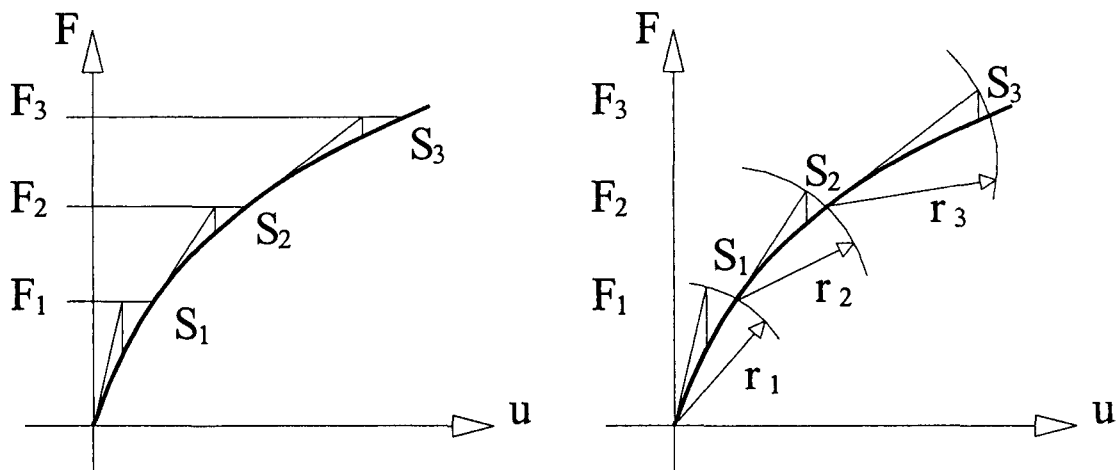


Figura 2.6.3

2.6.3 Aproximaciones mediante elementos línea

Jennings [Jen68], propuso en su modelo sobre modelización de entramados planos para tener en cuenta no linealidades geométricas modificar la rigidez del elemento frente a cargas axiales.

En la aproximación directa mediante elementos línea (denominados por algunos autores en castellano como elementos capa) rígidos, discretiza las estructuras y sus componentes en numerosos elementos viga a axil-flexión. La propiedad de cada elemento es usualmente uniforme y dependiente de una sección elegida en el elemento que es modelada dividiéndola en capas que contemplan los distintos materiales. La rigidez axil y flexión es usada para formar la matriz de rigidez. De forma que la rigidez del elemento línea se forma directamente de las propiedades de las capas de unas pocas secciones en el elemento ([SBG94], [KaW95]).

Una línea diferente con elementos segmentados fue usada por Wong, Yeo y Warner en 1988 [WYW88]. Las propiedades de los segmentos son utilizadas para formar la matriz de rigidez del elemento permitiendo una reducción de la memoria y tiempo de uso. Sin embargo aunque este método mejora la eficiencia de cálculo empeora la exactitud de la modelización geométrica.

Ambos elementos línea de Aas-Jakobsen et al. [AaG74] y Wong et al. [WYW88], fallan al intentar modelizar las no linealidades geométricas obligando a utilizar un número grande de elementos.

2.6.4 Hormigón. Métodos numéricos

En este apartado se resume la metodología que se aplica en el MEF en el caso de utilizar el análisis basado en dicha técnica siguiendo la exposición de [Mar91] y [Per96], en la que se tienen en cuenta distintos aspectos del comportamiento de dicho material (fluencia, retracción, relajación del acero, etc.). A. Marí distingue dos formulaciones, una basada en el MEF y otra que utiliza una generalización del cálculo matricial clásico de barras al campo del análisis no lineal.

Cuando se emplea el MEF, estos segmentos constituyen los elementos, siendo los puntos nodales los que conectan aquellos. Sin embargo en la formulación matricial generalizada los nodos de la estructura idealizada coinciden con los nudos físicos de la estructura real, la subdivisión en segmentos, separados por secciones de control, obedece a la necesidad de efectuar integraciones numéricas a lo largo de la barra.

Se consideran dos sistemas de referencia: uno global para toda la estructura y otro local asociado a cada segmento, o sección transversal de control, según el método. En cada nodo se consideran seis grados de libertad: tres desplazamientos y tres giros. Así mismo sobre cada nodo se considera que puede actuar un vector de cargas constituido por tres fuerzas y tres momentos. A nivel de sección en general se pueden considerar seis grados de libertad o deformaciones seccionales que son: una deformación axial correspondiente al centro de referencia, dos curvaturas de flexión según los ejes contenidos en el plano de la sección y una curvatura torsional y finalmente dos distorsiones o deformaciones

por cortante. A estos grados de libertad corresponden los esfuerzos generalizados de sección: axil, momentos de flexión, momento torsor y cortantes.

En estos métodos se establece tres niveles de equilibrio:

1) Un equilibrio a nivel de sección de da lugar a una relación entre esfuerzos generalizados y deformaciones generalizadas:

$$[F]_s = K_s [\delta]_s$$

F_s = esfuerzos que actúan en la sección.

$[\delta]_s$ = deformaciones generalizadas a nivel de sección.

2) Equilibrio a nivel de elemento finito o barra:

$$[F]_b = K_b [\delta]_b$$

F_b = fuerzas que actúan en los extremos de la barra.

$[\delta]_b$ = desplazamiento de los nodos de la barra.

3) Equilibrio global de la estructura:

$$[F] = K [\delta]$$

F = acciones exteriores.

$[\delta]$ = desplazamientos de los nodos..

El proceso de resolución de la última ecuación se lleva a cabo por los métodos incrementales Newton-Raphson en sus distintas variantes.

Finalmente, en el cuadro siguiente debido a [WoW97] se recoge un resumen de los distintos métodos aplicados por diversos investigadores a diferentes tipos de problemas.

AUTOR	FECHA DE PUBLICACION	NO LINEALIDAD	PROCEDIMIENTO DE SOLUCION	TIPO DE ELEMENTO
Aas-Jakobson y Grenacher	1974	Geométrica y material	Control de carga y desplazamiento (deformada)	Elemento línea
Crisfiel	1983	Geométrica y material	carga combinada y control de desplazamiento (arco-longitud)	Elemento finito
Bazant, Pan y Pijaudier-Cabot	1987	Material	Control de desplazamiento	Elemento finito
Wong, Yeo y Warner	1988	Geométrica y material	Control de desplazamiento (curvatura)	Elemento línea segmentada
Sun, Bradford y Gilbert	1992,1994	geométrica y material	carga combinada y control de desplazamiento (arco-longitud)	Elemento finito
Kawano y Warner	1995	geométrica y material	Control de carga y desplazamiento	Elemento finitio
Wong y Warner	1997	Geométrica y material	carga combinada y control de desplazamiento (arco-longitud)	Elemento línea

2.7 PILARES DE HORMIGON ARMADO.

2.7.1 Introducción

El estudio del comportamiento de pilares de hormigón presenta dificultades mayores que para pilares metálicos pues mientras en estos es posible en ciertos casos resolver problemas de vigas-columna de forma analítica (Jezek), en el caso de pilares de hormigón J. Arenas [Are80] manifiesta la dificultad de describir el comportamiento de los pilares por medio de expresiones analíticas.

El comportamiento estructural de las secciones de hormigón armado se caracterizan por su elevada no linealidad debido a tres factores básicos:

- a) El hormigón armado es un material compuesto hormigón-acero.
- b) El hormigón presenta un comportamiento no lineal en la relación tensión-deformación desde el origen por lo que el módulo de elasticidad no es constante que varía con el nivel de tensiones.
- c) El hormigón se fisura cuando se supera su resistencia a tracción es despreciable desde el punto de vista de cálculo por lo que la inercia de la sección no es constante.
- d) En la actualidad el dimensionamiento y la comprobación del hormigón se hace en estados límites últimos por lo que en determinados rangos de deformación los materiales entran en fases plásticas. Cuando se produce el paso de comportamiento elástico a plástico en alguno de los materiales se manifiesta un comportamiento no lineal de la sección.

Las peculiaridades del hormigón armado inciden por una parte en el cálculo de esfuerzos y deformaciones de una estructura y por otra en la comprobación y dimensionamiento de los distintos elementos estructurales en particular los sometidos a compresión requiriendo dos tipos de comprobaciones: agotamiento y estabilidad. Aspectos que en un cálculo general no son independientes pues por una parte es necesario calcular los esfuerzos partiendo de una estructura con características geométricas y constitutivas conocidas y al mismo tiempo verificar las condiciones de seguridad y de estabilidad.

Por tanto no es adecuado suponer la rigidez EI constante y aunque en la práctica es habitual el cálculo de las estructuras de hormigón armado en régimen lineal suponiendo un comportamiento elástico de las secciones ($EI = \text{constante}$), parece conveniente un cálculo no lineal de hormigón armado bien por la no linealidad geométrica ó del material o ambas tal y como presenta en los métodos desarrollados por algunos autores como A. L. L. Baker [Bak74], G. Macchi [Mac73], , O. De Donato y G. Maier [DeM72], Y. Guyon, Ernest-Mohr, J. Murcia (1972) [Mur72], J. Martinez (1972) [Mar72], A. Aguado (1980) [Agu80], A. Marí (1981) [Mar81] ó instituciones como el C.E.B., Laboratorio de Ingenieria Civil de Lisboa, Insituto Otto Graft (Stuttgart), Servicio de Resistencia de la Universidad de Lieja y ello por la necesaria coherencia de llevar a cabo un dimensionado en estados límites en el que las secciones se suponen plastificadas.

En los métodos mencionados no se considera la variación de la relación $M(\chi)$ dependiente del axil que requiere un proceso iterativo de cálculo al tener en cuenta los cambios en el valor de los axiles en el caso de pilares.

De acuerdo con la ecuación:

$$[M(P, \chi)]'' + Pu'' = f(x) \quad (2.7.1)$$

Su solución se plantea a partir del conocimiento de la superficie mecánica $M(P, \chi)$ cuyas características se analizaron en 2.4. Para su obtención se parte de la relación tensión deformación en el hormigón. Su difícil reducción a expresiones analíticas en el caso del hormigón dificulta la resolución de la ecuación anterior.

A continuación se indican algunas expresiones σ - ϵ en el hormigón que se usan para el cálculo de la superficie mecánica.

2.7.2 Ecuaciones σ - ϵ del hormigón

Se ha propuesto distintas relaciones σ - ϵ para el hormigón.

a) Hognestad [Hog57].

$$\begin{aligned} f_c &= 0.85 f_0 \left[\frac{2\epsilon}{\epsilon_0} - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2 \right] & \epsilon &\leq \frac{0.85 f_0}{E_c} \\ f_c &= \left[0.85 - 0.15 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_u - \epsilon_0} \right) \right] f_0 & \frac{0.85 f_0}{E_c} &\leq \epsilon \leq 0.0038 \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

$\epsilon_u = 0.0038$ deformación límite de rotura del hormigón en compresión.

f_0 = tensión de rotura del hormigón

$E_c = 1.800.000 + 460(0.85 f_0)$ Módulo tangente en el origen del hormigón.

$\epsilon_0 = \frac{2(0.85 f_0)}{E_c}$ deformación del hormigón para $0.85 f_0$.

b) Prakash Desayi y S. Krishnan [DeK64].

$$f_c = \frac{E\epsilon}{1 + \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2} \quad (2.7.3)$$

$$E = \frac{2f_0}{\epsilon_0}$$

f_0 = máxima tensión.

ϵ_0 = deformación correspondiente a f_0 .

c) Parábola rectángulo de la Norma Española del hormigón EHE [EHE98].

$$\begin{aligned} f_c &= \frac{0.85 f_0}{\varepsilon_c^2} (2\varepsilon_0 - \varepsilon) \varepsilon & \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ f_c &= 0.85 f_0 & \varepsilon \geq \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

f_0 = tensión característica de rotura del hormigón

ε_0 =0.002 deformación correspondiente a f_0 .

Diagrama tensión deformación del acero.

Se utiliza un diagrama elastico-plástico:

$$\begin{aligned} f_s &= E \varepsilon & \varepsilon \leq \varepsilon_y \\ f_s &= f_y & \varepsilon_y \leq \varepsilon \leq \varepsilon_r \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

E = Módulo de Young del acero (2100000 kg/cm²).

ε_y = deformación correspondiente al límite elástico.

f_y = límite elástico del acero ($E\varepsilon_y$).

Con estos modelos de tensión deformación y un conjunto de hipótesis básicas como pueden ser las utilizadas por la Normativo española EHE [EHE98] o por la Normativa internacional más reciente MODEL CODE ([CEB95]) y las hipótesis habituales sobre el comportamiento de la sección de hormigón:

- Bajo la acción de las solicitaciones, las armaduras tienen la misma deformación que el hormigón que las envuelve.
- Las deformaciones del hormigón siguen una ley plana.
- Se considera que el hormigón resiste a tracción hasta fisurarse

Se pueden determinar las relaciones momentos curvatura numérica o analíticamente.

En la determinación de las relaciones $M-\chi$ se suele considerar la contribución del hormigón en zonas entre fisuras (tension stiffening).

En el hormigón a tracción, una vez se sobrepasa la resistencia a tracción en una determinada sección, se produce en el mismo una fisura aumentando la tensión en el acero σ_s , al mismo tiempo que disminuye hasta cero la tensión en el hormigón. Se produce pues, una diferencia de alargamiento entre fibras vecinas de acero y hormigón que crea tensiones tangenciales por adherencia. Estas tensiones absorben parte de la tensión de tracción en el acero y la transmiten al hormigón, con objeto de restablecer la compatibilidad de los alargamientos.

La contribución del hormigón en zonas entre fisuras "tension stiffening" resulta más importante para situaciones de servicio (Fase II) que para situaciones próximas a rotura (Fase III). En la figura 2.7.2 se muestran diferentes diagramas momento-rotación para un esfuerzo axial constante ($P = \text{cte}$), de una pieza de sección rectangular con armadura simétrica y distintos tipos de cuantía. Estos diagramas se han obtenido por medio de cálculo con ordenador de acuerdo con las aproximaciones de Macchi, G., Siviero, E. En ellos puede observarse, por un lado, el fenómeno ya citado de que influye especialmente en la Fase II y, por otro lado, que esta influencia disminuye a medida que aumento la cuantía mecánica de la armadura (w).

Si se hace variar el esfuerzo axial, manteniendo constantes las demás características de la estructura, la influencia de la "tension stiffening" disminuye a medida que aquel aumenta.

Como resumen se puede indicar que la "tensión stiffening" interesa considerarla, cuando se utiliza el diagrama momento-curvatura como hipótesis básica de un método de análisis que permita estudiar situaciones de servicio. Así mismo, dentro de una estructura, resulta más conveniente considerarla en los elementos estructurales solicitados a flexión principalmente que en los elementos solicitados a compresión.

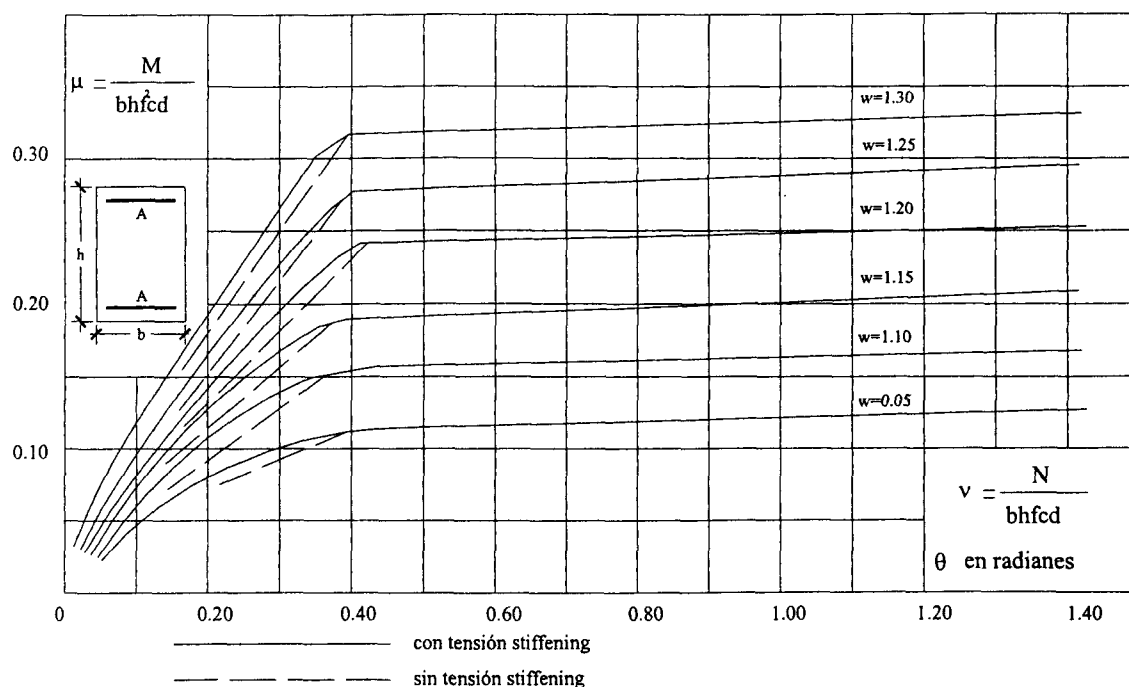


Figura 2.7.2

2.7.3 Relaciones momento curvatura

En el apartado 2.4 se vio como interviene la relación momento-curvatura en la formación del modelo utilizado.

El desarrollo de los métodos de cálculo no lineal como los mencionados en 2.6, puso de relieve la importancia de la relación momentos curvatura. G. De Kacinczy en 1914 trató de determinar experimentalmente el efecto de la relación momento curvatura en el comportamiento no lineal de las estructuras de hormigón.

El desarrollo de nuevos métodos de cálculo considerando el comportamiento no lineal del hormigón puso de manifiesto la necesidad de considerar distintos tipos de relaciones constitutivas, bien momento rotación ($M-\theta$) o bien momento curvatura ($M-\chi$). En la década de los años cincuenta autores como Baker A. L. L. propusieron la utilización de una relación elastoplástica $M-\theta$ bilineal y G. Macchi un diagrama $M-\theta$ trilineal.

La Comisión XI del CEB en Junio de 1.960 llevó a cabo un extenso plan de ensayos experimentales a nivel internacional en el que se puso de relieve el papel de diferentes factores: cuantía de la armadura, presencia de esfuerzo axial, calidad del acero y del hormigón, forma de la distribución de esfuerzos (momento flector), cantidad y disposición de los estribos, efecto de la escala y de doble armadura, razón entre el canto y anchura de la viga, etc. Los resultados se publicaron en los Boletines de Información del CEB (nº 30 y 52).

El diagrama general está formado por diversas fases [Agu80] que son:

- Fase I (tramo OA): En ella, la sección no está fisurada y tiene un comportamiento lineal elástico. Esta fase finaliza cuando se alcanza el momento de fisuración en la sección lo cual da lugar a la aparición de la primera fisura y a la propagación de la misma (Escala A-A').

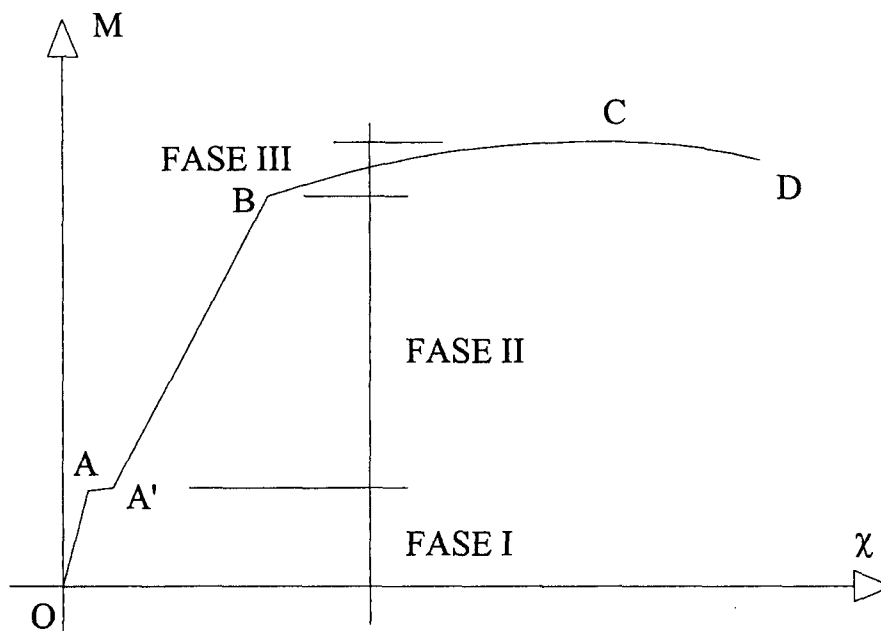


Figura 2.7.3

- Fase II (tramo A-B): La sección está fisurada y tiene un comportamiento que se puede asimilar a una recta. Esta fase finaliza cuando el acero alcanza el límite elástico o bien es el hormigón el que alcanza las deformaciones plásticas.
- Fase III (tramo B-C): La sección está próxima al agotamiento, teniendo un comportamiento prácticamente lineal, si es el acero el que alcanza el límite elástico antes que el hormigón las deformaciones plásticas. En el caso contrario, esta rama es muy corta y su asimilación a una recta introduce una imprecisión mayor que en el caso anterior. La ordenada máxima es el momento último M

- Rama descendente: Describe el comportamiento de la sección una vez sobrepasado el momento último hasta la rotura real.

Como se vio en el apartado 2.4 el momento curvatura depende del axil obteniéndose en este caso la superficie mecánica cuando se considera la relación de las tres variables. En la figura siguiente se recoge la forma de una superficie mecánica de hormigón en el diagrama M-P- χ .

- En la figura 2.7.4 (a) La forma general de la superficie mecánica en la que junto con la figura (c) se observa que conforme aumenta P se produce una elevación de la relación M- χ hasta un cierto valor de P a partir del cual desciende. En la figura citada 2.7.4 los valores numéricos corresponden a un caso que hemos calculado para reflejar de manera cuantitativa la forma concreta de la superficie.

- El contorno de la superficie mecánica proyectada sobre M-P define la relación de rotura de la combinación M-P (b).

- En la figura (c) para axiles bajos con predominio de la flexión tiene lugar la plastificación del acero en tracción consiguiéndose grandes curvaturas. Sin embargo cuando el axil es elevado la rotura se produce por agotamiento del hormigón sin apenas fluencia del acero con curvaturas bajas.

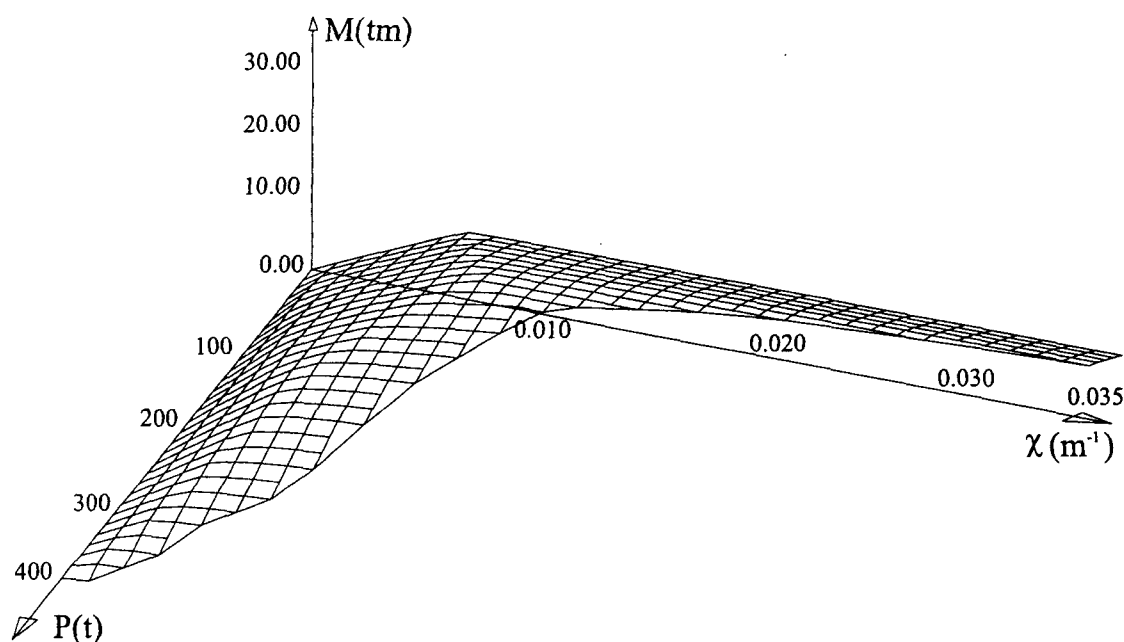


Figura 2.7.4.(a)

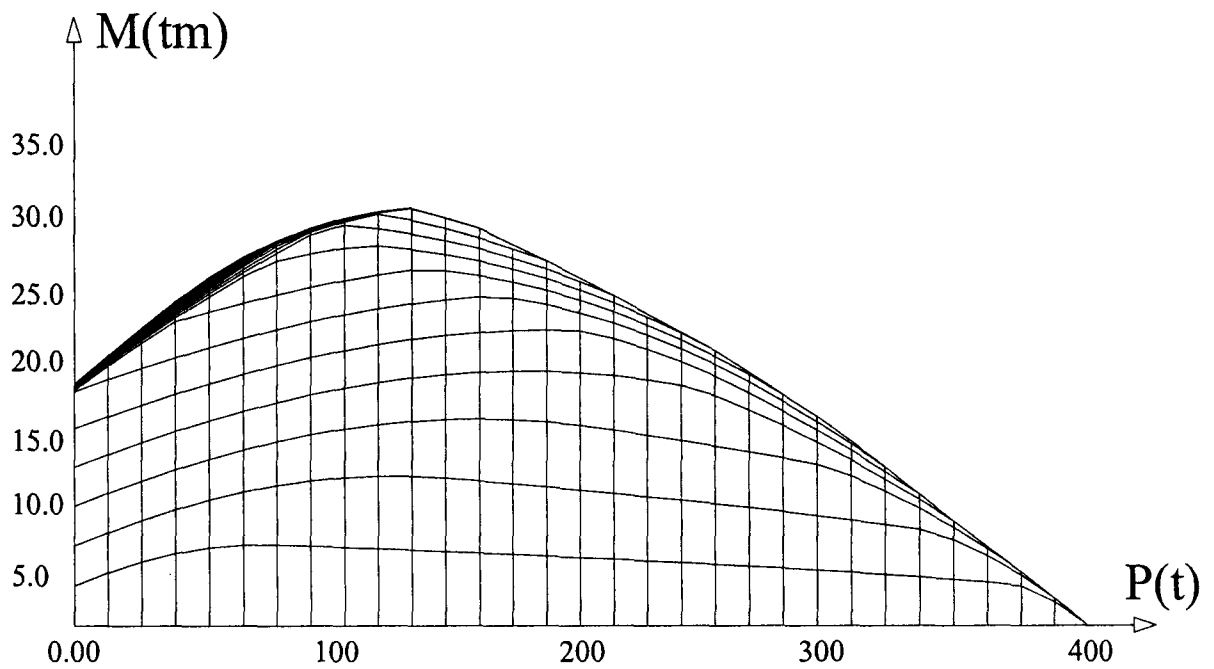


Figura 2.7.4.(b)

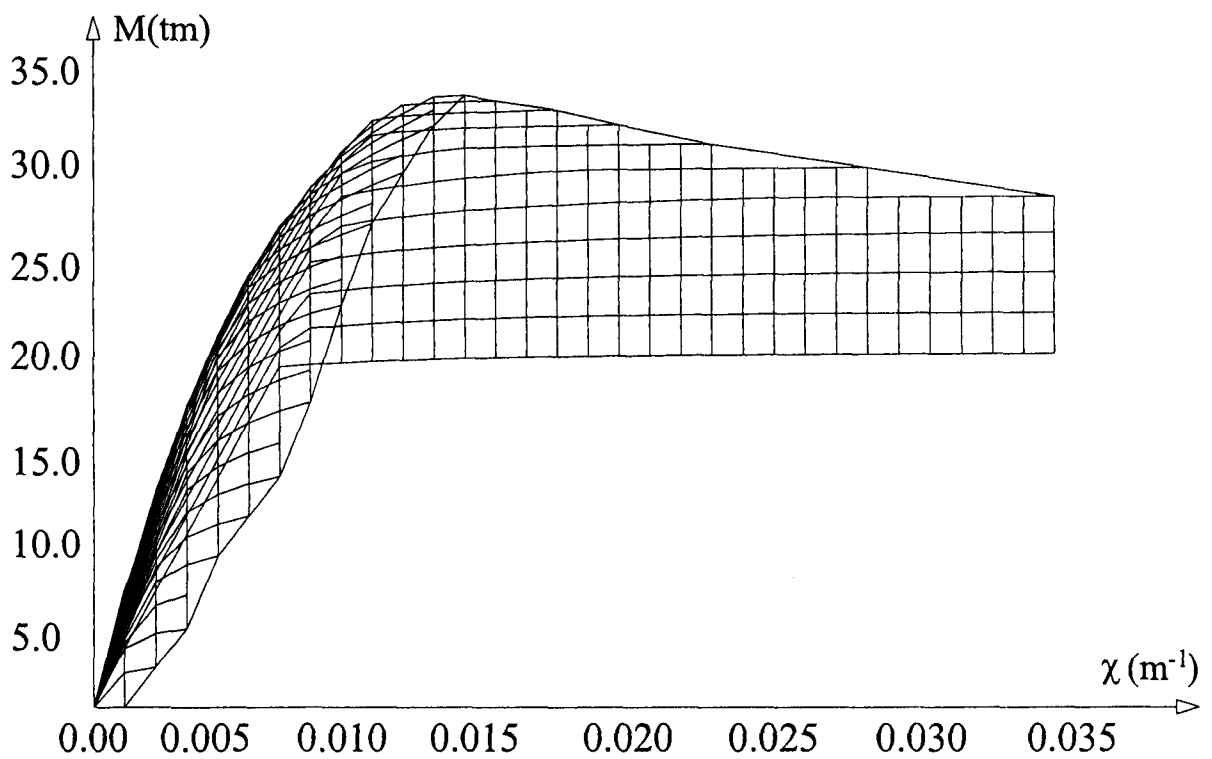


Figura 2.7.4.(c)

Ya se ha visto que el diagrama momento-curvatura $M-\chi$ puede obtenerse de forma analítica, para lo que se precisa fijar unas hipótesis simplificadoras con objeto de facilitar el cálculo, lo cual se traduce en una pérdida de precisión y generalidad, o bien de forma experimental en cuyo caso surgen los inconvenientes de la dificultad de obtención y del elevado coste económico.

Para soslayar estos problemas y dar respuesta a un planteamiento teórico más complejo, cabe pensar en otras vías de obtención de los diagramas momento curvatura, entre las que destacaremos las siguientes

Métodos basados en cálculo numérico: Son una alternativa a los métodos analíticos obteniéndose unos resultados aceptables al compararlos con métodos de ensayo en laboratorio.

Formulación analítica directa. Se trataría aproximar mediante una expresión matemática sencilla la relación $M-\chi$ que se haya obtenido en el laboratorio mediante ensayos para ello la fórmula se hace depender de una serie de parámetros que se ajustan para conseguir una buena aproximación M. Kulicki y N. Kosten [KuK76].

2.7.4 Diagrama trilineal momento-curvatura

Una opción alternativa a los métodos anteriores sería la utilización de diagramas $M-\chi$ formado por rectas que tratan de ajustar el diagrama real. Dadas las características reales de estos diagramas como se indicó en las líneas anteriores se consigue una buena simulación mediante el uso de diagramas formados por rectas, utilizándose diagramas:

- Bilineales (Baker , Cohn, L.N.E.C. Lisboa) de tipo elastoplástico en el que un tramo es elástico recogiendo el tramo formado por las FASES I (OA) y II (A'B) y otro tramo que simula la FASE III.
- Trilineales (Macchi) con tres rectas una para el tramo elástico (OA) otra para el tramo siguiente a la fisuración (A'B) y finalmente otra recta para recoger al proceso de plastificación del acero (BC).

Como indica A. Aguado esta hipótesis introduce, en general, errores inferiores a los que implican otras hipótesis simplificadoras normalmente admitidas. No obstante, hay que tener presente que se exige distinta precisión si se utilizan estos diagramas para dimensionamiento o para análisis.

En general se utilizan diagramas como el indicado en la figura 2.7.5 en la que el diagrama trilineal se adapta al diagrama experimental teniendo en cuenta las siguientes observaciones ([Agu80])

- El escalón A-A' Figura 2.7.5 se considera despreciable ya que tiene un sentido más teórico que real. En los ensayos realizados por el C.E.B. se marca en muy pocos casos.

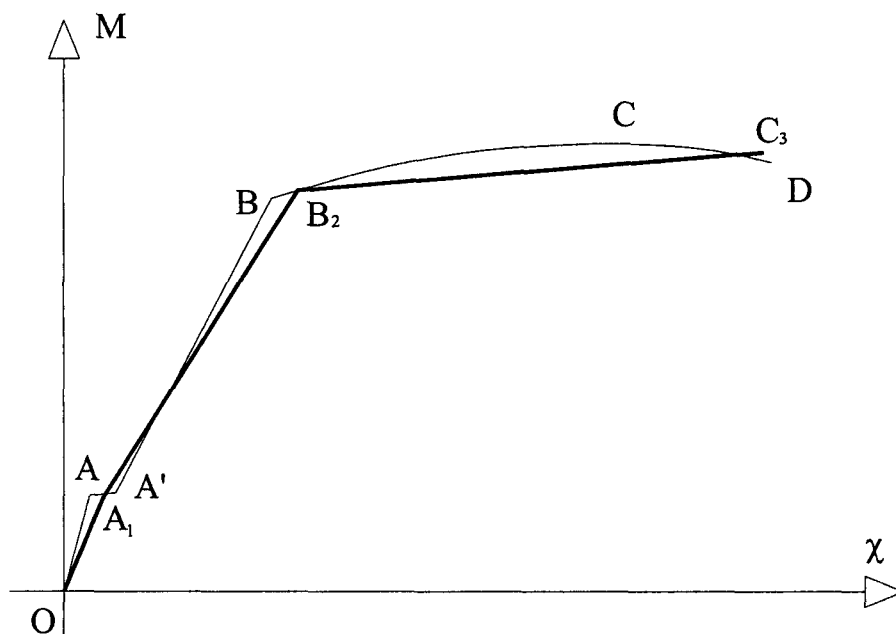


Figura 2.7.5

- La rama representativa de la fase III (estado de la sección próximo al agotamiento), en ningún caso puede ser horizontal ya que representa que para el valor M_u , existen diversos valores de la curvatura. Esta indeterminación es incompatible con la forma de abordar el problema de cálculo no lineal del presente método.
- No se considera la rama descendente del diagrama general $M-\chi$ puesto que supondría una gran complicación de cálculos, no resultando ventajoso, para estructuras corrientes la precisión que se obtiene frente a los inconvenientes que origina. Además, como indican Tichy y Rakosnik [TiR75] su influencia sobre la capacidad portante última es positiva.

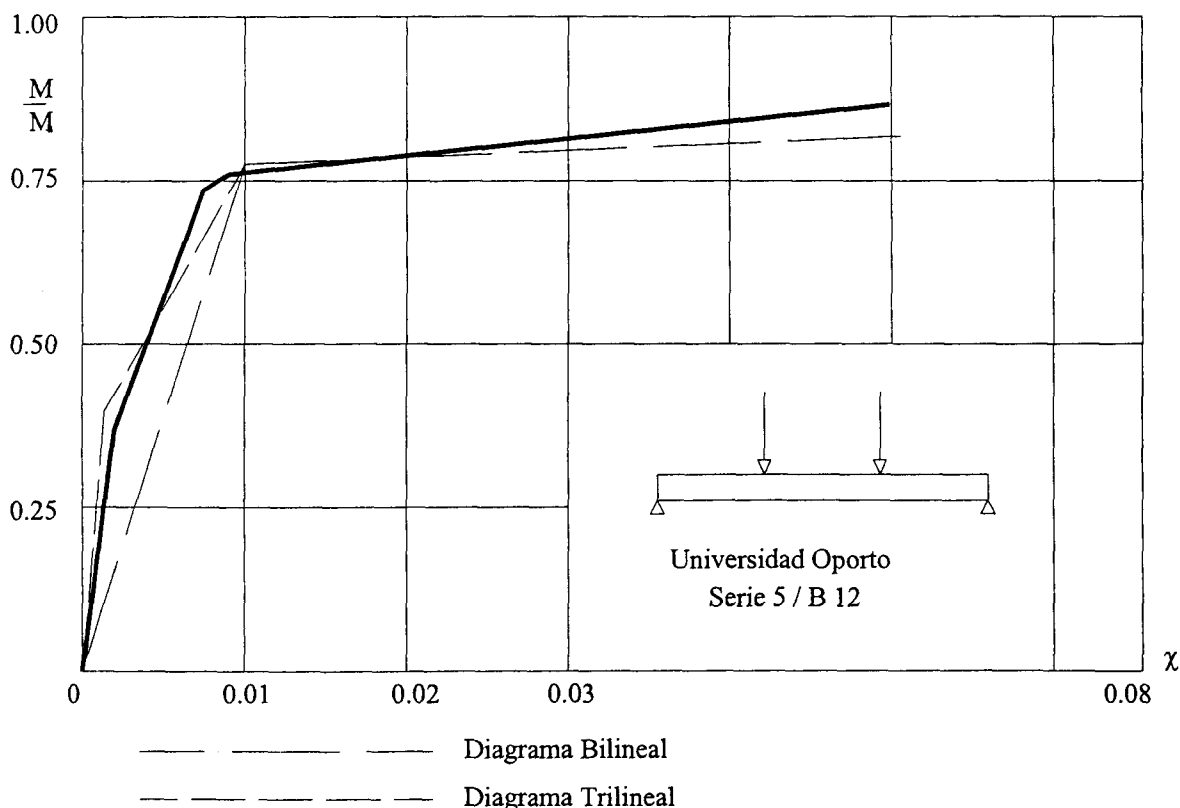


Figura 2.7.6

Como señala A. Aguado la elección del modelo y el método de cálculo depende de la finalidad que se persigue: en el caso de servicio es preciso exigir unas hipótesis más próximas a la realidad con objeto de mejorar la precisión respecto a la solución real. Mientras que en dimensionamiento se pueden utilizar hipótesis menos estrictas, siempre que se obtengan soluciones del lado de la seguridad y la economía.

En el presente estudio se trata de analizar el comportamiento de piezas rectas de hormigón armado de acuerdo con ecuación (1.1.1) que tiene como relación constitutiva del comportamiento la relación $M-\chi$. Tal como se ha visto en las líneas anteriores con la solución trilineal se obtiene un mejor ajuste con respecto a los diagramas obtenidos experimentalmente, por lo que se consigue mejorar la precisión del método de cálculo.

En la Figura 2.7.6 se puede ver el diagrama obtenido experimentalmente en la viga B-12, serie 5 de la Universidad de Oporto dentro del programa internacional de ensayos propugnado por el CEB, así como el ajuste al mismo de un diagrama bilineal y un diagrama trilineal.

El diagrama trilineal reproduce el comportamiento de elementos de hormigón ya que en el diagrama trilineal se consideran las deformaciones no elásticas de la fase fisurada, lo cual permite obtener la distribución real de esfuerzos. Así mismo, permite controlar las condiciones de fisuración y deformación respecto al estado límite de servicio. Al mismo tiempo que con los diagramas trilineales $M-\chi$ se consigue una gran facilidad de cálculo.

2.7.5 Métodos de cálculo no lineal

El avance en el análisis de estructuras de hormigón armado ha ido imponiendo de forma progresiva el uso de métodos de cálculo no lineales.

Dejando a parte los métodos de cálculo lineal, como indica A. Mari [Mar81] los métodos desarrollados para el cálculo de hormigón armado se pueden clasificar en distintos grupos en particular atendiendo a dos aspectos básicos, por una parte el comportamiento de los materiales y por otra la consideración de fenómenos de segundo orden. De acuerdo con estos puntos de vista los distintos métodos se pueden clasificar en los siguientes grupos:

a) No linealidad del material. Dentro de este grupo A. Mari [Mar81] distingue entre:

a.1) Métodos exactos en los que la no linealidad se da en todas las secciones de la estructura.

a.2) Métodos aproximados: la no linealidad ocurre en determinados puntos críticos caracterizados por la aparición de rótulas plásticas en las que se conoce la relación momento-rotación ($M-\theta$). Al mismo tiempo se supone que los elementos estructurales tienen un comportamiento lineal. De forma que la no linealidad se concentra en las rótulas. No considerándose efectos de segundo orden.

b) No linealidad geométrica teniendo en cuenta los fenómenos de segundo orden pero considerando un material lineal. Por esta última razón estos métodos tampoco se consideran en la línea del presente trabajo.

Cuando se aplican las técnicas matriciales se puede distinguir entre aquellos métodos iterativos en los que varía la matriz de rigidez de la estructura y los métodos iterativos en los que la matriz de rigidez se mantiene constante variando en este caso las fuerzas exteriores.

c) No linealidad geométrica y del material.

La consideración de la no linealidad geométrica y del material ha dado lugar a distintos métodos de cálculo.

- En este tipo de métodos se sitúa el MEF: Cambio de la matriz de rigidez.[Aas73].
- Método general propuesto por A. Grelat [Gre78].
- Métodos simplificados (A. Grelat y F. El Kafrawy).
 - Método del momento amplificado.
 - Método C.E.B. y columna modelo.
 - Método basado en el estado de equilibrio.
- Método basado en la hipótesis de la deformada senoidal.
- Método basado en las deformaciones impuestas [Mac73], [Mar81].

2.7.6 Comprobación de elementos esbeltos

Los métodos generales comentados en el apartado anterior son también aplicables al análisis y dimensionamiento de elementos sometidos a compresión como es el caso de las viga-columna.

En el cálculo general de estructuras la comprobación de elementos sometidos a compresión en los que se consideran distintas hipótesis de carga la comprobación se puede hacer mediante el uso de curvas de interacción. Las curvas de interacción se obtienen mediante el estudio aislado del pilar.

Métodos generales.

En este caso se lleva a cabo un cálculo global de la estructura de la que forma parte el elemento viga-columna estudiado.

En un análisis general de estructuras esbeltas se debe tener en cuenta:

- Condiciones de equilibrio a nivel de estructura (entre esfuerzos externos e internos, cargas y reacciones) en la configuración deformada de la estructura y a nivel de sección (entre esfuerzos y tensiones).
- Condiciones de compatibilidad a nivel de estructura (identificación de la curvatura con la derivada segunda de la deformada, condiciones de contorno) y a nivel de sección (deformación plana, adherencia hormigón acero).
- Condiciones de material que en el caso del hormigón se consideran no solo la no linealidad como ya se ha indicado sino también los fenómenos reológicos, fisuración tal y como se indica en el manual del C.E.B. "Pandeo - inestabilidad" [CEB78].

Este tipo de cálculo general requiere la utilización de técnicas como el método de los elementos finitos en la línea de Aas-Jakobsen [Aas73].

Método de Jäger.

Como se indicó en el apartado 2.1.5 Jäger presentó en Comité Europeo del Hormigón una tesis en la que proponía un método para obtener la deformada del pilar [Car92]. Siguiendo a J. M. Carreras [Car92] para hallar la deformada se acepta una deformada inicial de tipo senoidal de forma que las excentricidades de primer orden (e^I) dan lugar a unos esfuerzos $P \cdot e^I$ que a su vez provocan unas nuevas deformaciones (e^{II}). Con las nuevas deformaciones ($e^I + e^{II}$) se calculan los nuevos esfuerzos con los que se repite el ciclo hasta que la diferencia entre dos iteraciones se considere despreciable. Operando de esta forma Jäger (véase en la figura 2.7.7 el organigrama que propone [Car92]) determina unos coeficientes menores que la unidad $1/W_p$ para distintas esbelteces y excentricidades de primer orden por los que se multiplica la resistencia inicial del hormigón (σ_i) para obtener la resistencia última del hormigón:

$$\sigma_u = \frac{1}{W_p} \sigma_i$$

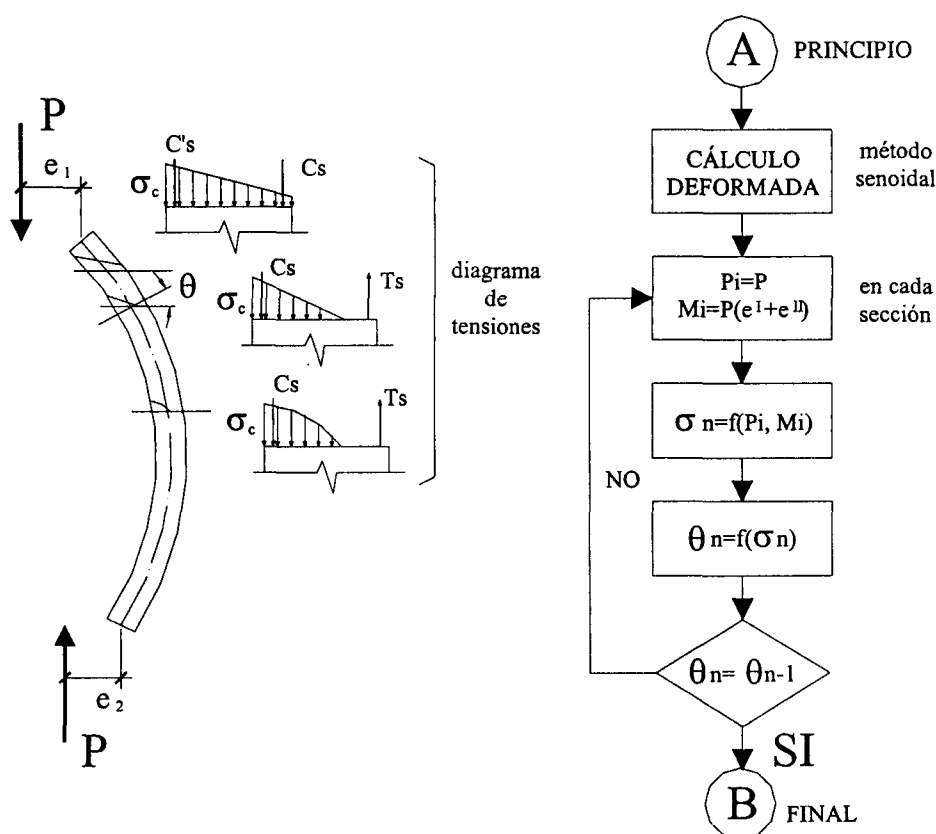


Figura 2.7.7

Esta metodología de cálculo por aproximaciones ha sido adoptada en otros estudios para analizar el comportamiento en segundo orden de piezas de hormigón en concreto en [CEB78].

Debido a la complejidad del cálculo general para la obtención de esfuerzos y de las curvas de interacción en la actualidad se han desarrollado distintos métodos simplificados que en una primera fase permiten el cálculo de esfuerzos en régimen lineal y a partir de estos esfuerzos llevar a cabo la comprobación de la seguridad del pilar aislado utilizando los métodos generales indicados en el apartado 2.6 o métodos más prácticos como los recogidos en las distintas normativas como el de la columna equivalente, la columna modelo o la deformada senoidal.

Métodos simplificados.

En esta caso se lleva a cabo un análisis de la pieza aislada considerándola sometida a unos esfuerzos calculados por un procedimiento previo encuadrado en cualquier de los métodos indicados en el apartado anterior. Una vez conocidos los esfuerzos en los extremos se aísla la pieza considerándola incluso simplemente apoyada en sus extremos. Una excelente exposición de carácter monográfico en la que se recogen los métodos habitualmente empleados es la obra de Calos Lopez Agüi [Lop97]

Cuando se aplican este tipo de métodos se suelen considerar una serie de factores que tratan de mantener el comportamiento que la pieza tendría en la estructura. En particular alguno de los factores que influyen en el son:

- Longitud de pandeo y esbeltez.
 - Error permitido
 - Propuestas normativas del limite inferior de la esbeltez λ .

Estudio que tiene en cuenta la esbeltez en el análisis de los pilares han sido llevados a cabo por [RiM87], [Hel02].

- Condiciones de vínculo.
 - Rigidez a flexión en lo extremos.
 - Momentos en los extremos.
 - Del mismo signo.
 - De signo contrario.
- Translacionalidad de la estructura.

Además en estos métodos no se pueden considerar cargas perpendiculares a la directriz y solo momentos en los extremos de la pieza.

Método de la columna modelo.

El C.E.B. en su publicación "Buckling and instability" propone métodos simplificados entre los que se encuentra el Método de la Columna Modelo en el que un pilar se asimila a un soporte esbelto empotrado en su base y libre en su extremo superior lo cual equivale a un pilar simétrico simplemente apoyado con acciones también simétricas en los extremos.

La pieza se considera estáticamente determinada de forma que se conocen los esfuerzos de primer orden mientras que para los esfuerzos de segundo orden debidos a la excentricidad del axil se supone que la deformada en el extremo viene dada por:

$$\delta = \chi \frac{l^2}{10} \quad (2.7.8)$$

δ = flecha en el extremo.

χ = curvatura

Dicha fórmula se corresponde con la deformada senoidal aproximando π^2 por 10.

Dado un axil y una sección se puede determinar la relación M- χ y los momentos de segundo orden:

$$M_2 = P\chi \frac{l^2}{10} \quad (2.7.9)$$

de forma que el máximo momento total se obtiene en el punto en el que la tangente es paralela a la directriz geométrica de M_2 . El momento máximo de primer orden que puede soportar la sección es:

$$M_1 = M_A - M_2$$

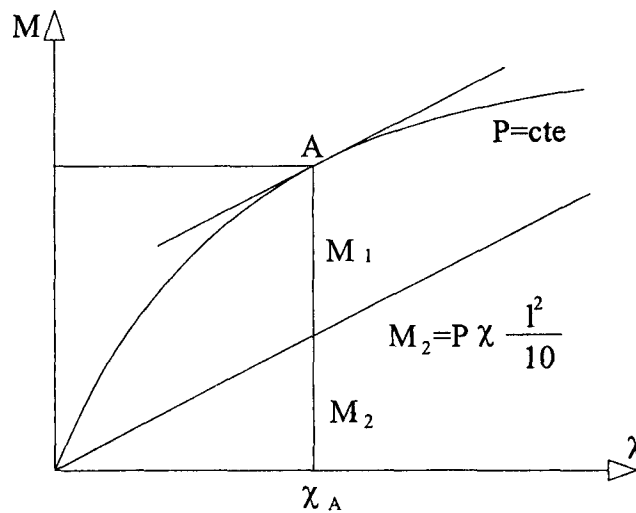
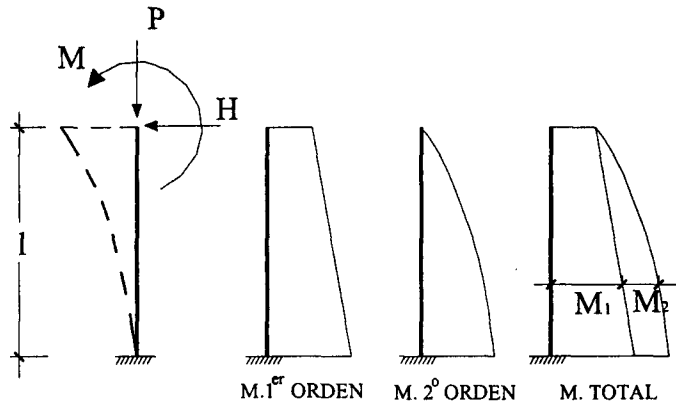


Figura-2.7.8

Lo que permite conocer el momento máximo de primer orden que puede soportar la sección.

Método de la deformada senoidal.

Otra interpretación del arco de seno fue utilizada por Robinson, Fouré y Bourghli [RFB75] para sugerir que dicho arco no representa en realidad la deformada del pilar sino la distribución de excentricidades totales de la directriz deformada respecto de la línea en la que se encuentra el esfuerzo axial que se denomina como línea de presiones de la carga siendo al mismo tiempo el eje de abscisas de la función seno en la que se sitúa la directriz de la pieza. Esto permite considerar estados de carga con excentricidades distintas en los extremos. Al no ser simétricas las condiciones en los extremos el máximo momento no se da en el centro de la pieza. Igual que antes la sección en la que se da el máximo momento sirve para el dimensionado del pilar.

Si e_c es la excentricidad máxima en la sección crítica en el máximo de la senoide y e_1 y e_2 las excentricidades en los extremos con $e_1 > e_2$, se obtiene la relación e - χ :

$$\chi = \frac{e_t}{l^2} \left(\arccos \frac{e_1}{e_t} + \arccos \frac{e_2}{e_t} \right)^2 \quad (2.7.9)$$

Si las excentricidades son iguales $e_1=e_2$, la relación anterior es:

$$\chi = 4 \frac{e_t}{l^2} \left(\arccos \frac{e_1}{e_t} \right)^2 \quad (2.7.10)$$

Relación que se presenta en la figura siguiente.

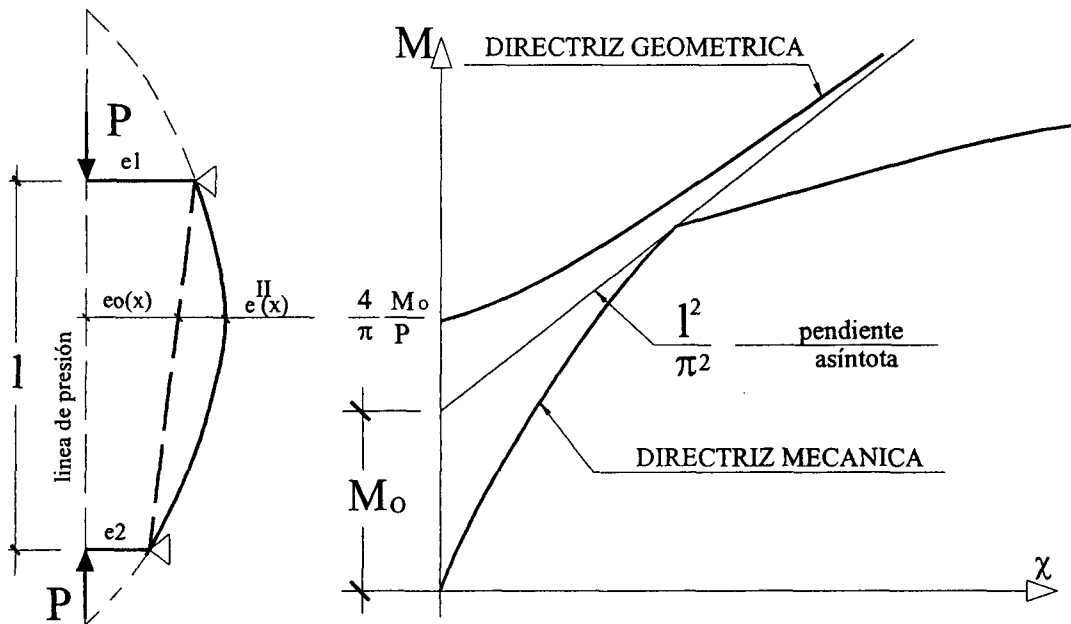


Figura-2.7.9

Método de las curvas de referencia.

Un método de gran interés basado en la deformada senoidal orientado al dimensionamiento y eminentemente práctico es el método de las curvas de referencia propuesto por H. Corres [Cor80].

El método está basado en el quiebro que presenta la relación momentos curvatura cuando se inicia la FASE III de plastificación del acero en tracción y que permite ajustar un diagrama marcadamente bilineal para los casos habituales.

Representando las relaciones momento curvatura de una sección dada para distintas cuantías como se indica en la figura siguiente, se pueden dibujar dos curvas:

- Curva CRI uniendo los puntos de quiebro donde se inicia la FASE III. Curva de referencia de inestabilidad.

- Curva CRA en la que se agota la sección. Curva de referencia de agotamiento.

Con estas curvas se prescinde de la superficie mecánica.

Suponiendo la deformada senoidal como hace H. Corres o cualquier otro método que permita determinar la directriz geométrica se entra en el gráfico de las curvas de referencia, la intersección de la directriz geométrica con las curvas CRI y CRA proporciona dos cuantías de armadura ω_i y ω_a , la menor de las cuales es la cuantía estricta de dimensionamiento, indicando además el tipo de rotura.

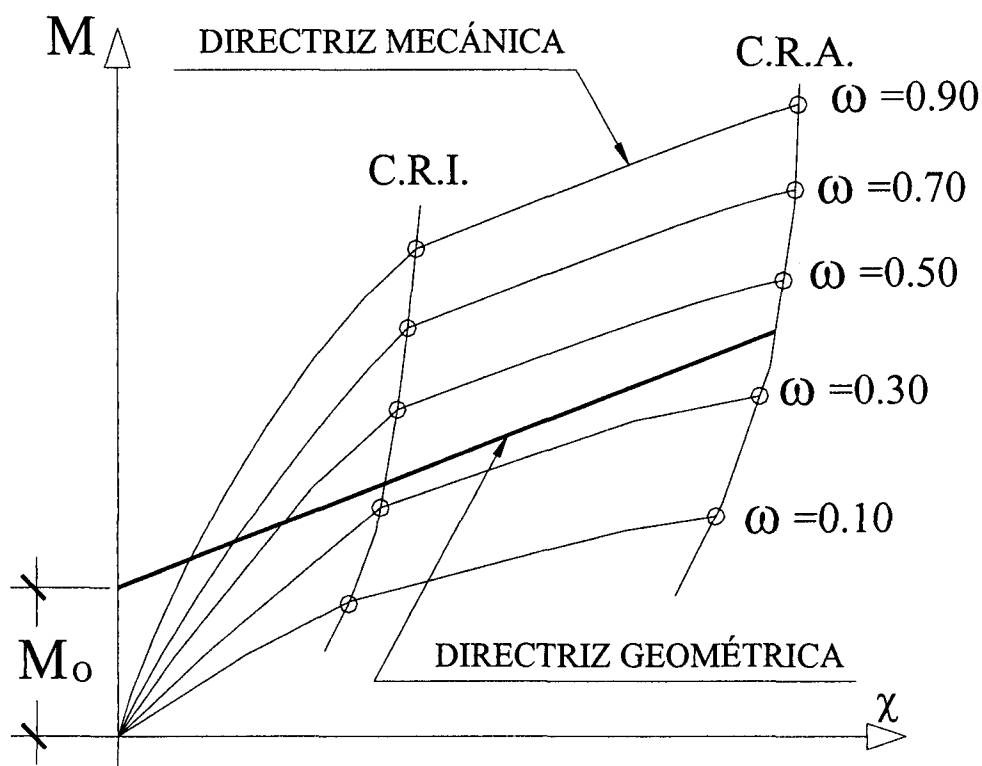


Figura 2.7.10

2.8 RESUMEN Y COMENTARIOS FINALES

En este capítulo se ha llevado a cabo una revisión histórica del problema de pandeo de pilares destacando varios aspectos: creación del modelo, desarrollo de los instrumentos de análisis, ampliación del modelo recogiendo situaciones más complejas y la repercusión de la utilización de métodos numéricos, mencionando también de manera especial las técnicas particulares que se utilizan en el campo del hormigón armado.

Después se ha recogido con cierto detalle el problema clásico de pandeo de la barra con linealidad del material y no linealidad geométrica. Problema de gran interés tanto desde el punto de vista teórico como desde el práctico. A continuación se ha hecho una introducción al problema objeto de esta investigación. En relación con el mismo tiene especial interés el concepto de superficie mecánica al que se le ha dedicado un apartado.

Se ha realizado una deducción teórica para la construcción de dicha superficie mecánica poniendo de manifiesto algunas de sus propiedades. Una de ellas que consideramos de gran interés para este trabajo de investigación, es que pueden distinguirse claramente tres fases que se ponen de manifiesto en comprobaciones experimentales y que permiten que la ley momento curvatura pueda aproximarse mediante diagramas trilineales que pueden simplificarse en algunos casos a diagramas bilineales.

Después se ha efectuado una presentación esquemática del fenómeno de pandeo distinguiendo entre estabilidad y bifurcación dando unos criterios básicos para analizarlo. En un apartado posterior se enumeran y describen los métodos habitualmente empleados para el estudio del pandeo de pilares en régimen no lineal destacando entre otros, el método de la columna equivalente, el de Newmark y el de Jezek. Algunos de estos métodos como se ha indicado se aplican también al campo del hormigón armado. Para este último se han desarrollado métodos simplificados de gran utilidad práctica como el de la columna modelo, el de la deformada senoidal y el de las curvaturas de referencia.

Toda la exposición realizada en el capítulo ha sido fundamental para situarnos en el ámbito donde se lleva a cabo el análisis teórico-práctico del pandeo de pilares en régimen no lineal. Ello ha sido posible debido a los trabajos de distintos autores destacando las obras de carácter general de W. F. Chen et al. [ChA76], [ChL87], [ChT94], [CGL96], y de Z. P. Bazant y L. Cedolin [BaC91] y también y en un entorno más próximo y en el campo del hormigón las aportaciones de J. Arenas [Are80], J. Murcia [Mur72], A. Aguado [Agu80], A. Marí [Mar81], H. Corres [Cor80] y J. C. López [Lop97].

Por nuestra parte la aportación a esta línea de investigación se centra en la propuesta de métodos de análisis de pilares en régimen no lineal con no linealidad del material que están basados en el concepto de pilar lineal equivalente que permite a través de la teoría de elementos finitos y splines generalizados el desarrollo de una nueva metodología para el estudio cualitativo y cuantitativo del problema. La misma junto con sus fundamentos se describe en los siguientes capítulos de este trabajo.

CAPÍTULO 3

SPLINES GENERALIZADOS

3.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior de esta memoria se han expuesto varios métodos de análisis del problema de pandeo de pilares en régimen no lineal. Se ha concretado además el modelo a analizar en este trabajo, el cuál viene definido por una ecuación diferencial ordinaria de cuarto orden no lineal con las correspondientes condiciones de contorno, donde la no linealidad del problema se debe a la falta de proporcionalidad existente en la relación momento-curvatura.

Por otra parte, el objetivo de este capítulo es exponer la técnica de cálculo de elementos finitos, basada en la teoría de splines generalizados, aplicada al análisis del problema de pandeo. Dicha teoría y en particular la metodología matricial de la misma se ha desarrollado y aplicado en trabajos previos: [ROC02], [RoO98], [RoO99], que tenían el propósito de poner de manifiesto la utilización de procedimientos sistemáticos de cálculo y análisis tanto de problemas de interpolación en el campo de los gráficos como de resolución de problemas de contorno lineales aplicados al estudio de diferentes modelos de vigas y también de problemas de valor inicial aplicados al campo de la dinámica. En definitiva se trataba de englobar dentro de una misma metodología campos que tradicionalmente son estudiados de forma separada.

Se ha considerado de interés incluir aquí una parte importante del material publicado con objeto de exponer de forma más clara la aplicación que se hace de dicha teoría al problema de pandeo, evitando así las referencias constantes que habría que hacer en otro caso a dichas publicaciones. La descripción del concepto de spline generalizado, la formulación matricial y la aplicación de dichos splines al análisis de problemas de contorno lineales se efectúa con un enfoque generalista en el desarrollo del capítulo, pretendiendo con ello exponer el alcance y carácter sistemático de la formulación realizada, incluyendo en dichos puntos a modo de caso particular, la aplicación relativa al spline cuyo operador diferencial corresponde al de la flexión de la pieza recta comprimida. Otro modo posible de desarrollo del trabajo hubiera sido tratar únicamente los elementos finitos y splines generalizados adaptados y aplicados desde el principio al problema concreto de pandeo, sin embargo pensamos que la posible ganancia en claridad exposición no compensaría la pérdida de perspectiva y de generalidad del planteamiento. Se finaliza esta parte destacando dos aspectos que consideramos esenciales en la aplicación de los splines en la resolución de problemas de contorno, como son la propiedad de solución nodal exacta y la idea de acción repartida equivalente y sus consecuencias.

El capítulo se termina con un apartado dedicado al análisis del pandeo en régimen lineal empleando splines generalizados. Se incluye en el mismo un ejemplo en el que se aplican los resultados principales aportados a lo largo del desarrollo, destacando la ventaja que supone en el análisis la utilización de elementos finitos basados en los splines generalizados, los cuales permiten determinar soluciones nodalmente exactas y asimismo se destaca también en el ejemplo la posibilidad de realizar una optimización de resultados a partir del uso del concepto de acción repartida equivalente. Para ello se hace una

comparación entre los desplazamientos, giros y leyes de esfuerzos, que se obtienen a partir de la solución exacta, con los correspondientes resultados que se derivan a partir de la aplicación de la metodología desarrollada empleando, para poner de manifiesto la potencia de la misma, una discretización con pocos elementos.

3.2 SPLINES GENERALIZADOS

Los splines o funciones splines constituyen, hoy día una herramienta de gran utilidad en la resolución de problemas de ingeniería relacionados con el ajuste y trazado de curvas y superficies, y diseño gráfico en general ([BBB,87], [BFK84], [Boo78], [Die93], [Far88], [QiD87], [RoA90], [Spä95], [Yam88]) así como con el análisis por elementos finitos ([AuC93], [CFW82], [LeA90], [LuF92], [TLC86]).

Desde el punto de vista histórico puede indicarse de acuerdo con Schumaker [Sch81], que dichas funciones fueron ya utilizadas en trabajos de Runge en 1901, de Eagle en 1928, de Quade y Collatz en 1938, y Favard en 1940. Sin embargo, en ninguno de ellos se daba ese nombre a tales funciones, pues éstas eran denominadas de manera un tanto genérica como funciones de interpolación osculatoria.

El término "spline", aparece por primera vez en un trabajo de Schoenberg en 1946, en el cual se justifica dicho término por la relación que hay entre la gráfica de ciertas funciones polinómicas a trozos y la deformada del dispositivo mecánico de trazado, utilizado por los delineantes, denominado en la terminología inglesa, con el nombre de spline. En definitiva se está haciendo referencia al spline cúbico que, como es conocido, constituye el modelo matemático de la elástica para el caso de acciones puntuales, cuando se aproxima linealmente la curvatura mediante la derivada segunda del desplazamiento.

En la actualidad la teoría de splines se encuentra en una fase de desarrollo muy avanzada habiendo seguido en este sentido un proceso análogo al de la teoría de elementos finitos, pues en cierto modo es parte integrante de esta última. En la exposición que se efectúa a continuación se aborda la construcción de los splines generalizados, considerando dichas funciones como soluciones, en el sentido de las distribuciones, de ciertos problemas de contorno autoadjuntos, para los que el término independiente de la ecuación diferencial viene definido por funciones que representan, en términos físicos, acciones de tipo puntual definidas mediante deltas de Dirac y sus derivadas.

Se obtiene la ecuación matricial del spline realizando su formulación en desplazamientos, utilizando la terminología del análisis de estructuras. La construcción matricial de estas funciones, conduce de manera natural a un cálculo por elementos finitos que permite obtener soluciones nodalmente exactas en ciertos problemas de contorno, obteniendo en este sentido los mismos resultados que P. Tong [Ton69] aunque desde un planteamiento diferente. En este último aspecto, la metodología que se propone guarda gran relación con el método de Trefftz ([Her84]), y con lo que podría ser una versión matricial de la función de Green o método de los elementos de contorno en dimensión uno. Asimismo el planteamiento seguido nos ha permitido introducir de manera natural el concepto de acción repartida equivalente. Sobre dicho concepto se han desarrollado algunas aplicaciones a los modelos de vigas de Bernoulli-Euler y de Timoshenko [RoO98], [ROC02], obteniendo

resultados, sobre la aproximación de la solución y magnitudes derivadas de ella como el momento flector y el esfuerzo cortante, que son claramente ventajosos respecto a los que se obtienen mediante los elementos finitos polinómicos usuales. En este capítulo como se ha indicado se hace una aplicación de dichos resultados sobre solución nodal exacta y acciones repartidas equivalentes al análisis de la pieza comprimida en régimen lineal.

3.2.1 Preliminares

Se exponen a continuación algunas propiedades de los operadores diferenciales de orden m y $2m$, que son utilizadas posteriormente en la construcción de splines generalizados y particularmente en las aplicaciones que se hacen de dichas funciones en el análisis del problema de pandeo. Dichas propiedades son consecuencia de la fórmula de integración por partes.

Sea el operador diferencial L de orden m ($m \geq 1$) definido en el espacio de funciones $C^m[a, b]$

$$L(u) = a_m D^m u + a_{m-1} D^{m-1} u + \dots + a_1 D u + a_0 u \quad (3.2.1)$$

donde para $0 \leq j \leq m$, $D^j \cdot \equiv \left(\frac{d^j}{dx^j} \cdot \right) \equiv (\cdot)^{(j)}$, y $a_j = a_j(x) \in C^j[a, b]$, con $a_m \geq \delta > 0$, para todo $x \in [a, b]$. Integrando por partes el producto, $L(u)v$, en el intervalo $[a, b]$, donde v es una función genérica del espacio $C^m[a, b]$, se obtiene [Inc56, p. 211], [Sta79, p. 168] la relación conocida como fórmula de Green:

$$\int_a^b L(u)v dx = P(u, v) \Big|_a^b + \int_a^b L^*(v)u dx \quad (3.2.2)$$

que es equivalente a la siguiente expresión, en forma diferencial, conocida como identidad de Lagrange

$$L(u)v = \frac{d}{dx} \{P(u, v)\} + L^*(v)u$$

donde L^* es el operador adjunto (adjunto formal) de L y P es la llamada concomitante bilineal. Las expresiones de $L^*(v)$ y $P(u, v)$ son respectivamente

$$\begin{aligned} L^*(v) &= \sum_{j=0}^m (-1)^j D^j (a_j v) = \\ &= (-1)^m D^m (a_m v) + (-1)^{m-1} D^{m-1} (a_{m-1} v) + \dots + (-1) D (a_1 v) + a_0 v \end{aligned}$$

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^{m-1} u^{(i)} p_i(v)$$

donde

$$\begin{aligned}
p_0(v) &= (-1)^{m-1} D^{m-1}(a_m v) + (-1)^{m-2} D^{m-2}(a_{m-1} v) + \dots + (-1)D(a_2 v) + a_1 v \\
p_1(v) &= (-1)^{m-2} D^{m-2}(a_m v) + (-1)^{m-3} D^{m-3}(a_{m-1} v) + \dots + (-1)D(a_3 v) + a_2 v \\
&\vdots \\
p_{m-2}(v) &= (-1)D(a_m v) + a_{m-1} v \\
p_{m-1}(v) &= a_m v
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

es decir los operadores p_i vienen definidos por la expresión

$$p_i(v) = \sum_{j=0}^{m-1-i} (-1)^j D^j(a_{j+1+i} v)$$

tal y como se deduce, de manera sencilla, mediante el proceso de integración por partes indicado. Es interesante, por otra parte, interpretar los operadores diferenciales p_i como adjuntos de otros operadores de orden $m-1-i$.

En efecto, obsérvese que llamando $r_i(v) = \sum_{j=0}^{m-1-i} a_{j+1+i} D^j v$ se tiene que $p_i = r_i^*$ y la expresión de la concomitante puede ponerse como

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^{m-1} u^{(i)} r_i^*(v)$$

La expresión (3.2.2) de la fórmula de Green puede ponerse en la forma

$$\int_a^b L(u) v dx = \sum_{i=1}^{2m} l_i(u) \bar{l}_i(v) + \int_a^b L^*(v) u dx$$

donde $l_i(u)$ y $\bar{l}_i(v)$ son las formas lineales siguientes

$$\begin{aligned}
l_k(u) &= u^{(k-1)}(a), \quad l_{k+m}(u) = u^{(k-1)}(b) \\
\bar{l}_k(v) &= -p_{k-1}(v)_{x=a}, \quad \bar{l}_{k+m}(v) = p_{k-1}(v)_{x=b} \\
k &= 1, \dots, m
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

y son las que en la terminología de elementos finitos y elementos de contorno generan las llamadas condiciones de contorno esenciales y naturales [StF73, p. 117], [Kyt95, p.15].

Propiedades de interés, para nuestros propósitos, de los operadores diferenciales L y L^* son las siguientes [Inc56, pp. 126,131]:

(I) El operador adjunto de L^* es L , es decir $(L^*)^* = L$. Asimismo el adjunto de la composición de dos operadores es la composición de los adjuntos en orden contrario, es decir $(L_1 L_2)^* = L_2^* L_1^*$

Cuando un operador diferencial coincide con su adjunto se dice que es *autoadjunto*. Se tienen para este caso y limitándonos a orden par del operador, los siguientes resultados:

(II) Todo operador diferencial L autoadjunto de orden $2m$ puede ponerse en la forma

$$L(u) = \sum_{j=0}^m (-1)^j D^j (a_j D^j u).$$

Veamos a continuación una aplicación de la fórmula de Green al caso donde el operador diferencial L es autoadjunto.

Consideremos en primer lugar el caso donde el operador está en la forma autoadjunta usual

$$L(u) = \sum_{j=0}^m (-1)^j D^j (a_j D^j u) \quad (3.2.5)$$

Integrando por partes el producto $L(u)v$ en el intervalo $[a, b]$, donde v es una función arbitraria de la clase C^{2m} en el intervalo citado resulta

$$\int_a^b L(u)v dx = ((-1)^{\sum_{i=0}^{m-1} v^{(i)}} P_i(u)) \Big|_a^b + a(u, v) \quad (3.2.6)$$

donde de manera análoga a (3.2.3), los operadores P_i están definidos como

$$\begin{aligned} P_0(u) &= (-1)^{m-1} D^{m-1} (a_m D^m u) + (-1)^{m-2} D^{m-2} (a_{m-1} D^{m-1} u) + \dots + a_1 D u \\ P_1(u) &= (-1)^{m-2} D^{m-2} (a_m D^m u) + (-1)^{m-3} D^{m-3} (a_{m-1} D^{m-1} u) + \dots + a_2 D^2 u \\ &\vdots \\ P_{m-3}(u) &= (-1)^2 D^2 (a_m D^m u) + (-1) D (a_{m-1} D^{m-1} u) + a_{m-2} D^{m-2} u \\ P_{m-2}(u) &= (-1) D (a_m D^m u) + a_{m-1} D^{m-1} u \\ P_{m-1}(u) &= a_m D^m u \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

y $a(u, v)$ es la forma bilineal simétrica definida como

$$a(u, v) = \int_a^b \left(\sum_{j=0}^m a_j D^j u D^j v \right) dx \quad (3.2.8)$$

La expresión (3.2.6) puede ponerse también en la forma siguiente

$$\int_a^b L(u)v dx = -\sum_{i=1}^{2m} l_i(v)\bar{l}_i(u) + \int_a^b \sum_{j=0}^m a_j D^j u D^j v dx \quad (3.2.9)$$

que se reduce, integrando por partes el segundo sumando del segundo miembro, a esta otra

$$\int_a^b L(u)v dx = \sum_{i=1}^{2m} l_i(u)\bar{l}_i(v) - \sum_{i=1}^{2m} l_i(v)\bar{l}_i(u) + \int_a^b L(v)u dx \quad (3.2.10)$$

donde para (3.2.9) y (3.2.10) las formas lineales l_i son las mismas que en (3.2.4), sin embargo las \bar{l}_i están definidas ahora por

$$\begin{aligned} \bar{l}_k(u) &= -P_{k-1}(u)_{x=a}, \quad \bar{l}_{k+m}(u) = P_{k-1}(u)_{x=b} \\ k &= 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Obsérvese que cuando en (3.2.10) u y v son funciones pertenecientes al núcleo del operador L resulta la siguiente expresión de reciprocidad

$$\sum_{i=1}^{2m} l_i(u)\bar{l}_i(v) = \sum_{i=1}^{2m} l_i(v)\bar{l}_i(u) \quad (3.2.12)$$

Por otra parte, en el caso de que u y v verifiquen en $[a, b]$, $L(u) = f$, $L(v) = g$ se tiene de (3.2.9)

$$a(u, v) - \sum_{i=1}^{2m} l_i(v)\bar{l}_i(u) = \int_a^b f v dx, \quad a(v, u) - \sum_{i=1}^{2m} l_i(u)\bar{l}_i(v) = \int_a^b g u dx$$

y de la simetría de $a(u, v)$

$$\sum_{i=1}^{2m} l_i(v)\bar{l}_i(u) + \int_a^b f v dx = \sum_{i=1}^{2m} l_i(u)\bar{l}_i(v) + \int_a^b g u dx \quad (3.2.13)$$

En un apartado posterior, se interpretan las relaciones anteriores, (3.2.12) y (3.2.13), en términos del teorema de reciprocidad [PiW94, p. 149], [Tim83, pp. 207 y 320].

3.2.2. Concepto de spline generalizado

Un spline es una función definida a trozos sobre varios subintervalos adyacentes, que tiene cierto grado de regularidad en el dominio de definición constituido por la unión de dichos subintervalos, esto es, se tiene la continuidad de la función y de las derivadas hasta las de un orden determinado en el dominio. El tipo de spline más extendido es el spline ordinario o función spline de grado k , definido por polinomios de grado menor o igual que k en

cada subintervalo, de modo que la función es continua y con derivadas continuas hasta la de orden $k - 1$ en el dominio formado por la unión de los subintervalos. Para los splines generalizados, cuya definición precisa se da después, la función a trozos viene definida por funciones en general no polinómicas, que son soluciones en cada subintervalo de una ecuación diferencial homogénea.

La construcción de los splines polinómicos de grado k para k pequeño (menor o igual que tres) es sencilla y puede abordarse de manera directa a partir de la definición. Para el caso cúbico conviene, como se sabe, emplear como incógnitas, en lugar de los coeficientes de los polinomios cúbicos de los distintos subintervalos, bien a las derivadas primeras o bien a las derivadas segundas de la función en los nodos de separación de los subintervalos. Esta elección de incógnitas auxiliares no es fortuita, pues además de reducir el número de incógnitas a aproximadamente la cuarta parte, tiene la ventaja de poder realizar una interpretación estructural de las mismas en términos de giros y momentos flectores de una cierta elástica. Por otra parte llama la atención para este caso de los splines cúbicos y su determinación mediante la derivada segunda en los nodos, la ausencia de referencias explícitas de tipo histórico, en la amplia literatura consultada sobre splines y en relación con el procedimiento de cálculo, a la ecuación de los tres momentos establecida por Bertot en 1855 y Clapeyron en 1857 [Tim83, p.145] a pesar de que en la mayor parte de los textos y artículos denominan momentos a las derivadas segundas en los nodos.

También en relación con la propiedad de mínima norma en teoría de splines establecida en el teorema de Holladay en 1957 [ANW67, p.3], no se ha reconocido de manera fehaciente, por lo que puede apreciarse por la omisión de citas, el origen de dicha propiedad en los métodos energéticos iniciados por Clapeyron y desarrollados con profundidad por Castigliano en 1875 y 1879.

Para splines de grado superior, la construcción directa de tales funciones a partir de la definición, mediante la simple manipulación algebraica, no resulta tan inmediata como en los casos citados, incluso la obtención de las propiedades fundamentales puede resultar un proceso un tanto artificioso. Véase a modo de ejemplo la construcción y estudio de propiedades de los splines de quinto grado, realizado en [ANW67, p. 143], [Spä69], [MHH75] y [Spä95, p. 181]. Por otra parte hay que decir que la determinación de splines mediante bases de B-splines [Boo78] y en particular la construcción de dichas bases mediante la fórmula de recurrencia de Cox-de Boor ha facilitado en gran medida la obtención de funciones splines, especialmente en el caso de splines polinómicos.

Se puede apreciar en los textos más conocidos sobre splines: [ANW67], [Boo78], [Pre75], [MiM99] y [Sch73], y en los artículos consultados, la ausencia explícita de ciertos aspectos, que permitirían un tratamiento más unificado y sistemático de la teoría de splines. Nos referimos a una interpretación matricial o estructural de dichas funciones. Dicho enfoque resulta, tal y como se ha señalado anteriormente, muy natural si consideramos el origen de la teoría de splines y la proximidad de ésta con la de elementos finitos y particularmente con la de elementos de contorno en dimensión uno.

De una manera esquemática, la teoría de splines, tal y como se indica en [ANW67] puede abordarse desde dos puntos de vista: el algebraico y el variacional. El primero se basa en

construir, a partir de la definición y mediante manipulaciones algebraicas, el sistema que define al spline, y el segundo punto de vista se basa en realizar un estudio previo de propiedades de tipo intrínseco o variacional conocidas en la teoría de splines como relaciones integrales. En el caso de splines polinómicos el segundo enfoque suele restringirse a los splines de grado impar.

El desarrollo de la teoría de splines que se expone, en esta memoria de tesis doctoral, reproduce en sus fundamentos la construcción ya hecha en [RoO99] la cual se basa esencialmente en el segundo punto de vista y se realiza para los denominados splines generalizados o L-splines [ANW67, p. 191], [Gre64], los cuales incluyen como caso particular a los splines polinómicos usuales.

A continuación pasamos a definir los splines generalizados, relajando algo más de lo que es habitual en la literatura sobre este área de conocimiento: [ANW67], [Boo78], [Gre64], [Gre69], [MiM99] y [Pre75], los requerimientos de regularidad.

Consideremos el intervalo $[x_1, x_n]$ descompuesto en la unión de subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$, donde $i = 1, \dots, n-2$, es decir

$$[x_1, x_n] = \bigcup_{i=1}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]$$

donde los nodos x_i verifican la condición

$$x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n$$

y sea L el operador diferencial autoadjunto de orden $2m$ dado en (3.2.5), donde cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ es un caso particular del intervalo de extremos a y b considerado en el apartado anterior.

Con las condiciones anteriores, denominamos *spline generalizado de orden $2m$* o *L-spline* a toda función $u(x)$ de la clase $C^{m-1}[x_1, x_n]$ que satisface la ecuación diferencial $L(u(x)) = 0$ en cada subintervalo abierto (x_i, x_{i+1}) , es decir

$$u \in C^{m-1}[x_1, x_n], \quad L(u) = 0, \quad x \in \bigcup_{i=1}^{n-1} (x_i, x_{i+1}) \quad (3.2.14)$$

Obsérvese de la definición que la función u es continua y con todas las derivadas continuas, al menos, hasta la de orden $m-1$ en todo el intervalo $[x_1, x_n]$, sin embargo u en cada subintervalo abierto (x_i, x_{i+1}) es de la clase C^{2m} . Como puede verse un spline generalizado es una función definida a trozos formada por elementos de $N(L)$ (núcleo del operador L) en cada subintervalo.

Por otra parte, al contrario de lo que es usual, las condiciones de regularidad de los coeficientes que definen al operador L , las referimos aquí a cada subintervalo $(x_i, x_{i+1}), i = 1, \dots, n-1$, es decir

$$a_j = a_j(x) \in C^j(\bigcup_{i=1}^{n-1} (x_i, x_{i+1})), j = 0, \dots, m \quad (3.2.15)$$

con $a_m \geq \delta > 0$ para todo $x \in \bigcup_{i=1}^{n-1} (x_i, x_{i+1})$, aunque se exige al mismo tiempo que los coeficientes deben verificar condiciones de regularidad adicionales como la existencia y finitud en cada subintervalo de los límites siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow c} a_j^{(k)}(x), c = x_i^+, x_{i+1}^-, k = 0, \dots, j$$

con objeto de garantizar la existencia y finitud también de los límites

$$u^{(k)}(x_i^+) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} u^{(k)}(x), \quad u^{(k)}(x_{i+1}^-) = \lim_{x \rightarrow x_{i+1}^-} u^{(k)}(x), k = 0, \dots, 2m$$

y

$$P_k(u)_{x=x_i^+} = \lim_{x \rightarrow x_i^+} P_k(u(x)), \quad P_k(u)_{x=x_{i+1}^-} = \lim_{x \rightarrow x_{i+1}^-} P_k(u(x)).$$

NOTA: De esta manera los resultados que se han dado en el apartado de preliminares para el intervalo cerrado $[a, b]$, se pueden extender al intervalo abierto genérico (x_i, x_{i+1}) . En lo que sigue no se precisará en exceso esta cuestión y pondremos algunas veces $P_k(u)_{x=x_i}$ y $P_k(u)_{x=x_{i+1}}$ en lugar de $P_k(u)_{x=x_i^+}$ y $P_k(u)_{x=x_{i+1}^-}$ por sobreentenderse el significado.

Cuando las funciones $a_j(x)$ que definen el operador diferencial L , verifican la condición de ser de la clase C^j en todo el intervalo $[x_1, x_n]$, se introduce el concepto de deficiencia $z = (z_2, z_3, \dots, z_{n-1})$, donde los valores z_2, z_3, \dots, z_{n-1} son enteros positivos tales que $1 \leq z_i \leq m$, y viene a ser una medida de la limitación del spline generalizado para satisfacer $L(u(x)) = 0$ en $[x_1, x_n]$, pues la deficiencia z_i indica que en los nodos internos $x_i, i = 2, \dots, n-1$, las sucesivas derivadas por la izquierda y derecha son iguales hasta la de orden $2m-1-z_i$, es decir

$$u^{(k)}(x_i^-) = u^{(k)}(x_i^+), \quad 0 \leq k \leq 2m-1-z_i \\ i = 2, \dots, n-1$$

Así el spline ordinario (deficiencia $z_i = 1, i = 2, \dots, n-1$) es una función de la clase C^{2m-2} en $[x_1, x_n]$ ya que en los nodos interiores puede haber discontinuidad en la derivada de orden

$2m - 1$. Por otra parte cuando la deficiencia es máxima ($z_i = m, i = 2, \dots, n - 1$), los splines son funciones de Hermite (no polinómicas en general) a trozos. Los caso anteriores, cuando el operador diferencial L es de la forma particular $L = (-1)^m D^{2m}$ se reducen respectivamente, a los splines polinómicos ordinarios de grado $2m - 1$ y a los polinomios de Hermite a trozos de grado $2m - 1$.

Es importante señalar que los splines generalizados no siempre existen para todo operador L sobre cualquier mallado de nodos $x_i, i = 1, \dots, n$ [ANW67, p.196]. La razón para tal situación se debe a que no siempre es posible obtener a partir de un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea $L(u) = 0$ una base de Lagrange en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}], i = 1, \dots, n - 1$ para resolver el problema de interpolación de Hermite generalizado relativo a los datos

$$u^{(k)}(x_i), u^{(k)}(x_{i+1}), k = 0, \dots, m - 1.$$

Un ejemplo de lo anterior se tiene para el operador autoadjunto $Lu = u'' + u$ en el intervalo $[0, 2\pi]$, donde del sistema fundamental de soluciones $\{\sin x, \cos x\}$ no puede obtenerse, como es sencillo de verificar, una base de funciones $\{N_1(x), N_2(x)\}$ tal que

$$N_1(0) = 1, N_1(2\pi) = 0, N_2(0) = 0, N_2(2\pi) = 1.$$

Esta situación queda resuelta sin embargo para el mismo operador si se toma cualquier intervalo de longitud menor que π . Aunque no es propósito de este trabajo el entrar en detalles sobre las condiciones que aseguran en el caso general la existencia de una base de Lagrange para la interpolación de Hermite indicada, construida a partir de una base de $N(L)$, se da al menos el siguiente resultado, que puede derivarse de la teoría de sistemas de Tschebyscheff [Sch81, p. 423]

(III) Para el operador L definido en (3.2.5) relativo al intervalo $[a, b]$ existe una constante $\rho > 0$ tal que para cualquier subintervalo (a_1, b_1) de $[a, b]$ de longitud menor que ρ existe la correspondiente base de Lagrange $\{N_i, i = 1, \dots, 2m\}$, formada por elementos de $N(L)$, para la interpolación definida por las formas lineales de tipo Hermite $l_i, i = 1, \dots, 2m$, relativas a los extremos del subintervalo

$$l_k(u) = u^{(k-1)}(a_1), l_{k+m}(u) = u^{(k-1)}(b_1), k = 1, \dots, m$$

donde $l_i(N_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, \dots, 2m$

A modo de ilustración se comentan a continuación diversos casos particulares de operadores diferenciales que pueden estudiarse dentro de la teoría de splines generalizados, como ejemplos de cierto interés práctico.

$$1) L(u) = -(A(x)u')', \quad 2) L(u) = -(A(x)u')' + B(x)u, \quad 3) L(u) = (A(x)u'')''$$

$$4) L(u) = (A(x)u'')'' - (B(x)u')', \quad 5) L(u) = (A(x)u'')'' + C(x)u$$

$$6) L(u) = (A(x)u'')'' - (B(x)u')' + C(x)u$$

(3.2.16)

Entre las diferentes posibilidades de interpretación de la función u en términos de diversas magnitudes físicas, nos vamos a limitar a las de carácter mecánico usual. Así en los dos primeros casos u puede representar el desplazamiento longitudinal de las secciones de una barra elástica sometida a fuerzas axiales, o bien el desplazamiento transversal de las secciones de un cable sometido a una tracción variable. En el segundo caso la barra o el cable están embebidos en un medio elástico que ofrece una resistencia proporcional al desplazamiento. El caso tercero es el que corresponde al desplazamiento transversal de una viga de rigidez variable sometida a flexión. Cuando la rigidez $A(x)$ es constante en todo el intervalo $[x_1, x_n]$ se tienen los splines cúbicos y cuando la rigidez es constante en cada subintervalo (x_i, x_{i+1}) resultan los splines con peso. Los casos cuarto y quinto corresponden respectivamente, al de una viga sometida a flexión y, tracción si $B(x) > 0$, o compresión (viga-columna) si $B(x) < 0$, y a flexión en un medio elástico: viga flotante con modelo de Winkler. Diversos autores: [Mar89], [MiN66], [TiM84] y [Tin82] han utilizado funciones pertenecientes al núcleo del operador del caso quinto, en el análisis, por elementos finitos, de vigas sobre fundación elástica, aunque con un enfoque diferente, al de los splines generalizados que se expone en este trabajo. El caso cuarto, para $B(x) > 0$, es denominado en el campo de los gráficos como splines en tensión o a tracción, splines exponenciales o splines hiperbólicos. Este tipo de splines fue introducido por Schweikert [Sch66] con el propósito de reducir el número de puntos de inflexión que aparecen algunas veces de forma artificial en problemas de interpolación cuando se emplean los splines cúbicos ordinarios.

Por otra parte el caso sexto corresponde al de una viga sometida a flexión y tracción o flexión y compresión, dependiendo del signo de $B(x)$, en un medio elástico de Winkler. Este caso, de mayor interés en el campo del análisis estructural que en el de computación gráfica, y que incluye además a los tres anteriores como casos particulares, puede ser también analizado empleando la teoría de splines generalizados, lo que permite tratar de forma sistemática en un mismo problema situaciones combinadas de los diferentes tipos. En [RoO99] se desarrolla una aplicación de estos splines al análisis de vigas continuas en un medio elástico de Winkler sometidas simultáneamente a flexión y a cargas axiales de tracción y compresión. La posibilidad de abordar problemas relativos a los operadores diferenciales anteriores u otros análogos, desde el punto de vista de los splines permite un enfoque unificado y sistemático en el que se hace abstracción del significado y del origen de los operadores involucrados en los problemas, pudiendo aplicar la misma metodología en contextos muy diferentes.

3.3 FORMULACIÓN MATRICIAL DE LOS SPLINES GENERALIZADOS

Abordamos en este punto lo que hemos venido a denominar como formulación matricial de los splines generalizados. Se trata en definitiva de obtener la ecuación de equilibrio local y mediante el proceso de ensamblado, la ecuación de equilibrio global del spline generalizado. A partir de dicha ecuación se definen problemas de interpolación con un cierto grado de generalidad al incluir la posibilidad de considerar también acciones de tipo puntual, lo que no es usual por ejemplo en el campo de la interpolación con splines. De hecho en la amplia literatura consultada, sobre aplicación de los splines en dicho campo, no hemos observado la inclusión del concepto de acción puntual.

3.3.1 Ecuación de equilibrio local del spline generalizado

Suponiendo que el intervalo genérico $[a, b]$ es de tal longitud que está garantizada la existencia de una base de Lagrange (funciones de forma locales) para la interpolación de Hermite generalizada $\{N_i, i = 1, \dots, 2m\}$ relativa a los extremos a, b (véase el resultado III), se tiene con dichas condiciones el siguiente resultado relativo a cada elemento de spline generalizado

(IV) Sean L el operador diferencial indicado en (3.2.5), $l_k, k = 1, \dots, 2m$ las formas lineales definidas en (3.2.4) y $\bar{l}_k, k = 1, \dots, 2m$ las definidas en (3.2.11) y $a(u, v)$ la forma bilineal simétrica dada en (3.2.8). La solución de $L(u) = 0$ en $[a, b]$ tal que

$$l_k(u) = u^{(k-1)}(a) = r_k, l_{k+m}(u) = u^{(k-1)}(b) = r_{k+m}, k = 1, \dots, m$$

donde $r_k, k = 1, \dots, 2m$ son números reales arbitrarios dados, verifica la siguiente relación matricial que denominamos ecuación de equilibrio local o ecuación de equilibrio del elemento de spline generalizado en el intervalo $[a, b]$

$$\tilde{K} \tilde{u} = \tilde{q} \quad (3.3.1)$$

donde las matrices $\tilde{K} = (k_{ij})_{i,j=1,\dots,2m}$, \tilde{u} y \tilde{q} son

$$\begin{aligned} k_{ij} &= k_{ji} = \bar{l}_i(N_j) = a(N_i, N_j) = \sum_{p=0}^m \int_a^b a_p(x) (D^p N_i)(D^p N_j) dx, i, j = 1, \dots, 2m \\ \tilde{u} &= \tilde{r}' = (r_1, \dots, r_m, r_{m+1}, \dots, r_{2m}) \\ \tilde{q}' &= (\bar{l}_1(u), \dots, \bar{l}_m(u), \bar{l}_{m+1}(u), \dots, \bar{l}_{2m}(u)) = \\ &= (-P_0(u)_{x=a}, \dots, -P_{m-1}(u)_{x=a}, P_0(u)_{x=b}, \dots, P_{m-1}(u)_{x=b}) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

con \tilde{K} simétrica.

En efecto, teniendo en cuenta que $u = \sum_{i=1}^{2m} r_i N_i$, ya que $u \in N(L)$, multiplicando ambos miembros de la expresión $Lu = 0$ por $v = N_j, j = 1, \dots, 2m$ (por lo cual $Lv = 0$), e integrando en $[a, b]$ y aplicando (3.2.9) resulta

$$0 = -\sum_{i=1}^{2m} l_i(N_j) \bar{l}_i(u) + \sum_{i=1}^{2m} r_i \left(\sum_{p=0}^m \int_a^b a_p N_i^{(p)} N_j^{(p)} dx \right) = -\bar{l}_j(u) + \sum_{i=1}^{2m} r_i k_{ji} \quad (3.3.3)$$

ya que $l_i(N_j) = \delta_{ij}$, siendo $k_{ij} = k_{ji} = \sum_{p=0}^m \int_a^b a_p N_i^{(p)} N_j^{(p)} dx$, de donde se deduce la simetría de \tilde{K} .

Obsérvese que esta simetría puede obtenerse directamente de la reciprocidad dada en (3.2.12) para $u = N_i, v = N_j$.

Por otra parte de (3.2.8), (3.2.9) y (3.2.10) para u arbitraria y v tal que $Lv = 0$ se tiene

$$a(u, v) = \sum_{p=1}^{2m} l_p(u) \bar{l}_p(v)$$

de donde se deduce que

$$a(N_i, N_j) = k_{ij} = k_{ji} = \bar{l}_i(N_j)$$

La expresión anterior tiene gran interés pues pone de manifiesto que los elementos de la matriz \tilde{K} pueden obtenerse mediante derivación.

De la relación (3.3.3) para cada $j = 1, \dots, 2m$, resulta en consecuencia la relación matricial (3.3.1). Obsérvese que dicha relación matricial se puede poner equivalentemente en la forma particionada siguiente que expresamos en términos de u directamente (con la terminología correspondiente a (a, b) que es más precisa, especialmente para el ensamblado posterior de los términos $\tilde{q}(a^+)$ y $\tilde{q}(b^-)$)

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(a,b)} & K_{12}^{(a,b)} \\ K_{21}^{(a,b)} & K_{22}^{(a,b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}(a^+) \\ \tilde{u}(b^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{q}(a^+) \\ \tilde{q}(b^-) \end{bmatrix}$$

donde las matrices $K_{ij}^{(a,b)}, i, j = 1, 2$ son de dimensión $m \times m$,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(a^+) &= (u(a), \dots, u^{(m-1)}(a))^t, \\ \tilde{u}(b^-) &= (u(b), \dots, u^{(m-1)}(b))^t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{q}(a^+) &= (\bar{l}_1(u), \dots, \bar{l}_m(u))', \\ \tilde{q}(b^-) &= (\bar{l}_{m+1}(u), \dots, \bar{l}_{2m}(u))'\end{aligned}$$

Es interesante señalar el paralelismo del desarrollo realizado, con los elementos finitos o el análisis matricial de estructuras cuando se aplica el método de los desplazamientos. En este sentido la construcción realizada aquí no es más que una extensión de los resultados, en dichas áreas, correspondientes a los problemas de segundo y cuarto orden relativos a los operadores diferenciales indicados en (3.2.16). Podemos por tal motivo reivindicar para este campo de los splines generalizados la terminología estructural y denominar a la matriz \tilde{K} como matriz de rigidez del elemento spline, a \tilde{r} o \tilde{u} vector de desplazamientos nodales del elemento y a \tilde{q} vector de cargas nodales de equilibrio o de contorno del elemento. Desde un punto de vista mecánico cada componente del vector de desplazamientos puede considerarse que es dual o conjugada en el sentido de una cierta energía o trabajo, de la correspondiente componente del vector de acciones nodales de equilibrio.

Nótese que a diferencia con el método de elementos finitos, aquí no se ha realizado ninguna aproximación sobre la función u en $[a, b]$, al emplear directamente una base de funciones formada por elementos que verifican la ecuación diferencial homogénea $L(u) = 0$.

Tomando ahora $v = \sum_{i=1}^{2m} s_i N_i$, con s_i datos arbitrarios, puede comprobarse de manera inmediata a partir de (3.2.10) y de $Lv = 0$ que la forma bilineal simétrica $a(u, v)$ se puede poner como

$$a(u, v) = \int_a^b \left(\sum_{j=0}^m a_j D^j u D^j v \right) dx = \sum_{i=1}^{2m} l_i(u) \bar{l}_i(v) = \tilde{s}' \tilde{K} \tilde{r}$$

de donde resulta

$$\int_a^b (Lu) v dx = \tilde{s}' (\tilde{K} \tilde{r} - \tilde{q}) \quad (3.3.4)$$

o equivalentemente utilizando la expresión matricial particionada en términos directamente de u y v

$$\int_a^b (Lu) v dx = (\tilde{v}(a^+)', \tilde{v}(b^-)') \begin{bmatrix} K_{11}^{(a,b)} & K_{12}^{(a,b)} \\ K_{21}^{(a,b)} & K_{22}^{(a,b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}(a^+) \\ \tilde{u}(b^-) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{q}(a^+) \\ \tilde{q}(b^-) \end{bmatrix} \quad (3.3.5)$$

Finalmente el resultado de reciprocidad indicado en (3.2.12) se puede expresar con la notación de este apartado, en la forma

$$\tilde{u}' \tilde{q}_v = \tilde{v}' \tilde{q}_u$$

donde \tilde{q}_u y \tilde{q}_v son las acciones nodales que respectivamente corresponden a dos funciones u, v definidas en $[a, b]$ y pertenecientes al núcleo del operador L . Este resultado se interpreta después en el apartado relativo a la ecuación de equilibrio global.

3.3.2 Ejemplos de construcción de la ecuación de equilibrio local

Exponemos a continuación, con propósitos ilustrativos, varios ejemplos de construcción de la ecuación de equilibrio local. En primer lugar abordamos el caso de los splines de quinto grado, en segundo lugar el de los splines a tracción o en tensión para la situación particular de coeficientes constantes en cada subintervalo. Después como caso tercero se considera el de los splines para la viga-columna que podrían denominarse como splines a “compresión” que corresponden a la deformada de la pieza sometida a flexión y compresión sin acción repartida. Finalmente como cuarto caso, el correspondiente a la viga sobre fundación elástica. Dicho caso en términos de splines podría denominarse como el de splines tipo “Winkler”.

Splines de quinto grado

El operador diferencial para el este caso es

$$L(u) = (-1)^3 D^3(a_3(x)D^3u) = -Au^{(6)} \quad (3.3.6)$$

donde la función $a_3(x) = A > 0$ es constante en cada subintervalo (a, b) . Dicha constante puede variar de unos intervalos a otros, teniéndose en dicho caso los correspondientes splines de quinto grado con peso. El vector de desplazamientos nodales está dado por

$$\begin{aligned} \tilde{u}(a^+) &= (u(a), u'(a), u''(a))^T \\ \tilde{u}(b^-) &= (u(b), u'(b), u''(b))^T \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Los operadores $\bar{l}_i, i = 1, \dots, 6$ se obtienen aplicando (3.2.7) y (3.2.11)

$$\begin{aligned} \bar{l}_1(u) &= -P_0(u)_{x=a} = -Au^{(5)}(a^+), \quad \bar{l}_2(u) = -P_1(u)_{x=a} = Au^{(4)}(a^+), \\ \bar{l}_3(u) &= -P_2(u)_{x=a} = -Au^{(3)}(a^+), \quad \bar{l}_4(u) = P_0(u)_{x=b} = Au^{(5)}(b^-), \\ \bar{l}_5(u) &= P_1(u)_{x=b} = -Au^{(4)}(b^-), \quad \bar{l}_6(u) = P_2(u)_{x=b} = Au^{(3)}(b^-) \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

de esta manera queda definido el vector \tilde{q} o equivalentemente los vectores $\tilde{q}(a^+)$ y $\tilde{q}(b^-)$. La matriz de rigidez del elemento spline se calcula mediante la primera expresión de (3.3.2). Teniendo en cuenta que la base de funciones de forma locales $\{N_i, i = 1, \dots, 6\}$ está formada por los siguientes polinomios

$$\begin{aligned}
N_1 &= (l^5 - 10l^2z^3 + 15lz^4 - 6z^5)/l^5, & N_2 &= z(l^4 - 6l^2z^2 + 8lz^3 - 3z^4)/l^4 \\
N_3 &= z^2(l^3 - 3l^2z + 3lz^2 - z^3)/(2l^3), & N_4 &= z^3(10l^2 - 15lz + 6z^2)/l^5 \\
N_5 &= z^3(-4l^2 + 7lz - 3z^2)/l^4, & N_6 &= z^3(l^2 - 2lz + z^2)/(2l^3)
\end{aligned}
\tag{3.3.9}$$

donde $z = x - a$ y $l = b - a$ es la longitud del subintervalo, aplicando $k_{ij} = k_{ji} = \bar{l}_i(N_j)$ resulta

$$\tilde{K} = A \begin{bmatrix} 720/l^5 & 360/l^4 & 60/l^3 & -720/l^5 & 360/l^4 & -60/l^3 \\ 360/l^4 & 192/l^3 & 36/l^2 & -360/l^4 & 168/l^3 & -24/l^2 \\ 60/l^3 & 36/l^2 & 9/l & -60/l^3 & 24/l^2 & -3/l \\ -720/l^5 & -360/l^4 & -60/l^3 & 720/l^5 & -360/l^4 & 60/l^3 \\ 360/l^4 & 168/l^3 & 24/l^2 & -360/l^4 & 192/l^3 & -36/l^2 \\ -60/l^3 & -24/l^2 & -3/l & 60/l^3 & -36/l^2 & 9/l \end{bmatrix}
\tag{3.3.10}$$

Splines a tracción o en tensión

Ahora el operador diferencial es

$$L(u) = (-1)^2 D^2(a_2(x)D^2u) + (-1)D(a_1(x)Du) = Au^{(4)} - Bu^{(2)}$$

donde las funciones $a_2(x)$, $a_1(x)$ en el subintervalo genérico (a, b) son constantes dadas respectivamente por $A > 0$ y $B > 0$. Estas constantes de igual manera que en el caso anterior pueden variar de unos subintervalos a otros, teniéndose los splines en tensión con peso. La constante $A > 0$ representa la rigidez a flexión y puede variar de unos tramos a otros. Si se tomara $B = 0$, modificando el valor de la constante A de unos intervalos a otros se tendría el caso de los splines cúbicos con peso. Precisamente esta posibilidad de modificar los valores de las constantes citadas, especialmente el de la B que define la tensión, o mejor la tracción, es lo que ha dado gran popularidad a esta clase de splines en el campo de los gráficos.

El vector de desplazamientos nodales está definido mediante

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(a^+) &= (u(a), u'(a))^T \\
\tilde{u}(b^-) &= (u(b), u'(b))^T
\end{aligned}
\tag{3.3.11}$$

Los operadores que nos definen las cargas nodales de equilibrio en este caso son

$$\tilde{q}(a^+) = (\bar{l}_1(u), \bar{l}_2(u))', \quad \tilde{q}(b^-) = (\bar{l}_3(u), \bar{l}_4(u))'
\tag{3.3.12}$$

son

$$\begin{aligned}\bar{l}_1(u) &= -P_0(u)_{x=a} = Au^{(3)}(a^+) - Bu'(a^+), \quad \bar{l}_2(u) = -P_1(u)_{x=a} = -Au^{(2)}(a^+) \\ \bar{l}_3(u) &= P_0(u)_{x=b} = -Au^{(3)}(b^-) + Bu'(b^-), \quad \bar{l}_4(u) = P_1(u)_{x=b} = Au^{(2)}(b^-)\end{aligned}\quad (3.3.13)$$

Teniendo en cuenta que las raíces de la ecuación característica correspondiente a la ecuación homogénea $L(u) = 0$ son, 0, doble y $\pm r$, con $r = \sqrt{B/A}$, la base de funciones de forma es tal y como puede calcularse de manera inmediata

$$\tilde{N} = (N_1, N_2, N_3, N_4)' = C \tilde{x}$$

donde

$$\tilde{x}' = (1, z, \sinh(rz), \cosh(rz)), \quad z = x - a$$

con

$$C = \frac{1}{c_4} \begin{bmatrix} c_3 c_1 - c_2 + 1 & -rc_1 & c_1 & 1 - c_2 \\ (c_3 c_2 - c_1)/r & 1 - c_2 & (c_3 c_2 - c_2 + 1)/r & c_1 - c_3 c_2 \\ 1 - c_2 & rc_1 & -c_1 & c_2 - 1 \\ (c_1 - c_3)/r & 1 - c_2 & (c_2 - 1)/r & (c_3 - c_1)/r \end{bmatrix}\quad (3.3.14)$$

$$l = b - a, \quad c_1 = \sinh(rl), \quad c_2 = \cosh(rl), \quad c_3 = rl, \quad c_4 = 2 + c_3 c_1 - 2c_2$$

Aplicando ahora $k_{ij} = k_{ji} = \bar{l}_i(N_j)$ resulta la matriz de rigidez local de los splines en tensión

$$\tilde{K} = \frac{A}{c_4} \begin{bmatrix} r^3 c_1 & r^2(c_2 - 1) & -r^3 c_1 & r^2(c_2 - 1) \\ r^2(c_2 - 1) & r(c_3 c_2 - c_1) & r^2(1 - c_2) & r(c_1 - c_3) \\ -r^3 c_1 & r^2(1 - c_2) & r^3 c_1 & r^2(1 - c_2) \\ r^2(c_2 - 1) & r(c_1 - c_3) & r^2(1 - c_2) & r(c_3 c_2 - c_1) \end{bmatrix}\quad (3.3.15)$$

Splines para el caso de la viga-columna

El operador diferencial es

$$L(u) = (-1)^2 D^2(a_2(x)D^2u) + (-1)D(a_1(x)Du) = Au^{(4)} + Pu^{(2)}\quad (3.3.16)$$

donde las funciones $a_2(x), a_1(x)$ en (a, b) son constantes dadas por $A > 0$ y $-P$ con $P > 0$. Estas constantes como en el caso anterior pueden variar de unos subintervalos a otros. La constante $A > 0$ como antes equivale a un parámetro que representa la rigidez a flexión y la constante P puede interpretarse como una carga axial en el tramo. Este caso contrariamente al anterior no tiene interés en el campo de las aplicaciones gráficas de la

interpolación pues la carga por ser de compresión en lugar de suavizar las curvaturas las aumenta. Su importancia reside fundamentalmente en las aplicaciones en análisis estructural.

Los desplazamientos nodales están dados por

$$\begin{aligned}\tilde{u}(a^+) &= (u(a), u'(a))^T \\ \tilde{u}(b^-) &= (u(b), u'(b))^T\end{aligned}\tag{3.3.17}$$

Los operadores que nos definen las cargas nodales de equilibrio

$$\tilde{q}(a^+) = (\bar{l}_1(u), \bar{l}_2(u))^T, \quad \tilde{q}(b^-) = (\bar{l}_3(u), \bar{l}_4(u))^T\tag{3.3.18}$$

son para este caso

$$\begin{aligned}\bar{l}_1(u) &= -P_0(u)_{x=a} = Au^{(3)}(a^+) + Pu'(a^+), \quad \bar{l}_2(u) = -P_1(u)_{x=a} = -Au^{(2)}(a^+) \\ \bar{l}_3(u) &= P_0(u)_{x=b} = -Au^{(3)}(b^-) - Pu'(b^-), \quad \bar{l}_4(u) = P_1(u)_{x=b} = Au^{(2)}(b^-)\end{aligned}\tag{3.3.19}$$

Teniendo en cuenta que las raíces de la ecuación característica correspondiente a la ecuación homogénea $L(u) = 0$ son, 0, doble y $\pm ri$, con $r = \sqrt{P/A}$, la base de Lagrange funciones de forma es $\tilde{N} = (N_1, N_2, N_3, N_4)^T = C \tilde{x}$ donde

$$\tilde{x}^T = (1, z, \text{sen}(rz), \cos(rz)), \quad z = x - a$$

siendo la matriz de cambio de base

$$C = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} lrs + c - 1 & -rs & s & c - 1 \\ (-lrc + s)/r & c - 1 & (lrs + c - 1)/r & (lrc - s)/r \\ c - 1 & rs & -s & 1 - c \\ (rl - s)/r & c - 1 & (1 - c)/r & (s - rl)/r \end{bmatrix}\tag{3.3.20}$$

$$r = \sqrt{\frac{P}{A}}, \quad l = b - a, \quad s = \text{sen}(rl), \quad c = \cos(rl), \quad \Delta = lrs + 2c - 2$$

Considerando ahora el resultado $k_{ij} = k_{ji} = \bar{l}_i(N_j)$, se tiene la matriz de rigidez local de los splines a “compresión”

$$\tilde{K} = \frac{A}{\Delta} \begin{bmatrix} -r^3 s & r^2(c-1) & r^3 s & r^2(c-1) \\ r^2(c-1) & r(lrc-s) & r^2(1-c) & r(s-rl) \\ r^3 s & r^2(1-c) & -r^3 s & r^2(1-c) \\ r^2(c-1) & r(s-rl) & r^2(1-c) & r(lrc-s) \end{bmatrix} \quad (3.3.21)$$

Splines tipo "Winkler"

El operador diferencial es ahora

$$L(u) = (-1)^2 D^2(a_2(x)D^2u) + a_0(x)u = Au^{(4)} + ku \quad (3.3.22)$$

donde las funciones $a_2(x)$, $a_0(x)$ en el subintervalo genérico (a, b) son constantes dadas respectivamente por $A > 0$ y $k > 0$. Estas constantes como se ha indicado en los ejemplos anteriores pueden variar de unos intervalos a otros, teniéndose los correspondientes casos con peso.

El vector de desplazamientos nodales está definido mediante

$$\begin{aligned} \tilde{u}(a^+) &= (u(a), u'(a))^T \\ \tilde{u}(b^-) &= (u(b), u'(b))^T \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

Los operadores que definen en este ejemplo las cargas nodales de equilibrio

$$\tilde{q}(a^+) = (\bar{l}_1(u), \bar{l}_2(u))', \quad \tilde{q}(b^-) = (\bar{l}_3(u), \bar{l}_4(u))' \quad (3.3.24)$$

son

$$\begin{aligned} \bar{l}_1(u) &= -P_0(u)_{x=a} = Au^{(3)}(a^+), \quad \bar{l}_2(u) = -P_1(u)_{x=a} = -Au^{(2)}(a^+), \\ \bar{l}_3(u) &= P_0(u)_{x=b} = -Au^{(3)}(b^-), \quad \bar{l}_4(u) = P_1(u)_{x=b} = Au^{(2)}(b^-), \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

Puede observarse que las formas lineales $\bar{l}_i, i=1, \dots, 4$ son idénticas a las de los splines cúbicos con peso, aunque las funciones de forma en lugar de ser polinomios cúbicos, son como en el caso anterior, funciones trascendentes. Las raíces de la ecuación característica son los cuatro números complejos siguientes $(\pm r \pm ir)$, con $r = \sqrt[4]{k/(4A)}$. Los elementos de la base los expresamos del mismo modo que en el caso anterior como

$$\tilde{N} = (N_1, N_2, N_3, N_4)' = C \tilde{x}$$

donde

$$\tilde{x}' = (\cos(rz) \cosh(rz), \cos(rz) \sinh(rz), \sin(rz) \cosh(rz), \sin(rz) \sinh(rz))$$

$$z = x - a$$

con

$$C = \frac{1}{rc_5} \begin{bmatrix} 1 & -r(c_1c_2 + c_3c_4) & r(c_1c_2 + c_3c_4) & r(c_4^2 - c_2^2) \\ 0 & c_4^2 - 1 & c_2^2 - 1 & c_3c_4 - c_1c_2 \\ 0 & r(c_1c_4 + c_2c_3) & -r(c_1c_4 + c_2c_3) & 2rc_1c_3 \\ 0 & -c_1c_3 & c_1c_3 & c_1c_4 - c_2c_3 \end{bmatrix} \quad (3.3.26)$$

$$c_1 = \sinh(rl), c_2 = \cosh(rl), c_3 = \sin(rl), c_4 = \cos(rl), c_5 = c_2^2 + c_4^2 - 2$$

Finalmente la matriz de rigidez, que se calcula en la forma ya indicada, es

$$\tilde{K} = \frac{A}{c_5} \begin{bmatrix} 4r^3(c_1c_2 + c_3c_4) & 2r^2(c_2^2 - c_4^2) & -4r^3(c_1c_4 + c_2c_3) & 4r^2c_1c_3 \\ 2r^2(c_2^2 - c_4^2) & 2r(c_1c_2 - c_3c_4) & -4r^2c_1c_3 & 2r(c_2c_3 - c_1c_4) \\ -4r^3(c_1c_4 + c_2c_3) & -4r^2c_1c_3 & 4r^3(c_1c_2 + c_3c_4) & 2r^2(c_4^2 - c_2^2) \\ 4r^2c_1c_3 & 2r(c_2c_3 - c_1c_4) & 2r^2(c_4^2 - c_2^2) & 2r(c_1c_2 - c_3c_4) \end{bmatrix} \quad (3.3.27)$$

Comentarios

Los últimos ejemplos expuestos son casos particulares del caso correspondiente al operador definido al final de (3.2.16). Cuando los coeficientes son constantes en cada subintervalo (a, b) , es decir, $A(x) = A$, $B(x) = B$ y $C(x) = k$ la ecuación característica

$$Ar^4 - Br^2 + k = 0$$

es bicuadrada y por tanto se podría dar también en forma simbólica como en los casos anteriores y de una manera más o menos directa, en función de los coeficientes, las expresiones de las funciones de forma y de la matriz de rigidez. No obstante dado el elevado número de casos posibles y por otra parte las facilidades actuales de utilización de herramientas de cálculo simbólico, puede ser más interesante a efectos de cálculo, seguir para cada caso no trivial ($A > 0, B \neq 0, k > 0$) el proceso indicado en el desarrollo anterior, es decir, calcular la matriz de rigidez \tilde{K} del elemento spline mediante $k_{ij} = k_{ji} = \bar{l}_i(N_j)$ donde las formas lineales \bar{l}_i son aquí las mismas que se indican en (3.3.19) con la particularidad de que el valor de B (tracción o compresión) puede ser positivo o negativo. Asimismo las funciones de interpolación $N_i, i = 1, \dots, 4$ se determinan en la forma usual, esto es mediante $\tilde{N} = C\tilde{x}$ donde $\tilde{x}' = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ está constituido por un conjunto de funciones que forman un sistema fundamental para la ecuación diferencial

$$L(u) = Au^{(4)} - Bu^{(2)} + ku = 0$$

y la matriz C de cambio de base es la inversa y traspuesta de la matriz M es decir $C = M^{-T}$ donde los elementos de M son

$$m_{ij} = l_i(\varphi_j), i, j = 1, \dots, 4,$$

tal y como se deduce al imponer $l_i(N_j) = \delta_{ij}$.

3.3.3 Ecuación de equilibrio global del spline generalizado

A continuación se obtiene la expresión matricial de la ecuación de equilibrio global del spline generalizado. Basta emplear las expresiones (3.3.4) y (3.3.5) para determinar la correspondiente expresión en $[x_1, x_n]$, teniendo en cuenta para ello las condiciones (3.2.14) y la suma de las contribuciones de cada subintervalo $(x_i, x_{i+1}), i = 1, \dots, n-1$, es decir

$$\int_{x_1}^{x_n} (Lu)v dx = \sum_{i=1}^{n-1} (\tilde{v}(x_i^+)', \tilde{v}(x_{i+1}^-)') \left(\begin{bmatrix} K_{11}^i & K_{12}^i \\ K_{21}^i & K_{22}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}(x_i^+) \\ \tilde{u}(x_{i+1}^-) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{q}(x_i^+) \\ \tilde{q}(x_{i+1}^-) \end{bmatrix} \right)$$

Como $L(u) = 0$ en cada subintervalo y considerando que las funciones u y v son en el intervalo total de la clase C^{m-1} , es decir $\tilde{u}(x_i^+) = \tilde{u}(x_i^-)$ en los nodos internos y lo mismo para v , se puede poner

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^t &= (\tilde{v}(x_1)', \dots, \tilde{v}(x_n)') \\ \mathbf{u}^t &= (\tilde{u}(x_1)', \dots, \tilde{u}(x_n)') \end{aligned}$$

y empleando las expresiones expandidas usuales de los elementos finitos para la matriz de rigidez y vector de acciones nodales de equilibrio de cada elemento, la expresión

$$\int_{x_1}^{x_n} (Lu)v dx = \mathbf{v}^t (\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{Q}) = 0 \quad (3.3.28)$$

donde \mathbf{K} y \mathbf{Q} equivalen al ensamblado habitual de las correspondientes matrices locales, y que aquí se obtienen como suma de matrices expandidas que resultan al ampliar con ceros las matrices locales, situadas en la posición correspondiente, hasta llegar a la dimensión $m \times n$, es decir

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n-1} \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ \cdots & K_{11}^i & K_{21}^i & \cdots \\ \cdots & K_{21}^i & K_{22}^i & \cdots \\ \ddots & & & \end{bmatrix}_{(m \times n) \times (m \times n)} \quad \mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{n-1} \begin{bmatrix} \vdots \\ \tilde{q}(x_i^+) \\ \tilde{q}(x_{i+1}^-) \\ \vdots \end{bmatrix}_{(m \times n) \times 1}$$

Por otra parte como la relación (3.3.28) se verifica para cualquier \mathbf{v} , se tiene la siguiente expresión que, por la analogía ya citada, podemos denominar ecuación de equilibrio global del spline generalizado

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{Q} \quad (3.3.29)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez global del spline generalizado, que es, simétrica y tridiagonal por bloques y \mathbf{Q} es el vector de acciones nodales exteriores. Las columnas de la matriz de rigidez pueden interpretarse como las acciones nodales que resultan para los desplazamientos dados por las funciones de forma globales. Dichas funciones de forma globales se obtienen a partir de las locales en la forma usual y son splines generalizados cuyas componentes del vector de desplazamientos, son todas nulas excepto una que toma el valor unidad.

La expresión matricial de la forma bilineal $a(u, v)$ para las funciones u y v pertenecientes al espacio de los splines generalizados es

$$a(u, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\sum_{j=0}^m a_j D^j u D^j v \right) dx = \mathbf{v}^t \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (3.3.30)$$

Se debe destacar que la expresión (3.3.29) es una identidad resultante de la fórmula de Green (3.2.2) aplicada al caso del operador autoadjunto definido en (3.2.5) y por tanto es satisfecha por cualquier spline generalizado definido en la forma (3.2.14) con las condiciones de regularidad dadas en (3.2.15). Es importante señalar que dicha expresión (3.3.29) únicamente pone de manifiesto que, fijados los desplazamientos de los nodos mediante el vector \mathbf{u} se tienen de manera unívoca las acciones en los nodos definidas por el vector \mathbf{Q} .

Si distinguimos ahora con un subíndice el origen de las acciones y si u y v representan dos splines generalizados cualesquiera, relativos a los mismos nodos, de la simetría de la matriz de rigidez global y de las expresiones $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{Q}_u$, $\mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{Q}_v$, se tiene el siguiente resultado

$$\mathbf{v}^t \mathbf{Q}_u = \mathbf{u}^t \mathbf{Q}_v$$

que es análogo al teorema de reciprocidad en mecánica de estructuras y que aquí se interpreta de la forma siguiente:

(V) Para dos splines generalizados cualesquiera relativos a los mismos nodos, la suma de los productos de los desplazamientos nodales del primero por las acciones nodales del

segundo es igual a la suma de los productos de los desplazamientos nodales del segundo por las acciones nodales del primero.

También se tiene trivialmente $\mathbf{Q}_{u+v} = \mathbf{Q}_u + \mathbf{Q}_v$, que representa el principio de superposición de acciones nodales para un spline generalizado que es suma de otros dos.

3.3.4 Interpolación con splines generalizados

Cabe ahora definir diferentes problemas de interpolación para este planteamiento generalista. El enfoque usual en la teoría de splines generalizados [ANW67, pp. 195, 196] consiste en imponer en cada uno de los nodos condiciones de interpolación de tipo Hermite, esto es, fijar los valores de las ordenadas y cierto número de derivadas sucesivas en cada uno de los nodos, en la forma

$$u^{(j)}(x_i) = y_{ik}, i = 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, z - 1$$

donde el valor de z es la deficiencia, tal que $1 \leq z \leq m$ (obsérvese que en el apartado 3.2.2 de este trabajo permitimos que la deficiencia pueda ser diferente en los distintos nodos internos). Con estas condiciones el objetivo es calcular una función del espacio de splines generalizados que sea de la mayor regularidad posible es decir de la clase C^{2m-1-z} en $[x_1, x_n]$.

Nuestro planteamiento sin embargo permite resolver problemas de interpolación más generales, donde podemos imponer para cada nodo $x_i, i = 1, \dots, n$ y para cada orden de derivación, condiciones de interpolación del tipo Hermite-Birkhoff, definidas a partir de la matriz de incidencia ([LJR83, p. 1], [Pre75, p. 75] y [SeA94, p. 248])

$$E = (E_{ij}), E_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$

en la forma siguiente: si $E_{ij} = 1$ esto quiere decir que fijamos el dato $u^{(j-1)}(x_i)$, no fijándose en el caso de que $E_{ij} = 0$. Es decir se dan algunas de las componentes del vector de desplazamientos

$$\mathbf{u}^t = (u(x_1), \dots, u^{(m-1)}(x_1), \dots, u(x_n), \dots, u^{(m-1)}(x_n))$$

de modo que en cada nodo las derivadas datos no requieren ser consecutivas y en diferentes nodos las derivadas fijadas pueden ser distintas, es decir los datos que se fijan constituyen una sucesión, que para cada nodo (en los que se den datos únicamente), no es obligatoriamente completa ni correlativa. Por otro lado el planteamiento propuesto permite fijar además y simultáneamente, las componentes del vector de acciones nodales exteriores que son duales de las componentes no prefijadas del vector de desplazamientos. Dichas componentes son

$$\mathbf{Q}^t = (-P_0(u)_{x=x_1^+}, \dots, -P_{m-1}(u)_{x=x_1^+}, P_0(u)_{x=x_2^-} - P_0(u)_{x=x_2^+}, \dots, P_{m-1}(u)_{x=x_2^-} - P_{m-1}(u)_{x=x_2^+}, \dots, P_0(u)_{x=x_{n-1}^-} - P_0(u)_{x=x_{n-1}^+}, \dots, P_{m-1}(u)_{x=x_{n-1}^-} - P_{m-1}(u)_{x=x_{n-1}^+}, P_0(u)_{x=x_n^-}, \dots, P_{m-1}(u)_{x=x_n^-}) \quad (3.3.31)$$

En resumen puede plantearse el siguiente problema de interpolación: Determinar el spline generalizado definido por las condiciones (3.2.14) y (3.2.15) tales que se conocen para el mismo p componentes de las $n \times m$ del vector \mathbf{u} de desplazamientos nodales y $s = n \times m - p$ componentes del vector \mathbf{Q} de acciones nodales, ocupando estas últimas, posiciones complementarias respecto a las componentes datos del vector \mathbf{u} . Introduciendo los valores conocidos en la expresión (3.3.29), queda después de reordenar filas y columnas el sistema de ecuaciones siguiente, donde $\mathbf{u}_p^*, \mathbf{Q}_s^*$ son los datos y $\mathbf{u}_s, \mathbf{Q}_p$ son las incógnitas a determinar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{ps} \\ \mathbf{K}_{sp} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_p^* \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_p \\ \mathbf{Q}_s^* \end{bmatrix} \quad (3.3.32)$$

El problema tiene solución única si la submatriz \mathbf{K}_{ss} es regular, resultando formalmente en dicho caso

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{K}_{ss}^{-1}(\mathbf{Q}_s^* - \mathbf{K}_{sp}\mathbf{u}_p^*), \quad \mathbf{Q}_p = \mathbf{K}_{pp}\mathbf{u}_p^* + \mathbf{K}_{ps}\mathbf{u}_s \quad (3.3.33)$$

Obsérvese que cuando el problema de interpolación está bien planteado, es decir, cuando tiene solución única, las acciones quedan unívocamente determinadas en aquellos puntos donde se han fijado los desplazamientos y recíprocamente, los desplazamientos quedan unívocamente determinados en donde se han fijado las acciones. Véase que entre los problemas de interpolación posibles también se encuentran aquellos casos extremos donde o bien se fijan todos los desplazamientos o bien se fijan todas las acciones nodales. El primero es un problema de interpolación de Hermite a trozos en el espacio de splines generalizados donde independientemente de la regularidad o no de la matriz de coeficientes de (3.3.29) el vector de acciones nodales queda perfectamente determinado a partir del vector de desplazamientos. Por otra parte la otra situación extrema requiere precisamente que la matriz citada sea regular para que queden unívocamente determinados todos los desplazamientos.

Esta forma tan general de imponer las condiciones de interpolación fijando algunas componentes del vector que hemos denominado de desplazamientos, coincide en parte con las que se emplean para tipos particulares de L-splines como son los splines heterogéneos [ANW67, pp. 194,195], Lg-splines [JeV69,p.106], γ -splines [Var71, p.12]. Sin embargo en ninguno de estos tipos se trata la asignación de valores a las correspondientes componentes del vector \mathbf{Q} ya que por la formulación allí efectuada, diferente a nuestra formulación matricial, el vector citado de acciones nodales exteriores, no queda determinado explícitamente al no incluir los correspondientes autores, el citado concepto. El valor que consecuentemente por defecto queda asignado para las correspondientes componentes del vector \mathbf{Q} es precisamente el valor nulo.

Comentarios

En [RoO99] se presenta un resultado, para el caso donde los coeficientes del operador diferencial verifican ciertas condiciones de no negatividad, en el que se relaciona la unicidad de solución del problema de interpolación de splines generalizados con condiciones de interpolación de Hermite-Birkoff, con la unicidad de solución de un problema de interpolación polinomial que verifica las mismas condiciones de interpolación.

También se describe en el trabajo citado una aplicación gráfica de la teoría de interpolación expuesta empleando splines generalizados de orden seis, los cuales incluyen como caso particular a los splines de quinto grado. Entre los diferentes tipos splines de orden seis se tomaron los correspondientes al operador

$$L(u) = -Au^{(6)} + Bu^{(4)}$$

con A y B constantes en cada subintervalo. Estos splines junto con los asociados al operador

$$L(u) = -Au^{(6)} + Bu^{(4)} - Cu^{(2)}$$

constituyen una buena alternativa, en el área de las aplicaciones gráficas, a los bien estudiados splines cúbicos con peso y splines en tensión, pues sobre estos tienen la gran ventaja de que el grado de regularidad de la función en lugar de ser C^1 es C^2 , además de incluir mayor número de parámetros, lo que es de gran interés en las aplicaciones. La limitación en la utilización de splines generalizados para la interpolación únicamente se tiene en la determinación y computo de las funciones trascendentes especialmente si el orden del operador diferencial es elevado.

Una opción desde el punto de vista práctico que resuelve en parte la dificultad en el cálculo de la función spline de interpolación consiste en emplear espacios de elementos finitos de polinomios a trozos que aproximen al spline generalizado asociado al correspondiente operador diferencial. Esta idea que es la base de los procedimientos de modelización geométrica se describe, entre otros, en el interesante trabajo de Cardona y Samartín [CaS86], el cual tiene por objetivo la resolución de problemas de interpolación de Hermite-Birkhoff utilizando espacios de elementos finitos polinómicos que permiten determinar interpolantes con ciertas condiciones de regularidad y minimizan ciertos funcionales cuadráticos de tipo elíptico.

3.4 ANALISIS DE PROBLEMAS DE CONTORNO UNIDIMENSIONALES CON SPLINES GENERALIZADOS. SOLUCIÓN NODAL EXACTA Y ACCIONES REPARTIDAS EQUIVALENTES

Desarrollamos en este apartado la aplicación de los splines generalizados a la resolución de problemas de contorno unidimensionales. La idea utilizada consiste en emplear en el método usual de elementos finitos de Galerkin [StF73, p.116], [OdC83, p.35] funciones de prueba y funciones test o de ponderación pertenecientes al espacio de dimensión finita engendrado por los splines generalizados correspondientes al operador L de orden $2m$ de la ecuación diferencial. Esta elección del espacio de funciones conduce a soluciones que son exactas en los nodos. Es más dicho resultado se mantiene aunque se tome un espacio arbitrario para las funciones de prueba. Los métodos de Bunov-Galerkin o Petrov-Galerkin generan consecuentemente los mismos resultados. Por otra parte la idea de acción equivalente (ya considerada en [RoO98] y [ROC02]) sugiere una nueva aproximación, para la solución de los problemas de contorno, que además de interpolar en los nodos los valores exactos de los desplazamientos, interpola también los valores de las acciones de equilibrio. Esta nueva solución puede interpretarse como un cierto spline generalizado de orden $4m$ asociado al operador L^2 .

3.4.1 Solución nodal exacta en problemas de contorno unidimensionales

El problema de contorno que se plantea en este apartado y cuya definición precisa se da después, consiste en resolver en forma aproximada una ecuación diferencial ordinaria autoadjunta no homogénea en el intervalo $[x_1, x_n]$, de modo que la solución en los nodos $x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n$ verifica ciertas condiciones de contorno tanto de tipo esencial como de tipo natural relativas al operador diferencial de la ecuación. Estas condiciones deben garantizar la unicidad de solución del correspondiente problema de contorno de n puntos.

Sea la ecuación diferencial no homogénea

$$L(u) = f \quad (3.4.1)$$

definida en (a, b) , siendo el operador diferencial L el definido por (3.2.5). Multiplicando por la función v ambos miembros de (3.4.1) e integrando por partes (residuos ponderados) y aplicando (3.2.9) se obtiene la expresión

$$\int_a^b \sum_{j=0}^m a_j D^j u D^j v dx = \int_a^b f v dx + \sum_{i=1}^{2m} l_i(v) \bar{l}_i(u) \quad (3.4.2)$$

la cual corresponde a la formulación débil de (3.4.1) o, lo que es lo mismo, al principio de los trabajos virtuales.

A continuación pasamos a construir la ecuación de equilibrio en $[a, b]$ para las soluciones de (3.4.1). Damos pasos análogos a los efectuados en la demostración del resultado (IV)

para lo que suponemos que el operador diferencial L y la longitud del intervalo genérico $[a, b]$ verifican las mismas hipótesis del apartado 3.3.1 Asimismo suponemos que f es continua en (a, b) y que existen y son finitos los límites siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x), c = a^+, b^-.$$

La solución de (3.4.1) que verifica las condiciones de interpolación indicadas en el citado apartado es

$$u = w + u_H = w + \sum_{i=1}^{2m} r_i N_i \quad (3.4.3)$$

donde w es una solución de la ecuación completa que verifica las condiciones homogéneas siguientes

$$l_i(w) = 0, i = 1, \dots, 2m$$

Estas condiciones de interpolación siempre pueden imponerse ya que si \bar{w} es una solución particular arbitraria, entonces

$$w = \bar{w} - \sum_{i=1}^{2m} l_i(\bar{w}) N_i$$

verifica tal y como puede comprobarse, las condiciones citadas. Obsérvese que se está suponiendo que el problema de contorno definido por (3.4.1) y las condiciones de contorno $l_i(u) = r_i, i = 1, \dots, 2m$, siendo r_i números reales arbitrarios dados, posee como solución única a la función dada por (3.4.3).

Teniendo en cuenta que (véase (3.2.9) y (3.2.10))

$$a(u, v) = \int_a^b \sum_{j=0}^m a_j D^j u D^j v dx = \sum_{i=1}^{2m} l_i(u) \bar{l}_i(v) + \int_a^b L(v) u dx \quad (3.4.4)$$

y considerando ahora en el primer miembro de la expresión (3.4.2) la u dada por (3.4.3) y $v = N_j$ se obtiene para cada $j = 1, \dots, 2m$

$$\sum_{i=1}^{2m} l_i(w + \sum_{k=1}^{2m} r_k N_k) \bar{l}_i(N_j) = \int_a^b f N_j dx + \sum_{i=1}^{2m} l_i(N_j) \bar{l}_i(u) \quad (3.4.5)$$

donde se ha tenido en cuenta que $L(N_j) = 0$. Simplificando queda

$$\sum_{i=1}^{2m} k_{ji} r_i = \int_a^b f N_j dx + \bar{l}_j(u) \quad (3.4.6)$$

Expresando lo anterior en forma matricial se tiene la ecuación

$$\tilde{K} \tilde{u} = \tilde{f} + \tilde{q}^c \quad (3.4.7)$$

o equivalentemente mediante la expresión particionada

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(a,b)} & K_{12}^{(a,b)} \\ K_{21}^{(a,b)} & K_{22}^{(a,b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}(a^+) \\ \tilde{u}(b^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}(a^+) \\ \tilde{f}(b^-) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{q}^c(a^+) \\ \tilde{q}^c(b^-) \end{bmatrix} \quad (3.4.8)$$

que es verificada por cualquier solución de (3.4.1) en el intervalo (a, b) . Dicha ecuación la denominamos de equilibrio local en el intervalo $[a, b]$, donde la matriz de rigidez \tilde{K} es la misma matriz que en (3.3.1), el vector de desplazamientos nodales es análogamente a (3.3.2) $\tilde{u} = \tilde{r}$, el vector de cargas nodales de equilibrio o de contorno \tilde{q}^c está definido como en (3.3.2), con la salvedad de que la función u es allí solución de la ecuación diferencial homogénea mientras que aquí lo es de la ecuación completa (3.4.1) y finalmente el vector \tilde{f} que denominamos de cargas nodales equivalentes es

$$\tilde{f}^i = \left(\int_a^b f N_1 dx, \dots, \int_a^b f N_{2m} dx \right)$$

Las componentes del vector de cargas nodales equivalentes verifican que

$$\begin{aligned} \int_a^b f N_j dx &= -\bar{l}_j(w) \\ j &= 1, \dots, 2m \end{aligned}$$

Resultado que se deduce trivialmente de (3.4.5) o equivalentemente de (3.4.6) al considerar la solución particular $u = w$, es decir $r_1 = \dots = r_{2m} = 0$. Lo anterior permite poner

$$\sum_{i=1}^{2m} k_{ji} r_i = \bar{l}_j(u - w) = \bar{l}_j(u_H)$$

que como puede verse corresponde a la ecuación de equilibrio (3.3.1) del elemento de spline generalizado que interpola los mismos datos que la solución de la ecuación completa (3.4.1), teniéndose $\tilde{q} = \tilde{f} + \tilde{q}^c$.

De los resultados anteriores se deriva la siguiente interpretación de tipo estructural: las cargas nodales equivalentes, correspondientes a una acción repartida, son las opuestas de las cargas nodales de equilibrio relativas a la solución particular de la ecuación completa que verifica condiciones de interpolación homogéneas. Esta es la idea que, en cálculo de estructuras mediante el proceso de empotramiento en los nudos y aplicando el principio de superposición, permite pasar de cargas repartidas a cargas concentradas únicamente en los

nudos. A partir de aquí se llega de forma un tanto intuitiva al hecho de que los movimientos de los nudos en la estructura con cargas repartidas y los de la que tiene únicamente cargas concentradas (las correspondientes) en dichos nudos, son los mismos.

Veamos ahora que se llega a la misma ecuación de equilibrio local (3.4.6) sustituyendo, en el primer miembro de (3.4.2), la solución exacta u de (3.4.1) por cualquier aproximación \hat{u} tal que

$$\begin{aligned} l_i(u) &= l_i(\hat{u}) = r_i \\ i &= 1, \dots, 2m \end{aligned}$$

En efecto, de (3.4.4) resulta $a(u, v) = a(\hat{u}, v) = \sum_{i=1}^{2m} r_i \bar{l}_i(v)$ ya que la función de ponderación v es tal que $L(v) = 0$. De esta forma tomando $v = N_j$ se tiene para cada $j = 1, \dots, 2m$

$$a(u, N_j) = a(\hat{u}, N_j) = \sum_{i=1}^{2m} k_{ji} r_i$$

Obsérvese que la aproximación \hat{u} dada por

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^{2m} r_i \hat{N}_i$$

con $l_i(\hat{N}_j) = \delta_{ij}$, puede ser totalmente arbitraria. Una aproximación de particular interés es aquella donde la base de Lagrange de funciones de interpolación está formada por soluciones de la ecuación homogénea asociada a (3.4.1), es decir $\hat{N}_i = N_i, i = 1, \dots, 2m$.

La expresión (3.4.7) resulta también de forma inmediata poniendo $v = \sum_{i=1}^{2m} s_i N_i$ con s_i arbitrarios, así (3.4.2) queda en la forma

$$\tilde{s}' \tilde{K} \tilde{r} = \tilde{s}' (\tilde{f} + \tilde{q}^c) \quad (3.4.9)$$

y teniendo en cuenta que $\tilde{s}' = (s_1, \dots, s_{2m})$ es arbitrario se obtiene la expresión indicada. Empleando para (3.4.8) la expresión matricial particionada en términos de u y v ésta queda como

$$(\tilde{v}(a^+)')', \tilde{v}(b^-)')' \begin{bmatrix} K_{11}^{(a,b)} & K_{12}^{(a,b)} \\ K_{21}^{(a,b)} & K_{22}^{(a,b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}(a^+) \\ \tilde{u}(b^-) \end{bmatrix} = (\tilde{v}(a^+)')', \tilde{v}(b^-)')' \left(\begin{bmatrix} \tilde{f}(a^+) \\ \tilde{f}(b^-) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{q}^c(a^+) \\ \tilde{q}^c(b^-) \end{bmatrix} \right) \quad (3.4.10)$$

Por otra parte el resultado de reciprocidad indicado en (3.2.13) para dos funciones u y v que verifican en el intervalo genérico (a, b) , $L(u) = f$, $L(v) = g$, se puede expresar con la notación de este apartado en la forma

$$\tilde{v}' \tilde{q}_u^C + \int_a^b f v dx = \tilde{u}' \tilde{q}_v^C + \int_a^b g u dx \quad (3.4.11)$$

La interpretación mecánica o estructural de la expresión anterior es inmediata: el trabajo de las acciones correspondientes a la solución u realizado sobre los desplazamientos relativos a la solución v es igual al trabajo de las acciones correspondientes a v sobre los desplazamientos dados por u .

A continuación se obtiene de manera análoga a los splines generalizados mediante el proceso usual de ensamblado (véase el apartado 3.3.2), la ecuación de equilibrio global en el intervalo $[x_1, x_n]$ que verifica cualquier función $u(x)$ solución de

$$L(u) = f \text{ en } \bigcup_{i=1}^{n-1} (x_i, x_{i+1}) \quad (3.4.12)$$

que sea de la clase C^{m-1} en dicho intervalo $[x_1, x_n]$.

Sumando las expresiones (3.4.10) correspondientes a cada intervalo (x_i, x_{i+1}) , $i = 1, \dots, n-1$ y considerando por la regularidad citada que $\tilde{u}(x_i^+) = \tilde{u}(x_i^-)$ en los nodos internos y lo mismo para v , y poniendo como en el caso de los splines generalizados

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^t &= (\tilde{u}(x_1)', \dots, \tilde{u}(x_n)') = (u(x_1), \dots, u^{(m-1)}(x_1), \dots, u(x_n), \dots, u^{(m-1)}(x_n)) = \\ &= (r_{11}, \dots, r_{1m}, \dots, r_{n1}, \dots, r_{nm}) \end{aligned}$$

e idénticamente para v , se obtiene

$$\mathbf{v}^t \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{v}^t (\mathbf{F} + \mathbf{Q}^C)$$

la cual teniendo en cuenta que se verifica para cualquier \mathbf{v} , es equivalente a esta otra que denominamos ecuación de equilibrio global para las soluciones de (3.4.12) que verifican la condición de regularidad indicada

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} + \mathbf{Q}^C \quad (3.4.13)$$

La matriz \mathbf{K} que denominamos de rigidez global es la misma que en (3.3.29), sin embargo el vector columna \mathbf{F} que denominamos de acciones nodales equivalentes es aquí el que resulta de ensamblar las acciones nodales equivalentes correspondientes a cada elemento, asimismo el vector \mathbf{Q}^C de acciones nodales exteriores es como en los splines generalizados el resultado de ensamblar las acciones nodales de equilibrio locales. Este último vector es como (3.3.31) con la salvedad de que aquí está definido para funciones que son solución de la ecuación completa (3.4.12) en lugar de venir dado para splines generalizados, de ahí que

lo distingamos como en el caso local con el superíndice c . Los vectores \mathbf{F} y \mathbf{Q}^c pueden expresarse como

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^t &= (f_{11}, \dots, f_{1m}, \dots, f_{n1}, \dots, f_{nm}) \\ (\mathbf{Q}^c)^t &= (\bar{l}_{11}(u), \dots, \bar{l}_{1m}(u), \dots, \bar{l}_{n1}(u), \dots, \bar{l}_{nm}(u))\end{aligned}$$

donde las componentes del vector de cargas nodales equivalentes son

$$f_{ij} = \int_{x_1}^{x_n} f N_{ij}(x) dx, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

siendo $N_{ij}(x)$ las funciones de forma globales definidas en $[x_1, x_n]$ que constituyen la base de Lagrange de splines generalizados, es decir

$$l_{pq}(N_{ij}) = \delta_{ip} \delta_{jq}, \quad p = 1, \dots, n, \quad q = 1, \dots, m$$

donde las formas lineales de interpolación l_{pq} vienen definidas como $l_{pq}(u) = u^{(q-1)}(x_p)$ y $L(N_{ij}) = 0$ en $\bigcup_{i=1}^{n-1} (x_i, x_{i+1})$. Asimismo las formas lineales \bar{l}_{ij} son las componentes del vector definido en (3.3.31) a partir de los operadores dados en (3.2.7).

Por otra parte análogamente al caso local $\mathbf{Q} = \mathbf{F} + \mathbf{Q}^c$ es el vector de acciones nodales exteriores correspondiente al spline generalizado que interpola en los nodos x_1, \dots, x_n los mismos valores que la solución de (3.4.12) considerada.

Señalamos que como en el caso de los splines generalizados la expresión (3.4.13) es una identidad la cual únicamente pone de manifiesto que fijados los desplazamientos mediante el vector \mathbf{u} y fijadas las acciones exteriores f en $[x_1, x_n]$, se tienen de manera unívoca las acciones nodales exteriores \mathbf{Q}^c .

La expresión análoga a la (3.4.2) correspondiente a la formulación débil para $[x_1, x_n]$ se obtiene sumando cada una de las que resultan en (3.4.2) al considerar los subintervalos $(x_i, x_{i+1}), i = 1, \dots, n-1$, resultando

$$\int_{x_1}^{x_n} \sum_{j=0}^m a_j D^j u D^j v dx = \int_{x_1}^{x_n} f v dx + \mathbf{v}^t \mathbf{Q}^c \quad (3.4.14)$$

De aquí se obtiene de manera directa la ecuación de equilibrio (3.4.13) expresando v mediante las funciones de forma globales de splines generalizados $N_{ij}(x)$.

También se tiene de manera análoga a (3.4.11) el resultado de reciprocidad para las soluciones u, v de (3.4.12) correspondientes a las acciones f, g , y que interpolan los desplazamientos dados por los vectores u, v . En efecto, basta sumar las expresiones análogas a la (3.4.11) correspondientes a los subintervalos $(x_i, x_{i+1}), i = 1, \dots, n-1$ obteniéndose

$$v^t Q_u^C + \int_{x_1}^{x_n} f v dx = u^t Q_v^C + \int_{x_1}^{x_n} g u dx \quad (3.4.15)$$

De esta expresión resulta también de forma inmediata, la ecuación de equilibrio global (3.4.13). Basta para ello aplicar (3.4.15) entre la solución de (3.4.12) que interpola los datos dados por el vector de desplazamientos u y las funciones de forma globales ya indicadas.

Podemos definir ahora en $[x_1, x_n]$ un problema de contorno de n puntos donde la solución u además de cumplir (3.4.12) verifica las condiciones esenciales de interpolación del tipo Hermite-Birkoff $l_{ij}(u) = u^{(j-1)}(x_i) = r_{ij}$, $(i, j) \in I_n \times I_m = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ donde

$$r_{ij} = r_{ij}^*, (i, j) \in J_p \quad (3.4.16)$$

son datos, siendo J_p un cierto subconjunto de $I_n \times I_m$ de cardinal p . Asimismo la solución verifica las condiciones naturales $\bar{l}_{ij}(u) = Q_{ij}^C$, $(i, j) \in I_n \times I_m$ de modo que

$$Q_{ij}^C = Q_{ij}^{C*}, (i, j) \in J_s \quad (3.4.17)$$

son también datos, siendo $J_s = I_n \times I_m - J_p$ el conjunto de cardinal $s = n \times m - p$. En definitiva se está indicando del mismo modo que en el apartado 3.3.3 que se conocen p componentes de las $n \times m$ del vector u de desplazamientos nodales y $s = n \times m - p$ componentes del vector Q^C del vector de acciones nodales exteriores.

El problema de contorno planteado se puede expresar de manera equivalente en la forma siguiente: Obtener la solución $u \in C^{m-1}[x_1, x_n]$ de la ecuación diferencial

$$L(u) = \bar{f} = f + \sum_{(i,j) \in J_s} Q_{ij}^{C*} (-1)^{j-1} \delta^{(j-1)}(x - x_i) \quad (3.4.18)$$

que verifica las condiciones de interpolación dadas por (3.4.16), donde \bar{f} es la acción generalizada que mediante el simbolismo de las distribuciones hemos expresado en función de derivadas de deltas de Dirac. Cuando la acción f sea nula en todos los subintervalos, la solución exacta será un spline generalizado pues en dicho caso \bar{f} se compone únicamente de acciones nodales exteriores.

NOTA: Obsérvese que aunque u pertenece al espacio de funciones indicado es en realidad un elemento del espacio de Sobolev [Ada75, p.45] H^m o $W_2^m[x_1, x_n]$ formado por el conjunto de funciones reales h tales que $D^{m-1}h$ es absolutamente continua en el intervalo dado y $D^m h$ es de cuadrado integrable en el sentido de Lebesgue, es decir $D^m h \in L_2$, teniéndose que $H^m[x_1, x_n] \subset C^{m-1}[x_1, x_n]$. Dicho espacio de Sobolev puede verse como el resultado de completar el espacio de funciones $C^\infty[x_1, x_n]$ con respecto a la norma

$$\|h\|_{H^m} = \left\{ \int_{x_1}^{x_n} \left(\sum_{j=0}^m (D^j h)^2 \right) dx \right\}^{1/2} \quad (3.4.19)$$

Aunque $f \in C(\bigcup_{i=1}^{n-1} (x_i, x_{i+1}))$, \bar{f} pertenece a $H^{-m}[x_1, x_n]$, es decir, al dual de $H^m[x_1, x_n]$.

De hecho desde el punto de vista de las aplicaciones, los casos más interesantes son aquellos donde la acción repartida f es realmente de H^{-m} en cada subintervalo (x_i, x_{i+1}) , siendo la solución u en dicha situación una función de $H^m \subset C^{m-1}$ en cada subintervalo. Nótese que en este caso más general la solución dejaría de ser de la clase C^{2m} en los citados subintervalos y por tanto las derivadas que definen a los operadores diferenciales (3.2.7) deben ser consideradas en el sentido de las distribuciones.

Teniendo en cuenta que todas las componentes del vector F de acciones nodales equivalentes son conocidas y que $Q = F + Q^C$ representa las acciones nodales exteriores para el spline generalizado que interpola los mismos datos que la solución que se busca, el problema de unicidad de solución para el problema de contorno planteado queda reducido al problema de interpolación con splines generalizados abordado en el apartado citado, por lo que nos remitimos a lo allí expresado.

Veamos ahora que la resolución de este problema por el método de Galerkin conduce a valores nodales exactos, obteniéndose en consecuencia los mismos resultados que P. Tong [Ton69] con la particularidad de que aquí no exigimos que la forma bilineal $a(u, v)$ sea definida positiva. Asimismo se demuestra que la exactitud nodal se consigue aunque el espacio de funciones de prueba no sea de splines generalizados.

Sea V el espacio de dimensión infinita definido como

$$V = \{h \in H^m[x_1, x_n] \mid \forall (i, j) \in J_p, h^{(j-1)}(x_i) = 0\} \quad (3.4.20)$$

teniendo en cuenta la formulación equivalente para el problema de contorno:

Obtener $u \in g + V$ tal que $a(u, v) = l(v)$, $\forall v \in V$ donde $a(u, v)$ es el primer miembro de (3.4.14) y

$$l(v) = \int_{x_1}^{x_n} \bar{f}v dx = \int_{x_1}^{x_n} f v dx + \sum_{(i,j) \in J_s} Q_{ij}^{C^*} v^{(j-1)}(x_i) \quad (3.4.21)$$

Introduciendo ahora en dicha ecuación la aproximación

$$\hat{u} = g + \sum_{(i,j) \in J_s} r_{ij} \hat{N}_{ij} \in g + S_h, S_h \subset V \quad (3.4.22)$$

donde $g = \sum_{(i,j) \in J_p} r_{ij}^* \hat{N}_{ij}$ es una función que interpola los desplazamientos datos, expresada mediante las funciones de forma globales \hat{N}_{ij} (arbitrarias) donde

$$l_{pq}(\hat{N}_{ij}) = \delta_{ip} \delta_{jq}, p = 1, \dots, n, q = 1, \dots, m \quad (3.4.23)$$

y ponderando con los elementos del subespacio V_h de V engendrado por los splines generalizados $N_{pq}, \forall (p, q) \in J_s$, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\sum_{(i,j) \in J_p} r_{ij}^* a(\hat{N}_{ij}, N_{pq}) + \sum_{(i,j) \in J_s} r_{ij} a(\hat{N}_{ij}, N_{pq}) = \int_{x_1}^{x_n} f N_{pq} dx + Q_{pq}^{C^*}, \forall (p, q) \in J_s \quad (3.4.24)$$

Esta expresión es por los resultados ya vistos para las ecuaciones de equilibrio local y teniendo en cuenta el ensamblado, la misma que se obtiene para la solución exacta. La expresión que resulta después de reordenar convenientemente como en el apartado 3.3.3 y llamar u_p^*, u_s a los desplazamientos datos e incógnitas respectivamente y $Q_s^{C^*}$ a las acciones nodales datos, es justamente la segunda línea de (3.3.32), es decir

$$K_{ss} u_s = F_s + Q_s^{C^*} - K_{sp} u_p^* = Q_s^* - K_{sp} u_p^*.$$

Obsérvese que el único requerimiento para la resolución del problema de contorno es que la matriz K_{ss} sea regular y no necesariamente definida positiva.

Se tiene el siguiente resultado:

(VI) En el supuesto de que la solución exacta del citado problema de contorno de n puntos sea única (K_{ss} regular), la solución aproximada obtenida por el método de Galerkin en la forma indicada (aproximación arbitraria de la solución y ponderación con splines generalizados) toma en los nodos los mismos valores que la solución exacta. Además una vez determinados los desplazamientos nodales desconocidos, se puede determinar en cada subintervalo los valores exactos de las acciones nodales de equilibrio a partir de la correspondiente ecuación de equilibrio local.

En las aplicaciones lo frecuente es tomar las funciones $\hat{N}_{ij} = N_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, es decir se emplea el método de Bunov-Galerkin (cuando $\hat{N}_{ij} \neq N_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ el método se conoce con el nombre de Petrov-Galerkin) de esta manera la solución aproximada \hat{u} del problema de contorno será también un spline generalizado, no obstante consideramos también la posibilidad de otras aproximaciones que están relacionadas con la idea de acción (repartida) equivalente.

Otro problema, diferente al de contorno de n puntos citado, y que describimos esquemáticamente, consiste en determinar los valores de los desplazamientos en todos los nodos x_1, x_2, \dots, x_n y las acciones de equilibrio por la izquierda y derecha en dichos nodos, conociendo para el primer nodo x_1 (o cualquier otro nodo) los valores del vector de desplazamientos $\tilde{u}(x_1^+)$ y simultáneamente las acciones locales de equilibrio $\tilde{q}(x_1^+)$ y asimismo la acción f en el intervalo $[x_1, x_n]$ y las acciones nodales exteriores en todos los nodos.

Este problema, que guarda gran similitud con los problemas clásicos de valor inicial (obsérvese que los datos de las derivadas en el nodo x_1 , desde la de orden m hasta la de orden $2m-1$, se dan también aunque de forma un tanto implícita mediante las componentes de $\tilde{q}(x_1^+)$), se resuelve de forma exacta y de manera recurrente a partir de las expresiones deducidas de la ecuación (3.4.8), teniéndose el siguiente esquema de cálculo

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x_{i+1}^+) &= \tilde{u}(x_{i+1}^-) = (K_{12}^i)^{-1} (\tilde{f}(x_i^+) + \tilde{q}^C(x_i^+) - K_{11}^i \tilde{u}(x_i^+)) \\ \tilde{q}^C(x_{i+1}^+) &= (Q^C)_{i+1} - \tilde{q}^C(x_{i+1}^-) = (Q^C)_{i+1} + \tilde{f}(x_{i+1}^-) - K_{21}^i \tilde{u}(x_i^+) - K_{22}^i \tilde{u}(x_{i+1}^-)\end{aligned}\quad (3.4.25)$$

donde $(Q^C)_{i+1} = (Q_{i+1,1}^C, \dots, Q_{i+1,m}^C)$ representa la acción nodal exterior en el nodo x_{i+1} . Obsérvese que para su aplicación únicamente se requiere la regularidad de la submatriz K_{12}^i . En el trabajo [RoO99] se ha realizado una aplicación de este caso a un problema de dinámica estructural.

3.4.2 Acciones repartidas equivalentes en problemas de contorno unidimensionales

Considerando en la ecuación de equilibrio en $[a, b]$ correspondiente a (3.4.1) el vector de cargas nodales equivalentes, puede observarse que fijados los desplazamientos $\tilde{u} = \tilde{r}$, hay infinitos estados de carga diferentes al correspondiente a la acción repartida f que proporcionan las mismas acciones nodales de equilibrio \tilde{q}^C . En efecto basta considerar otra acción cualquiera g que en relación con f verifique

$$\int_a^b (f - g) N_i dx = 0, i = 1, \dots, 2m \quad (3.4.26)$$

pues de este modo los valores que intervienen en la ecuación de equilibrio son únicamente $\int_a^b f N_i dx, i = 1, \dots, 2m$ y consecuentemente las acciones de equilibrio correspondientes a f y g son las mismas. Diremos que en dicho caso las dos acciones o estados de carga son equivalentes.

La condición anterior la podemos expresar así: dos estados de carga definidos por las funciones f y g son equivalentes en (a, b) si su diferencia $f - g$ es ortogonal a $N(L)$, es decir al espacio de funciones engendrado por las soluciones de la ecuación homogénea $L(u) = 0$ en dicho intervalo.

Un caso de especial interés, por los resultados que se obtienen y las interpretaciones que permite realizar, es precisamente aquél donde la acción equivalente a una acción f dada se toma en el espacio de funciones $N(L)$. Dicha acción (repartida) equivalente al pertenecer a un espacio de dimensión finita podemos considerarla como un cierto estado simplificado de carga, además ésta tiene gran regularidad, pues en lugar de ser continua como la carga de partida (o incluso en la situación más general de H^{-m}), es $C^{2m}(a, b)$. Dicha acción que representamos por F es la proyección ortogonal de la acción dada f sobre el núcleo del operador diferencial y podemos considerarla como un representante cónico de la clase de equivalencia a la que pertenece la acción de partida. La expresión de la carga F en la base de funciones de forma locales se obtiene a partir del teorema de la proyección ortogonal como

$$F = (N_1, \dots, N_{2m}) G^{-1} \tilde{f} \quad (3.4.27)$$

donde los elementos de la matriz de Gram G son $\int_a^b N_i N_j dx, i, j = 1, \dots, 2m$.

Una consecuencia interesante derivada de la elección de F como representante del estado de carga consiste en considerar la relación entre las soluciones de $L(u) = f$ y $L(U) = F$ donde las condiciones de contorno esenciales para ambos casos son las mismas: $l_i(u) = l_i(U) = r_i, i = 1, \dots, 2m$. Resulta de lo anterior que las acciones nodales de equilibrio coinciden, es decir, $\bar{l}_i(u) = \bar{l}_i(U), i = 1, \dots, 2m$, y como $F \in N(L)$ se tiene además que U pertenece al núcleo del operador L^2 , esto es, $L^2(U) = 0$ (suponemos para esto que los coeficientes del operador L tienen regularidad suficiente para que U sea una función de la clase $C^{4m}(a, b)$). Obsérvese que la función U puede interpretarse como la solución de $L^2(U) = 0$ que interpola los $4m$ valores siguientes: $l_i(u), \bar{l}_i(u), i = 1, \dots, 2m$. La solución U puede calcularse sin determinar F pues basta obtener el elemento del núcleo de L^2 que interpola los $4m$ valores indicados. A posteriori puede determinarse si se quiere, F , mediante $F = L(U)$ o por (3.4.27).

Todo lo anterior podemos resumirlo del siguiente modo:

(VII) Dada la acción o estado de carga f en (a,b) existe otro estado F que pertenece al espacio de soluciones de la ecuación homogénea, y que denominamos acción repartida equivalente o estado de carga simplificado, que genera las mismas cargas nodales equivalentes que f , siendo F la proyección ortogonal de f en el citado espacio. Además, la solución de $L(U) = F$ que satisface $l_i(U) = l_i(u)$, $i = 1, \dots, 2m$, verifica que $\bar{l}_i(U) = \bar{l}_i(u)$, $i = 1, \dots, 2m$ y puede interpretarse por tanto como la solución de $L^2(U) = 0$ que interpola los valores $l_i(u), \bar{l}_i(u), i = 1, \dots, 2m$.

Los resultados anteriores se extienden de manera inmediata a todo el dominio. En efecto, la equivalencia de acciones en todo el dominio puede definirse del siguiente modo: dos acciones son equivalentes en todo el dominio si restringidas a cada subintervalo resultan equivalentes. Por otra parte si una acción se sustituye por otra equivalente en todo el dominio, es decir si f se sustituye en cada subintervalo por cualquier otra equivalente g , las ecuaciones de equilibrio local no se modifican y, consecuentemente la ecuación de equilibrio global (3.4.13) es la misma. Se concluye que las soluciones de los problemas de contorno de n puntos (u otros como por ejemplo el ya mencionado de valor inicial) cuando existan y sean únicas, serán las mismas cuando las acciones sean equivalentes, es decir, los desplazamientos nodales desconocidos y las acciones de equilibrio en cada intervalo coincidirán.

Es interesante señalar por otra parte que las solución del problema de contorno de n puntos mediante el spline generalizado y mediante la solución interpoladora U correspondiente a la carga repartida equivalente F , representan de alguna manera situaciones extremas en relación con la distribución de la carga. En efecto, en el primer caso lo que se hace es transformar el problema en otro donde únicamente hay acciones nodales exteriores (las iniciales más las nodales equivalentes) y ninguna acción repartida y en el segundo la acción inicial se transforma en una acción repartida con cierto grado de regularidad.

Por otro lado el hecho de que para acciones equivalentes las acciones nodales de equilibrio coincidan en los extremos de cada subintervalo permite inferir una cierta relación en el interior de dichos subintervalos entre los valores de los operadores de (3.2.7), $P_i, i = 0, \dots, m-1$, para dos soluciones correspondientes a acciones equivalentes. Dicha relación la determinamos a continuación para las soluciones correspondientes a las acciones f y F . Integrando por partes en el intervalo genérico, después de multiplicar por la función $v \in N(L)$ ambos miembros de $L(u) = f$ y $L(U) = F$ y teniendo en cuenta los operadores definidos en (3.2.7), se obtienen las expresiones siguientes

$$-\sum_{i=0}^k [(P_i(u) - P_i(U))v^{(i)}]_a^b + \int_a^b \left[\left(\sum_{i=0}^k a_i D^i (u - U) D^i v \right) + (P_k(u) - P_k(U))v^{(k+1)} \right] dx = 0$$

$$k = 0, \dots, m-1$$

las cuales considerando (3.2.11) y la propiedad de interpolación $\bar{l}_i(U) = \bar{l}_i(u)$, $i = 1, \dots, 2m$, queda reducida únicamente al segundo sumando, es decir

$$\int_a^b \left[\left(\sum_{i=0}^k a_i D^i (u - U) D^i v \right) + (P_k(u) - P_k(U)) v^{(k+1)} \right] dx = 0 \quad (3.4.28)$$

$k = 0, \dots, m - 1$

La expresión anterior para el caso $k = m - 1$ y considerando (3.2.7) y (3.2.8) equivale a

$$a(u - U, v) = 0 \quad (3.4.29)$$

donde hay que tener en cuenta que $U \in N(L^2)$ y $v \in N(L)$.

En las publicaciones: [RoO98] y [ROC02] se ha expuesto la aplicación de este concepto de acción repartida equivalente a los modelos de vigas de Bernoulli-Euler y Timoshenko respectivamente. En ellas se ha demostrado que la solución U es mejor que la solución obtenida por elementos finitos y asimismo que las leyes deducidas a partir de U , de esfuerzos cortantes y momentos flectores verifican propiedades de interpolación y ortogonalidad que justifican de manera precisa la bondad de los resultados obtenidos con la aplicación de dicha idea. En el apartado siguiente 3.5 se desarrolla la aplicación del concepto al caso de piezas sometidas simultáneamente a flexión y compresión: viga-columna.

3.4.3 Comentarios

Todo el desarrollo realizado en este apartado 3.4 en relación con la exactitud nodal, de las soluciones aproximadas de problemas de contorno unidimensionales, se ha basado en la consideración de que el operador diferencial L de orden $2m$ es autoadjunto. Cabe sin embargo la posibilidad de aplicar gran parte de las ideas aquí expuestas a otras situaciones donde el operador no sea autoadjunto. En dicho caso puede comprobarse que se consigue también exactitud nodal utilizando funciones de ponderación pertenecientes al núcleo del operador adjunto L^* . Otra posibilidad en cierta manera equivalente, consiste en transformar la ecuación $L(u) = f$ en otra $L(U) = F$ donde F se obtiene como resultado de proyectar f sobre el núcleo de L^* y si la regularidad del operador lo permite transformar la ecuación inicial en $L^*L(U) = 0$ y considerar U como un cierto spline generalizado relativo al operador L^*L que es autoadjunto. Algunos de estos aspectos son comentados en un apéndice, que también hace referencia al trabajo de P. Tong [Ton69], en el texto de Zienkiewicz y Taylor [ZiT94, p.631] aunque desde un enfoque ajeno al de los splines generalizados aquí expuesto. Finalmente respecto al concepto de acción repartida equivalente y su conexión con la idea de solución nodal exacta dentro de la metodología de elementos finitos, no se han encontrado antecedentes en la amplia literatura consultada.

3.5 APLICACIÓN AL ANÁLISIS DEL PANDEO DE PILARES EN RÉGIMEN LINEAL

En este punto se hace una aplicación de la teoría de splines generalizados y especialmente de lo expuesto en el apartado 3.4, al estudio de la viga-columna. Fundamentalmente se destacan los resultados sobre solución nodal exacta de los problemas cuando se emplean elementos finitos contruidos mediante funciones splines y la optimización de los valores calculados a partir de la utilización del concepto de acción repartida equivalente. Todo lo anterior se ilustra con un ejemplo donde se compara además la solución exacta del problema con la que se obtiene al emplear como carga repartida, la equivalente.

3.5.1 Generalidades

Se considera que el problema de la pieza sometida a flexión y compresión en régimen lineal viene definido por la ecuación diferencial de cuarto orden $L(u) = f(x)$ donde el operador dado en (3.2.5), para $m = 2$, es de la forma ya indicada en (3.3.16)

$$L(u) = (-1)^2 D^2(a_2(x)D^2u) + (-1)D(a_1(x)Du) \quad (3.5.1)$$

donde $a_2(x) = A(x)$ es la rigidez que suponemos en general variable en el intervalo (a, b) y $a_1(x) = -P$ con $P > 0$ da lugar a un es esfuerzo axil constante y conocido en cada intervalo. Si la carga en cada elemento es $f(x)$, la ecuación diferencial correspondiente en el intervalo o elemento (a, b) puede expresarse en la forma

$$(A(x)u'')'' + Pu'' = f(x) \quad (3.5.2)$$

En el dominio formado por la unión de los elementos $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$ la ecuación diferencial es de la forma dada en (3.4.18) con $A(x)$, P y $f(x)$ diferentes en general de unos intervalos a otros. La acción en todo el dominio viene dada mediante la suma de f que actúan en la unión de los intervalos abiertos (x_i, x_{i+1}) , $i = 1, \dots, n-1$, y de las cargas puntuales y momentos aplicados en los nodos de separación de los elementos. Estas vienen definidas mediante los sumando que corresponden respectivamente a las deltas y derivadas de deltas de Dirac. En general la acción f en cada intervalo es una función del espacio de Sobolev $H^{-2}(a, b)$, es decir está formada por la suma de funciones continuas a trozos, y deltas de Dirac y dipolos aplicadas en puntos intermedios del intervalo.

El problema de contorno de n puntos viene dado por las correspondientes condiciones esenciales de Hermite-Birkoff y naturales. Las primeras son de la forma indicada en (3.4.16) que para este caso equivalen a fijar en algunos nodos los valores del desplazamiento $u(x_i)$ y/o la derivada $u'(x_i)$, es decir

$$l_{ij}(u) = u^{(j-1)}(x_i) = r_{ij}, (i, j) \in I_n \times I_2 = \{1, \dots, n\} \times \{1, 2\}$$

donde $r_{ij} = r_{ij}^*$, $(i, j) \in J_p$ son datos, siendo J_p un subconjunto de cardinal p de $I_n \times I_2$.

Por otra parte las condiciones de contorno naturales vienen dadas por (3.4.17) ambas, como antes, para el caso de $m = 2$, siendo para los datos que se fijan

$$\bar{l}_{ij}(u) = Q_{ij}^{C*}, \quad (i, j) \in J_s = I_n \times I_2 - J_p$$

con

$$\bar{l}_{i1}(u) = -(A(x)u'')' \Big|_{x_i^-} - Pu' \Big|_{x_i^-} + (A(x)u'')' \Big|_{x_i^+} + Pu' \Big|_{x_i^+}$$

$$\bar{l}_{i2}(u) = A(x)u'' \Big|_{x_i^-} - A(x)u'' \Big|_{x_i^+}$$

Suponemos también que las condiciones esenciales determinan un sistema (3.4.24) con solución única, es decir la correspondiente matriz K_{ss} que resulta después del ensamblado de las correspondientes matrices de rigidez de la forma dada en (3.3.21) una vez consideradas las condiciones de contorno, es una matriz regular. La solución exacta del problema $u(x)$ es una función del espacio de Sobolev $H^2[x_1, x_n]$ que es aproximada por un spline generalizado que coincide con la solución exacta en ordenada y primera derivada en cada uno de los nodos $x_i, i = 1, \dots, n$. Además a partir de las ecuaciones de equilibrio de cada elemento que son de la forma dada en (3.4.8) se pueden obtener los valores exactos de las cargas nodales de equilibrio o de contorno en los extremos de cada elemento. Para el caso particular que se aborda en este trabajo, de rigidez constante en cada uno de los elementos las funciones de forma vienen definidas por

$$\tilde{N} = (N_1, N_2, N_3, N_4)' = C \tilde{x}$$

con

$$\tilde{x}' = (1, z, \text{sen}(rz), \cos(rz)), \quad z = x - a$$

siendo la matriz C de cambio de base la definida en (3.3.20).

Comentamos esquemáticamente a continuación algunos aspectos básicos que conviene tener en cuenta respecto a la determinación de la carga de pandeo cuando se emplean splines generalizados. Obsérvese que dicha carga para el correspondiente problema homogéneo es el valor positivo más pequeño de la carga P que anula el determinante de la matriz K_{ss} indicada.

Por ejemplo para el caso clásico de la barra de Euler, que está articulada en los nodos 1 y 2, la matriz K_{ss} se reduce a la formada por los cuatro elementos situados en las filas y columnas segunda y cuarta de la matriz de rigidez (3.3.21). Anulando el correspondiente determinante resulta

$$\begin{vmatrix} r(lrc - s) & r(s - rl) \\ r(s - rl) & r(lrc - s) \end{vmatrix} = slr^3(2 - 2c - lrs) = 0$$

de donde $s = \text{sen}(rl) = 0$ y $rl = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Quedándonos con la raíz positiva más pequeña, que es la que interesa, se obtiene de $r = \sqrt{P/A}$, la carga de Euler $P_{cr} = \pi^2 A / l^2$

Para el caso de una pieza de longitud l empotrada en el nodo 1 y articulada en el nodo 2 la matriz \mathbf{K}_{ss} se reduce en este caso trivial al elemento que ocupa la posición 4-4 de la matriz dada en (3.3.21). La carga se obtiene por tanto determinando la raíz positiva más pequeña de la ecuación

$$\frac{A}{\Delta} r [lr \cos(rl) - \text{sen}(rl)] = 0$$

con $r = \sqrt{P/A}$ resultando $rl = 1.430297\pi$ y la carga de pandeo $P_{cr} = 2.04575 \pi^2 A / l^2$.

Si se tratara de un pilar empotrado en la base y libre en el extremo superior constituido por dos piezas: la primera adyacente a la base, con nodos 1 y 2, con rigidez A_1 y longitud l_1 y para la segunda, con nodos 2 y 3, con rigidez y longitud A_2 y l_2 respectivamente. La matriz \mathbf{K}_{ss} es ahora una matriz de dimensión cuatro, resultado de ensamblar las matrices de rigidez de cada una de las piezas y de eliminar las dos primeras filas y las dos primeras columnas, en la matriz de rigidez global, relativas al nodo 1 donde el desplazamiento y el giro toman el valor nulo. La ecuación que resulta después de anular el determinante de \mathbf{K}_{ss} y simplificar es

$$\text{tg}(r_1 l_1) \text{tg}(r_2 l_2) = \frac{r_1}{r_2}$$

con $r_i = \sqrt{P/A_i}$, $i = 1, 2$

Téngase en cuenta que la carga de pandeo de esta forma queda determinada de manera exacta utilizando un procedimiento sistemático basado en la anulación del determinante de la matriz \mathbf{K}_{ss} . Esto desde el punto de vista numérico no supone mayor complejidad de cálculo que empleando, en lugar de (3.3.21), la matriz de rigidez usual para elementos finitos basados en los polinomios cúbicos [SmG88], donde

$$\tilde{\mathbf{K}} = A \begin{bmatrix} 12/l^3 & 6/l^2 & -12/l^3 & 6/l^2 \\ & 4/l & -6/l^2 & 2/l \\ & & 12/l^3 & -6/l^2 \\ \text{SIM} & & & 4/l \end{bmatrix} - \frac{P}{30} \begin{bmatrix} 36/l & 3 & -36/l & 3 \\ & 4l & -3 & -l \\ & & 36/l & -3 \\ \text{SIM} & & & 4l \end{bmatrix}$$

lo que conduce a una ecuación polinómica en lugar de trascendente pues en la práctica no se determina explícitamente la expresión analítica de la ecuación para el cálculo de la carga de pandeo sino que se procede a su cálculo de forma numérica y de manera iterativa.

3.5.2 Aplicación del concepto de acción repartida equivalente a la viga-columna

La ecuación diferencial correspondiente a la acción repartida equivalente dentro de cada elemento es

$$(A(x)U'')'' + PU'' = F(x) \quad (3.5.3)$$

donde la carga $F(x)$ es la proyección ortogonal de la carga f sobre el espacio vectorial de funciones definido $N(L)$ es decir el espacio de soluciones de la ecuación diferencial homogénea. Teniendo en cuenta la equivalencia de las acciones se puede poner

$$\int_a^b ((A(x)u'')'' + Pu'') - (A(x)U'')'' + PU'' v dx = \int_a^b (f(x) - F(x)) v dx = 0$$

es decir

$$\int_a^b ((A(x)u'')'' + Pu'') - (A(x)U'')'' + PU'' v dx = 0 \quad (3.5.4)$$

donde la función de ponderación v pertenece al espacio de soluciones de la ecuación diferencial homogénea. Los operadores diferenciales $P_0(u)$ y $P_1(u)$ son en este caso particular

$$\begin{aligned} P_0(u) &= -(A(x)u'')' - Pu' \\ P_1(u) &= A(x)u'' \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Integrando por partes en (3.5.4) resultan las dos expresiones siguientes

$$\begin{aligned} &-(P_0(u) - P_0(U))v \Big|_a^b + \int_a^b (P_0(u) - P_0(U))v' dx = 0 \\ &-(P_0(u) - P_0(U))v \Big|_a^b - (P_1(u) - P_1(U))v' \Big|_a^b + \int_a^b \{ -P(u' - U')v' + (P_1(u) - P_1(U))v'' \} dx = 0 \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Considerando las condiciones de interpolación de las funciones u y U en los extremos del intervalo, es decir para ambas se tiene la igualdad de formas lineales o en términos físicos, acciones nodales de equilibrio, $\bar{l}_i(u) = \bar{l}_i(U), i = 1, \dots, 4$ donde

$$\bar{l}_1(u) = -P_0(u) \Big|_{x=a}, \bar{l}_2(u) = -P_1(u) \Big|_{x=a}, \bar{l}_3(u) = P_0(u) \Big|_{x=b}, \bar{l}_4(u) = P_1(u) \Big|_{x=b} \quad (3.5.7)$$

De acuerdo con lo anterior las expresiones dadas en (3.5.6), llamando

$$\begin{aligned}
V(x) &= P_0(u) = -(A(x)u'')' - Pu' \\
\bar{V}(x) &= P_0(U) = -(A(x)U'')' - PU' \\
M(x) &= P_1(u) = A(x)u'' \\
\bar{M}(x) &= P_1(U) = A(x)U''
\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

se reducen a

$$\int_a^b (V(x) - \bar{V}(x))v' dx = 0 \tag{3.5.9}$$

$$\int_a^b \{ P(u(x) - U(x)) + (M(x) - \bar{M}(x)) \} v'' dx = 0 \tag{3.5.10}$$

donde en la segunda expresión se ha integrado de nuevo por partes el sumando $-P(u' - U')v'$ y se ha tenido además en cuenta que $u(a) = U(a)$, $u(b) = U(b)$.

El esfuerzo cortante para cada sección x viene dado por la expresión $Q(x) = -(A(x)u'')'$, luego la función $V(x)$ donde $V(x) = P_0(u) = -(A(x)u'')' - Pu'$ representa en realidad un nuevo esfuerzo que puede denominarse pseudocortante o cortante corregido (proyección en la dirección del desplazamiento u de las acciones que quedan a la derecha de la sección, incluyendo la contribución de $-Pu'$). La función $M(x) = P_1(u) = A(x)u''$ por su parte representa el momento flector en la citada sección.

La integral (3.5.9) nos indica que la función diferencia de cortantes corregidos, $V(x) - \bar{V}(x)$, que es nula en los extremos del intervalo por interpolar los mismos valores, es además ortogonal al espacio vectorial de funciones dimensión tres engendrado por las $N'_i, i = 1, \dots, 4$, o equivalentemente, y de modo más preciso, al engendrado por tres soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial de tercer orden $(A(x)w'')'' + Pw' = 0$.

Asimismo la integral (3.4.39) indica que la función

$$m(x) - \bar{m}(x) = A(x)(u - U)'' + P(u - U) \tag{3.5.11}$$

determinada por la diferencia de momentos más la carga P por la diferencia de desplazamientos, función que es nula y con derivada nula en los extremos del intervalo, es además ortogonal al espacio de funciones de dimensión dos engendrado por las funciones $N''_i, i = 1, \dots, 4$, o equivalentemente al engendrado por dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial de segundo orden $(A(x)w)'' + Pw = 0$.

Estas propiedades de interpolación y ortogonalidad, en cada elemento, para las funciones $V(x) - \bar{V}(x)$ y $m(x) - \bar{m}(x)$, que resultan al comparar los desplazamientos y esfuerzos para las soluciones del problema para la acción $f(x)$ y la acción repartida equivalente $F(x)$ son la base de la bondad de resultados para la aproximación en el interior de cada elemento

finito, tal y como se ha puesto de manifiesto en otras aplicaciones de esta idea desarrolladas en los trabajos ya citados.

A continuación desarrollamos, para el caso particular de rigidez constante $A(x) = A$ en cada intervalo $[a, b]$, la determinación, mediante interpolación, de la solución aproximada $U(x)$ correspondiente a la acción repartida equivalente $F(x)$.

El operador diferencial $L^2(u)$ es para este caso particular

$$L^2(u) = A^2 u^{(8)} + 2APu^{(6)} + P^2 u^{(4)} \quad (3.5.12)$$

y la ecuación característica de $L^2(u) = 0$

$$r^4(r^4 + 2\omega^2 r^2 + \omega^4) = 0$$

donde $\omega^2 = P/A$

La ecuación indicada tiene por soluciones: 0 con multiplicidad cuatro y la pareja de raíces complejas conjugadas dobles ωi y $-\omega i$. La solución $U(x)$ correspondiente a la acción repartida equivalente, que interpola los valores $u^{(i)}(a), u^{(i)}(b), i = 0, 1, 2, 3$ es

$$U(x) = \tilde{x} C \hat{u} \quad (3.5.13)$$

donde

$$\tilde{x} = [1, z, z^2, z^3, \sin(\omega z), \cos(\omega z), z \sin(\omega z), z \cos(\omega z)]$$

$$\hat{u}^T = [u(a), u'(a), u''(a), u'''(a), u(b), u'(b), u''(b), u'''(b)] \quad (3.5.14)$$

$$z = x - a, \quad \omega = \sqrt{\frac{P}{A}}, \quad x \in [a, b]$$

siendo C la matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -\omega^2 & 2\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -\omega^3 & 0 & 0 & -3\omega^2 \\ 1 & h & h^2 & h^3 & s & c & hs & hc \\ 0 & 1 & 2h & 3h^2 & \omega c & -\omega s & s + h\omega c & c - h\omega s \\ 0 & 0 & 2 & 6h & -\omega^2 s & -\omega^2 c & 2\omega c - h\omega^2 s & -2\omega s - h\omega^2 c \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -\omega^3 c & \omega^3 s & -3\omega^2 s - h\omega^3 c & -3\omega^2 c + h\omega^3 s \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.5.15)$$

$$h = b - a, \quad s = \text{sen}(\omega h), \quad c = \cos(\omega h)$$

Las leyes de desplazamientos, giros, flectores y cortantes equivalentes y asimismo la de la acción repartida equivalente, en cada intervalo $[a, b]$ pueden ser dadas mediante la siguiente expresión matricial

$$\begin{bmatrix} U(x) & U'(x) & \bar{M}(x) & \bar{Q}(x) & F(x) \end{bmatrix}^T = \Phi C \hat{u} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 & \bar{s} & \bar{c} & z\bar{s} & z\bar{c} \\ 0 & 1 & 2z & 3z^2 & \omega \bar{c} & -\omega \bar{s} & \bar{s} + z\omega \bar{c} & \bar{c} - z\omega \bar{s} \\ 0 & 0 & 2A & 6Az & -\omega^2 A \bar{s} & -\omega^2 A \bar{c} & A(2\omega \bar{c} - \omega^2 z \bar{s}) & -A(2\omega \bar{s} + \omega^2 z \bar{c}) \\ 0 & 0 & 0 & -6A & \omega^3 A \bar{c} & -\omega^3 A \bar{s} & A(3\omega^2 \bar{s} + \omega^3 z \bar{c}) & A(3\omega^2 \bar{c} - \omega^3 z \bar{s}) \\ 0 & 0 & 2\omega^2 A & 6\omega^2 Az & 0 & 0 & -2\omega^3 A \bar{c} & 2\omega^3 A \bar{s} \end{bmatrix} C \hat{u}$$

$$\bar{s} = \text{sen}(\omega z), \quad \bar{c} = \cos(\omega z) \quad (3.5.16)$$

Las expresiones del momento flector equivalente, el esfuerzo cortante equivalente y la acción repartida equivalente, se han deducido considerando que

$$\bar{M}(x) = AU''(x), \quad \bar{Q} = -AU'''(x), \quad F(x) = AU^{(4)}(x) + PU''(x) \quad (3.5.17)$$

Debe observarse que la acción repartida equivalente, en el desarrollo anterior se ha obtenido a partir de la derivación correspondiente de la función de desplazamientos $U(x)$ y no a partir de la proyección ortogonal de la función que define la carga $f(x)$ del intervalo $[a, b]$ sobre el espacio de funciones definido por el núcleo del operador diferencial L . Este proceso resulta más adecuado computacionalmente una vez se ha determinado por interpolación la función $U(x)$. En las aplicaciones habitualmente interesa obtener los desplazamientos, los giros, y las leyes de flectores y cortantes correspondientes a la acción repartida equivalente y no tanto, salvo por curiosidad, la acción misma.

Destacamos finalmente que si la acción $f(x)$ viene dada en cada intervalo o elemento por una expresión que sea combinación lineal de las cuatro funciones 1 , z , $\sin(\omega z)$ y $\cos(\omega z)$, el procedimiento indicado proporcionará la solución exacta para los desplazamientos, giros y leyes de esfuerzos, no solo en los nodos (lo que se consigue para cualquier tipo de carga f utilizando elementos finitos basados en splines generalizados) sino también en el interior de cada elemento.

3.5.3 Ejemplo de aplicación

En este ejemplo se aborda el cálculo en régimen lineal de la deformada y de las leyes de esfuerzos de un pilar de longitud $l = 40m$ empotrado en la base y articulado en el extremo superior tal y como se indica en la figura 3.5.1. El módulo de elasticidad del material es $E = 2.1 \times 10^6 t/m^2$, la forma de la sección del pilar puede verse en la figura indicada, siendo la inercia de la misma $I = 0.10386 m^4$ y la rigidez $A = 218106 t/m^2$ de la sección. Se han considerado dos casos con diferentes valores de cargas tanto para la axial, como para las repartidas y puntuales de modo que los desplazamientos tuvieran valores similares para la solución exacta. La idea es observar si el procedimiento aproxima en ambos casos de la misma manera la solución. La carga de pandeo para este caso de pieza empotrada y articulada es $2753.6 t$.

Caso 1

Para este caso la carga axial es de $P = 600t$, hay una carga repartida de valor $f = 0.5t/m$ actuando perpendicularmente a la directriz y tres cargas puntuales cuyos valores son $3t$, $6t$ y $3t$ situadas respectivamente a $14m$, $24m$ y $32m$ de la base actuando también perpendicularmente a la directriz. Todos estos datos así como el radio de giro de la sección y la esbeltez, se indican también en la figura 3.5.1.

El problema se resuelve en dos situaciones:

- a) Con un solo elemento finito de longitud $l = 40m$ se calculan los desplazamientos giros y leyes de cortantes y momentos mediante la solución correspondiente a la acción repartida equivalente con la expresión (3.5.16). Dicha solución se ha obtenido a partir de la solución por elementos finitos que es nodalmente exacta por emplear splines generalizados. Por tanto a partir de los valores de los desplazamientos y derivadas de los desplazamientos (giros) en los dos nodos, se obtienen de la ecuación de equilibrio de cada elemento las cargas nodales de equilibrio y de ahí las derivadas segundas y terceras en los nodos. Con esta información se deduce ya de manera sencilla por interpolación la solución que corresponde a la carga repartida equivalente mediante la expresión dada en (3.5.13).

- b) El problema se resuelve ahora empleando los cuatro elementos definidos por los intervalos

$$elem1 = [0,14], \quad elem2 = [14,24], \quad elem3 = [24,32] \quad \text{y} \quad elem4 = [32,40]$$

Obsérvese que las cargas puntuales se encuentran aplicadas en los nodos de separación de los elementos. Una vez resuelto el problema por elementos finitos basados en splines generalizados se procede como antes determinando ahora para cada elemento la solución correspondiente a la acción repartida equivalente. Como la acción repartida es constante, de acuerdo con lo comentado en el punto 3.5.2 la solución que se obtiene coincide con la exacta. Por tanto el procedimiento, una vez resuelto el problema por elementos finitos, permite en este caso obtener la solución exacta dentro de cada elemento y por tanto la solución exacta en toda la longitud de la pieza.

De todo lo anterior resulta que podemos comparar en este caso la solución exacta del problema con la que corresponde a la acción repartida equivalente empleando el menor número de elementos finitos posibles, o sea un solo elemento. De esta manera nos ponemos en este caso en la situación más desfavorable de aplicación del método.

En la figura 3.5.2 y 3.5.3 se dan las gráficas y tablas de valores de desplazamientos y pendientes de la solución obtenida para la acción repartida equivalente y de la solución exacta del problema. Es interesante destacar la práctica coincidencia en los valores de los desplazamientos y de las pendientes, habiendo empleado en el método un solo elemento finito.

De la misma manera en la figura 3.5.4 y 3.5.5 se dan las gráficas y tablas para las leyes de esfuerzos. El máximo error del momento flector se produce en el nodo 7 de abscisa 24 m donde el error es inferior al 5.3% respecto al valor exacto. Por otra parte el esfuerzo cortante que se considera es el corregido o modificado incluyendo la proyección del axil. El máximo error se produce en los puntos donde están aplicadas las cargas puntuales. El método que por naturaleza regulariza la ley eliminando las discontinuidades, promedia los valores del cortante a la izquierda y derecha de dichos puntos. De modo que el error es por tanto el menor posible considerando como hemos indicado que la ley del esfuerzo cortante aproximado viene dada por una función continua.

No se han dado ni las gráficas ni las tablas que corresponderían a un cálculo con un solo elemento finito sin aplicar el proceso de optimización que resulta de la aplicación del concepto de acción repartida equivalente ya que el comportamiento sería similar al correspondiente al de los elementos usuales basados en la aproximación de la deformada por polinomios cúbicos. La ley de flectores vendría dada por un polinomio de primer grado que se anula en el extremo donde está la articulación y la de cortantes mediante una función constante en toda la longitud de la pieza. Resultados en nada comparables al que proporciona el procedimiento.

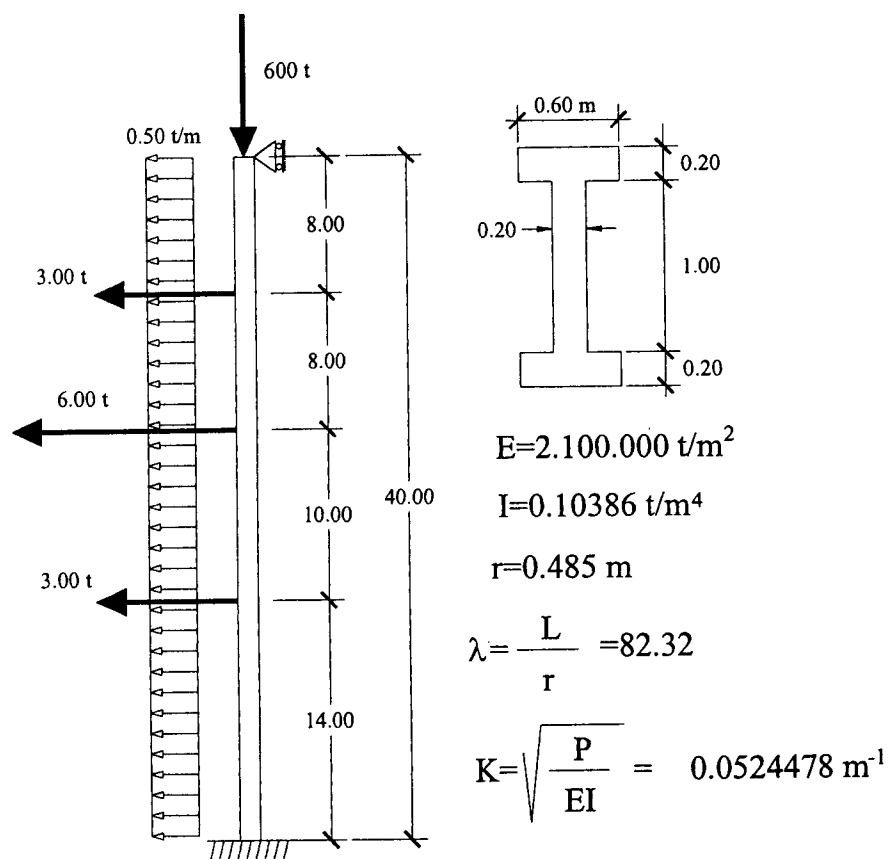
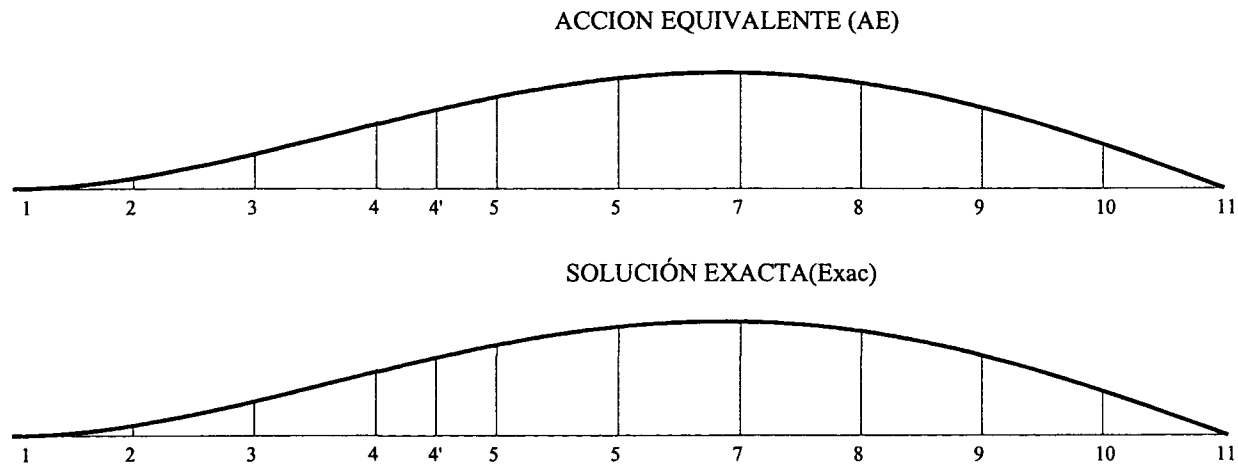


Figura 3.5.1

DEFORMADA CASO 1.

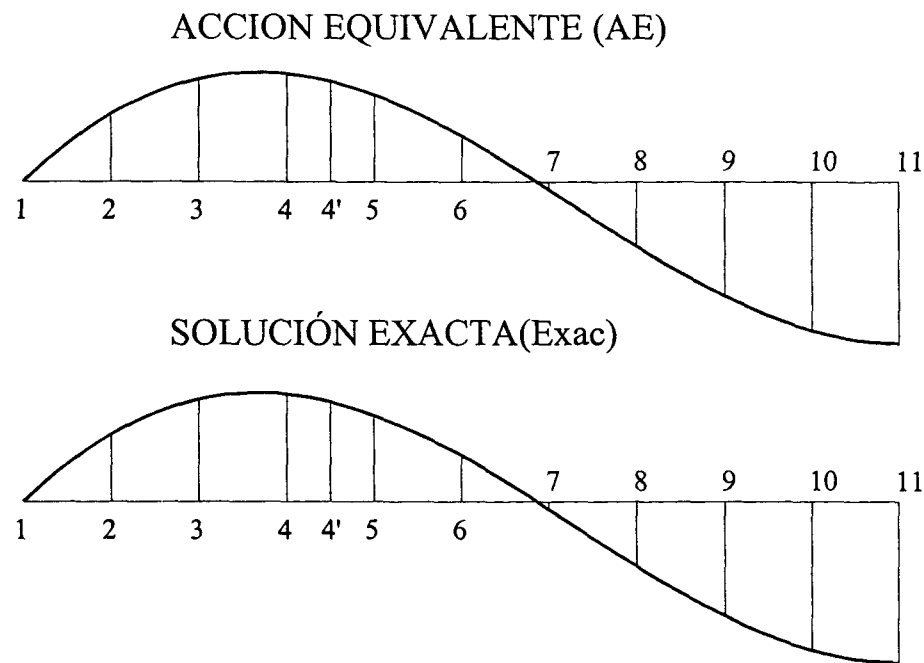


n	X(m)	U(x)(AE)	u(x)(Exac)
1	0.00	0.000	0.000
2	4.00	0.667	0.667
3	8.00	2.276	2.277
4	12.00	4.252	4.257
4'	14.00	5.211	5.218
5	16.00	6.074	6.061
6	20.00	7.312	7.268
7	24.00	7.669	7.601
8	28.00	7.001	6.960
9	32.00	5.341	5.329
10	36.00	2.891	2.936
11	40.00	0.000	0.00

Figura 3.5.2



PENDIENTES CASO 1.



n	X(m)	U'(x)(AE)	u'(x)(Exac)
1	0.00	0.000	0.000
2	4.00	3.090E-3	3.092E-3
3	8.00	4.711E-3	4.720E-3
4	12.00	4.948E-3	4.959E-3
4'	14.00	4.599E-3	4.598E-3
5	16.00	3.980E-3	3.973E-3
6	20.00	2.088E-3	2.116E-3
7	24.00	-0.365E-3	-0.354E-3
8	28.00	-2.959E-3	-2.974E-3
9	32.00	-5.258E-3	-5.258E-3
10	36.00	-6.851E-3	-6.851E-3
11	40.00	-7.424E-3	-7.424E-3

Figura 3.5.3

MOMENTOS FLECTORES CASO 1.

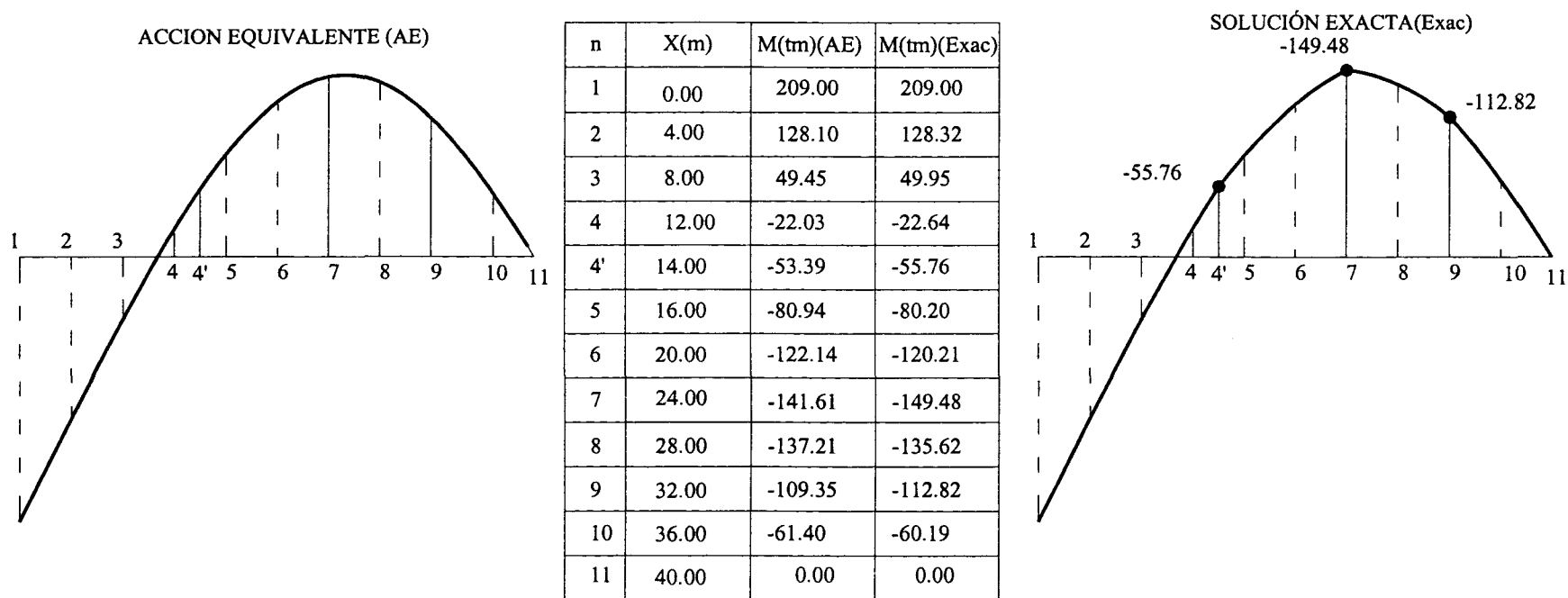
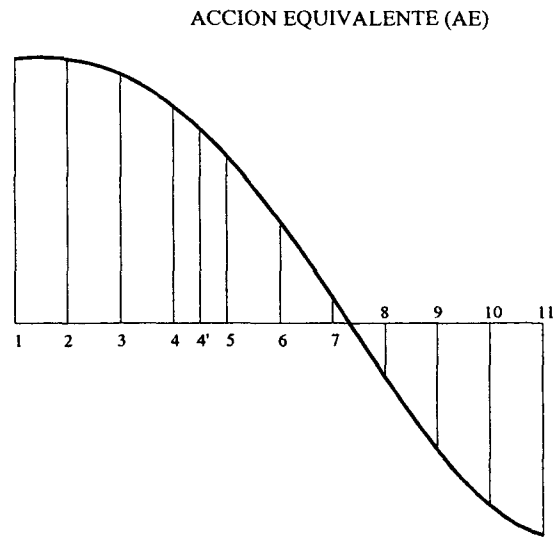


Figura 3.5.4

CORTANTES CASO 1.



n	X(m)	V(t)(AE)	V(t)(Exac)
1	0.00	20.17	20.177
2	4.00	20.12	20.173
3	8.00	18.98	19.00
4	12.00	16.52	17.15
4'	14.00	14.78	12.89 15.89
5	16.00	12.71	11.52
6	20.00	7.71	8.40
7	24.00	1.92	4.92 -1.08
8	28.00	-4.10	-4.61
9	32.00	-9.68	-7.98 -10.98
10	36.00	-14.91	-13.96
11	40.00	-16.27	-16.27

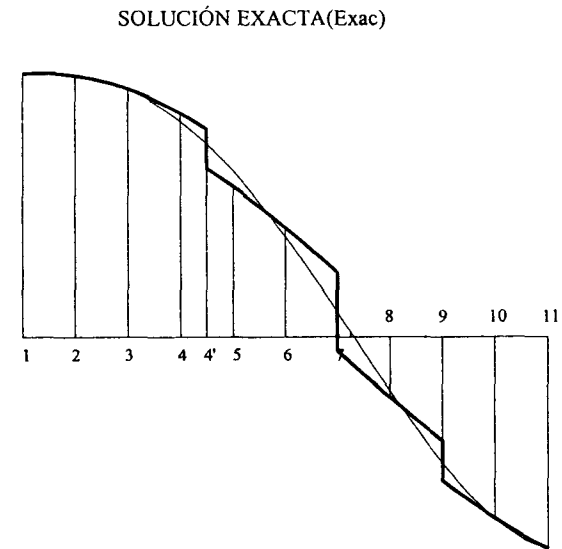


Figura 3.5.5

Caso 2.

Ahora disminuimos el valor de la carga axial y aumentamos los valores de las cargas transversales respecto al caso anterior de modo que la solución exacta tenga los desplazamientos del mismo orden que antes. La carga axial es $P = 200t$, la repartida es ligeramente superior $f = 0.6t/m$ y las tres cargas puntuales también son superiores. Estas son: $4t$, $7t$ y $4t$ y se encuentran en las mismas posiciones que en el caso anterior. Todos estos datos se indican la figura 3.5.6.

El problema se resuelve como antes, empleando un solo elemento finito y también con cuatro elementos finitos.

En la figuras 3.5.7, 3.5.8, 3.5.9 y 3.5.10 se puede ver también la práctica coincidencia en los valores de los desplazamientos y pendientes, y flectores y cortantes respectivamente. El error es similar al del caso anterior siendo ahora el valor de la carga axial la tercera parte que antes y por tanto con menor influencia en la deformada de la pieza.

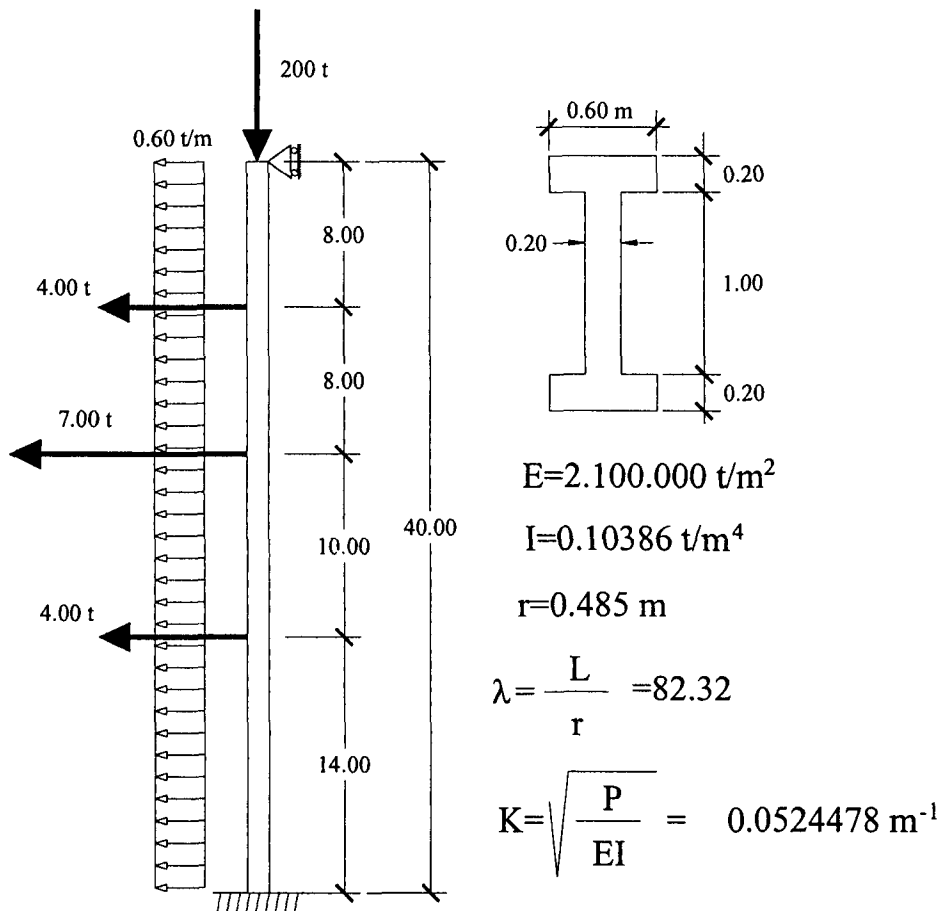
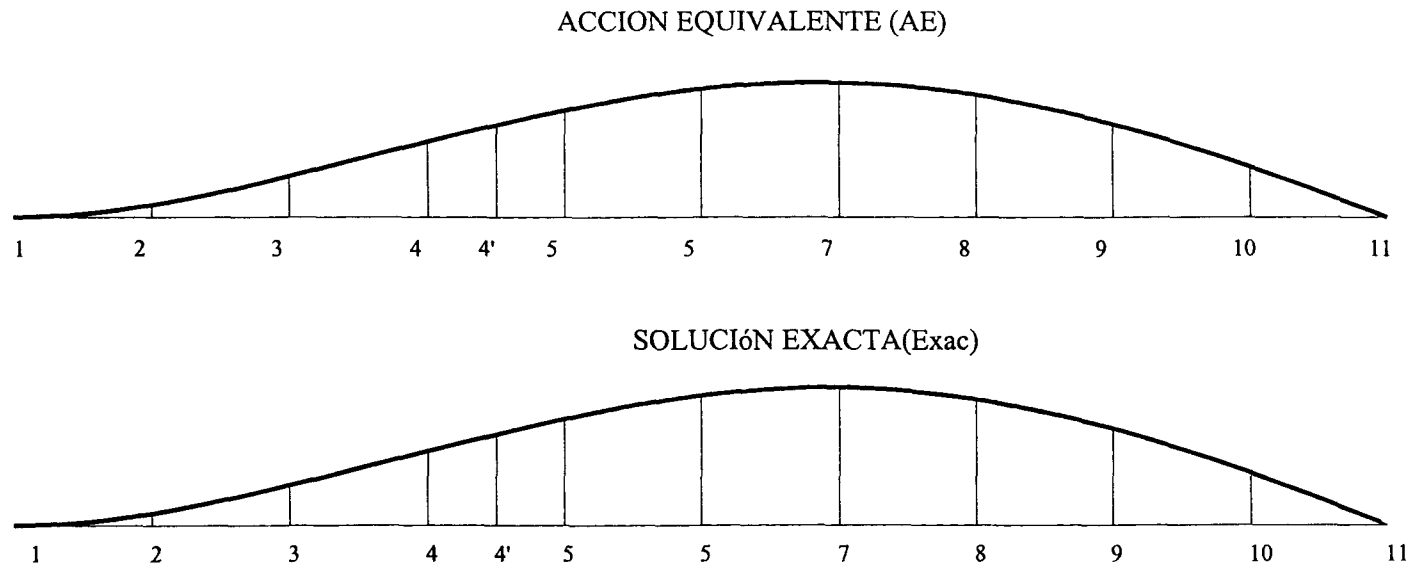


Figura 3.5.6

DEFORMADA CASO 2.



n	X(m)	U(x)(AE)	u(x)(Exac)
1	0.00	0.000	0.000
2	4.00	0.695	0.700
3	8.00	0.370	2.379
4	12.00	4.416	4.370
4'	14.00	5.410	5.393
5	16.00	6.274	6.311
6	20.00	7.522	7.613
7	24.00	7.864	8.111
8	28.00	7.164	7.378
9	32.00	5.457	5.687
10	36.00	2.948	3.061
11	40.00	0.000	0.00

Figura 3.5.7

PENDIENTES CASO 2.

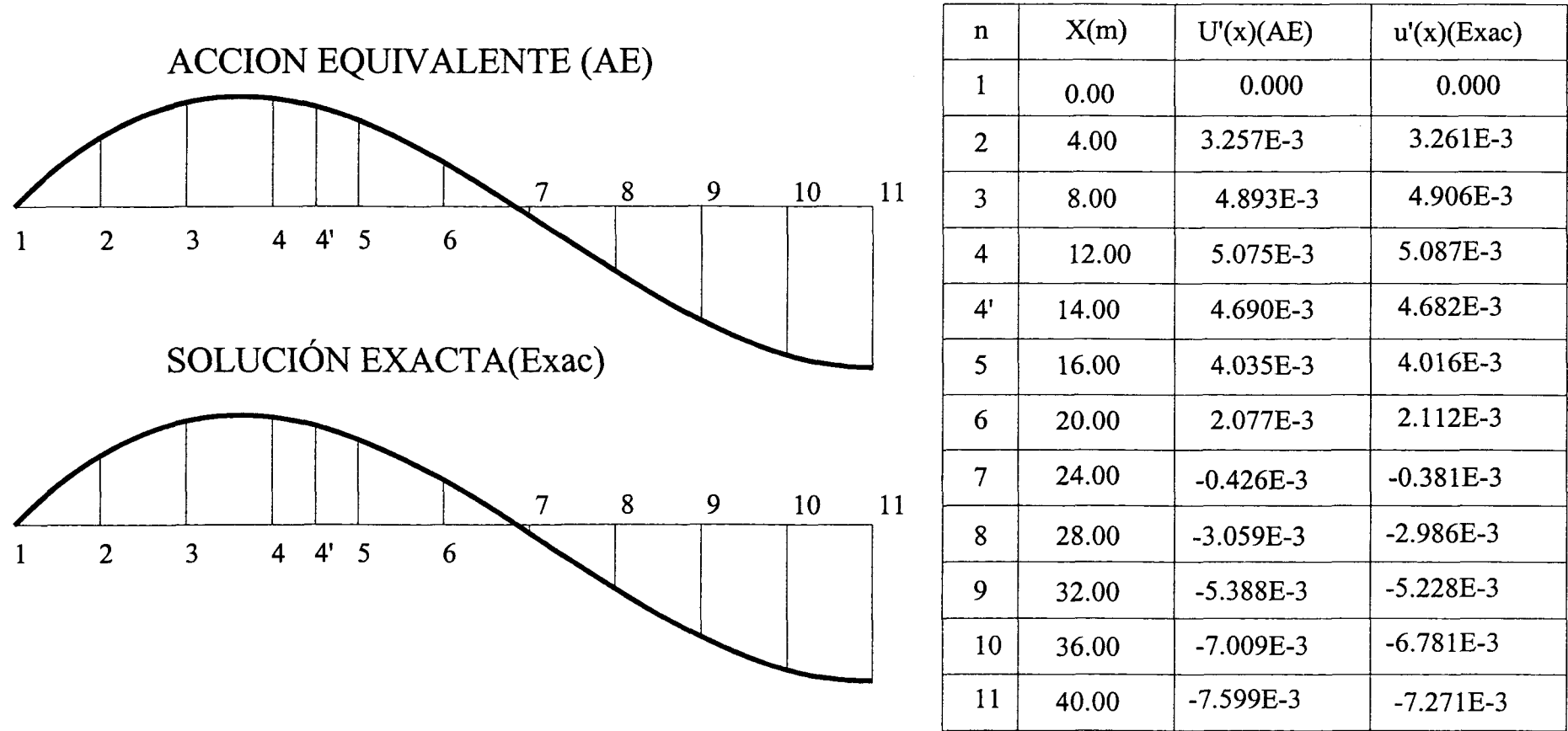
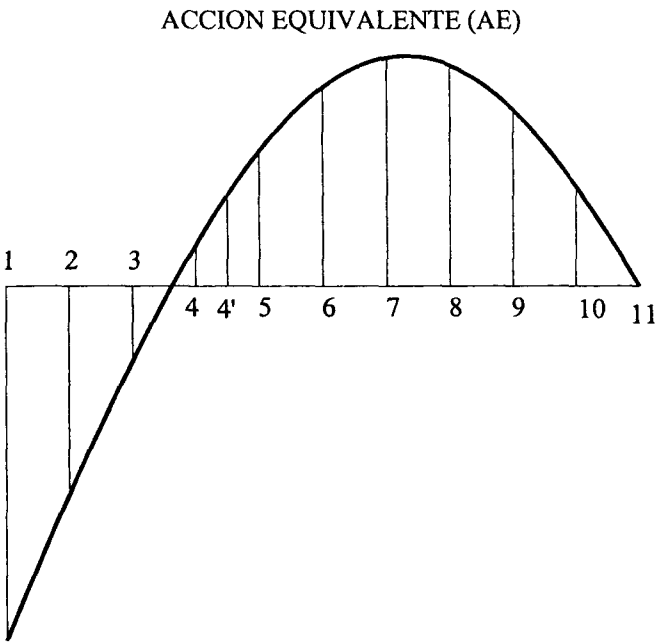


Figura 3.5.8

MOMENTOS FLECTORES CASO 2.



n	X(m)	M(tm)(AE)	M(tm)(Exac)
1	0.00	209.00	209.00
2	4.00	132.16	132.50
3	8.00	47.76	48.31
4	12.00	-25.85	-26.99
4'	14.00	-57.41	-63.48
5	16.00	-84.82	-83.99
6	20.00	-125.27	-121.83
7	24.00	-143.99	-150.89
8	28.00	-139.18	-134.70
9	32.00	-111.10	-112.04
10	36.00	-62.66	-59.54
11	40.00	0.00	0.00

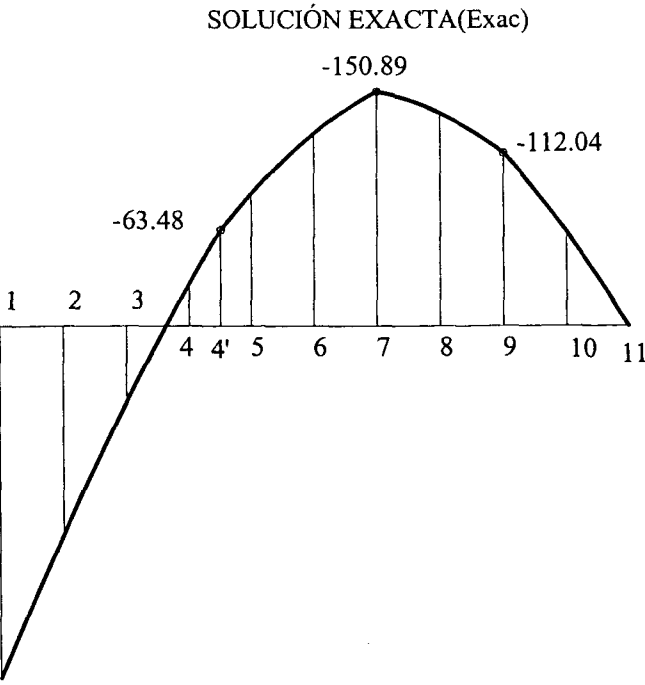
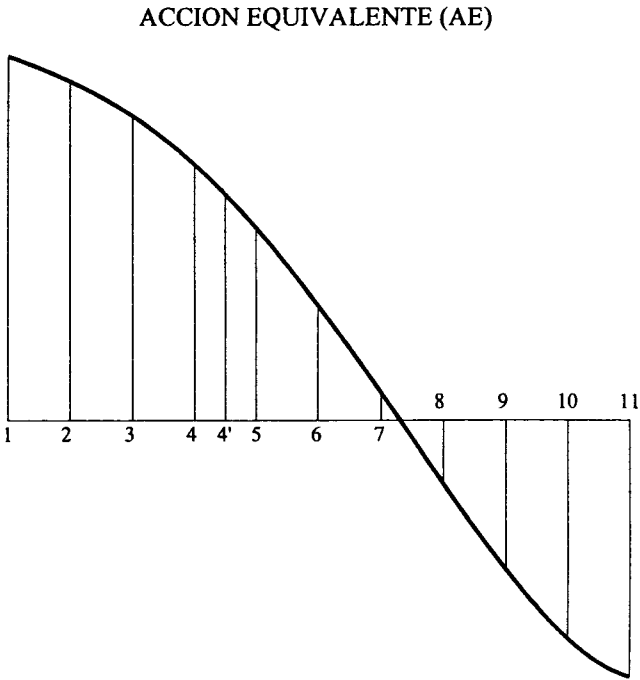


Figura 3.5.9

CORTANTES CASO 2.



n	X(m)	V(t)(AE)	V(t)(Exac)
1	0.00	23.79	23.80
2	4.00	22.16	22.06
3	8.00	19.90	19.98
4	12.00	16.74	17.62
4'	14.00	14.78	12.37 16.37
5	16.00	12.58	10.99
6	20.00	7.50	8.23
7	24.00	1.77	5.32 -1.68
8	28.00	-4.17	-4.60
9	32.00	-9.74	-7.45 -11.45
10	36.00	-14.21	-14.21
11	40.00	-16.71	-16.74

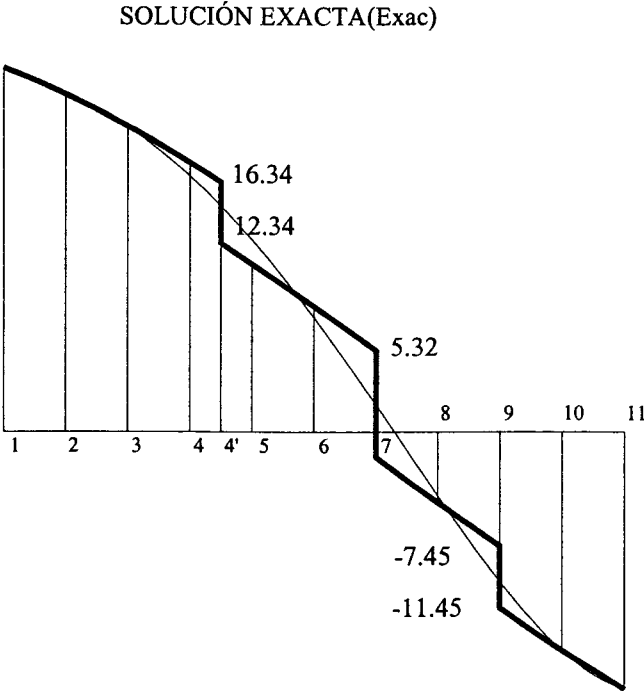


Figura 3.5.10

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DEL PANDEO DE PILARES **EN RÉGIMEN NO LINEAL MEDIANTE** **SPLINES GENERALIZADOS**

4.1 INTRODUCCIÓN.

En el capítulo segundo de esta memoria se ha realizado una revisión histórica del problema de pandeo, se ha hecho una introducción al problema no lineal objeto de esta investigación, se han expuesto diversos conceptos básicos, como estabilidad, bifurcación puntos límites, etc. dando además una descripción de los métodos más utilizados para el análisis del problema y finalmente se han desarrollado y comentado los conceptos y elementos correspondientes para la determinación de la superficie mecánica que sintetiza las propiedades del material mediante la relación momento-curvatura.

Por otra parte en el capítulo tercero se han desarrollado y estudiado diversos conceptos y aspectos de la teoría de splines generalizados lo que ha permitido elaborar una metodología particular para la resolución de problemas de contorno de n -puntos. Dicha metodología se ha aplicado al análisis de pilares en régimen lineal utilizando dos hechos fundamentales: a) El método de elementos finitos que resulta al emplear la teoría de splines generalizados, permite obtener soluciones nodales exactas del problema, es decir los valores de los desplazamientos, giros y leyes de flectores y cortantes son exactos en los nodos de los elementos. b) La utilización del concepto de acción repartida equivalente permite aproximar a su vez las soluciones de los problemas dentro de cada elemento y con unos resultados óptimos, lo que da lugar además a que se puedan realizar los cálculos empleando un número reducido de elementos.

En este capítulo se analiza el comportamiento de la pieza sometida a pandeo en régimen no lineal comenzando con el estudio de modelos discretos. Después se formula el problema continuo y se expone un resultado que se considera esencial en esta investigación: la equivalencia entre una pieza comprimida en régimen no lineal, y otra en régimen lineal que denominamos pilar lineal equivalente. Dicha equivalencia permite que la pieza en régimen no lineal pueda calcularse, mediante elementos finitos con splines generalizados con resultados óptimos.

Se da a continuación un método de cálculo algebraico, para pilares en régimen no lineal con estados de carga y condiciones de contorno para los que se puede predecir el comportamiento de la ley momento-curvatura. De esta forma se recogen y resuelven, a partir del resultado de equivalencia, los problemas habituales de cálculo de pilares que se han abordado por otras vías y que en el caso de pilares de hormigón han sido objeto de importantes simplificaciones. Se expone la aplicación a diversos casos y se destacan las ventajas frente a otros métodos de análisis en cuanto a la simplicidad del procedimiento y la exactitud del mismo.

Después se desarrolla el método de cálculo que denominamos general para la resolución del problema no lineal utilizando también el resultado de equivalencia y un procedimiento iterativo basado en el establecimiento de una cierta homotopía entre una ley lineal momento-curvatura y la ley real de la pieza. El método de cálculo se basa concretamente en la resolución del problema mediante elementos finitos con splines generalizados con un proceso de avance hacia la ley momento curvatura final a través de la homotopía citada realizando simultáneamente una serie de correcciones de la solución. Este método es de carácter general y es una alternativa a otros métodos de resolución de problemas no lineales.

4.2 MODELOS DISCRETOS PARA EL ESTUDIO DEL PANDEO DE PILARES EN RÉGIMEN NO LINEAL.

Es habitual en las introducciones de la mayoría de los manuales y publicaciones que tratan sobre los problemas de pandeo, o bifurcación del equilibrio en general, incluir como preámbulo el estudio de modelos sencillos que permitan adquirir de manera inmediata una idea intuitiva y al tiempo precisa sobre el problema en cuestión: [BaC91], [ChA76], [ChL87], [Cri91], [MaH94], [PiW94], [Sta71], etc.

Algunos autores han dedicado incluso textos completos al desarrollo de modelos conceptuales: Croll y Walker [CrW75] entre otros, justificando la gran importancia de los modelos con pocos grados de libertad, en la comprensión de los problemas de estabilidad estructural, especialmente en los casos de comportamiento no lineal.

Del mismo modo se ha considerado interesante desarrollar aquí, antes de abordar el problema continuo de pandeo en régimen no lineal, algunos modelos discretos que permitan destacar, al menos de forma cualitativa, ciertos aspectos esenciales que introduce, en el análisis del problema, la no linealidad del mismo: estabilidad, bifurcación, puntos límites, no unicidad de solución del problema, etc. Los modelos que se exponen constituyen por otra parte una cierta simplificación del caso continuo, al fijar en un número finito de puntos de la directriz de la pieza el comportamiento dado por la relación no lineal momento-curvatura. Asimismo se indica que el enfoque de esta introducción al pandeo en régimen no lineal con modelos discretos, si bien contiene aspectos que en cierto sentido pueden considerarse didácticos, constituye también una aportación original a esta investigación por su desarrollo y planteamiento simplificado.

4.2.1 Modelo con un grado de libertad

Se considera una barra de longitud l de rigidez infinita articulada en su base, figura 4.2.1, cuyo giro está restringido con un resorte de respuesta elástica no lineal. El resorte puede simular el comportamiento de una ménsula de gran rigidez (infinita teóricamente) empotrada en su base mediante una rebanada de espesor e y de cierto material, como puede ser por ejemplo el hormigón, para el cual la relación constitutiva momento flector-giro viene dada por una ley simplificada $M = \varphi(\theta)$ dada por una curva genérica representada por la gráfica de una función creciente con derivada decreciente como la indicada en la figura 4.2.2 o mediante una gráfica bilineal como la que se indica en la misma figura.

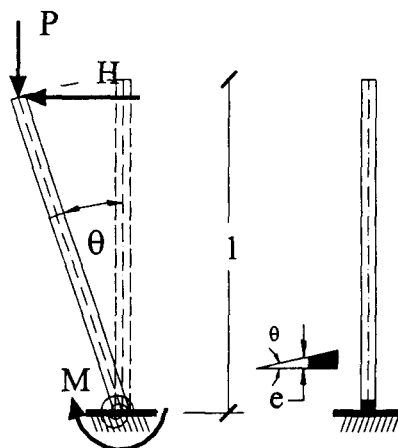


Figura 4.2.1

En realidad como ya se ha visto en la descripción de la superficie mecánica, la carga axial P también interviene en la relación pues ésta es realmente de la forma $M = \varphi(P, \theta)$, es decir para cada carga P se tiene una ley diferente. Como las variaciones de esta relación son ligeras para amplios rangos de valores de P , la simplificación de no considerar, en este primer estudio, la influencia de la carga es perfectamente admisible.

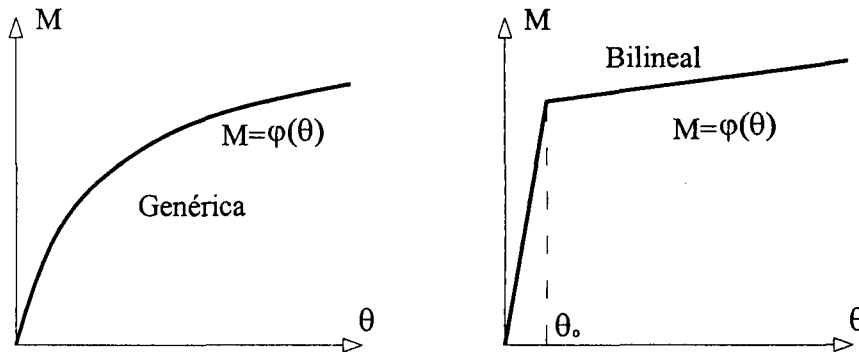


Figura 4.2.2

Para la rebanada indicada, de espesor e , se tienen las siguientes relaciones que permiten expresar la relaciones usuales momento-curvatura, mediante leyes momento-giro.

$$R\theta = e, \quad \theta = e \frac{1}{R} = e\chi$$

donde R es el radio de curvatura y χ la curvatura. Para la barra se puede considerar que además de una carga axial P actúan una carga horizontal H y un momento M_0 tal y como se indica en la figura 4.2.3.

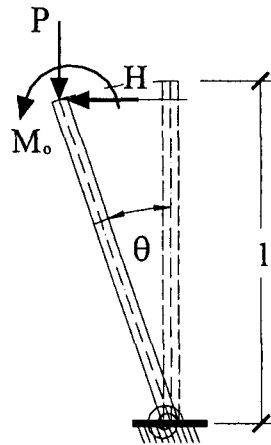


Figura 4.2.3

Para estas acciones la determinación de las posiciones de equilibrio, teniendo en cuenta la configuración deformada, donde la barra ha girado un ángulo θ , conduce a la resolución de la ecuación en la variable θ

$$\varphi(\theta) = Pl \sin \theta + Hl \cos \theta + M_0 \quad (4.2.1)$$

Dichas posiciones de equilibrio en el estudio que sigue se limitan al intervalo $[0, \pi/2]$. Sea $F(\theta)$ la función definida por el segundo miembro de la ecuación anterior, es decir,

$$F(\theta) = Pl \sin \theta + Hl \cos \theta + M_0 \quad (4.2.2)$$

su gráfica en el intervalo indicado tiene el aspecto indicado en la figura 4.2.4

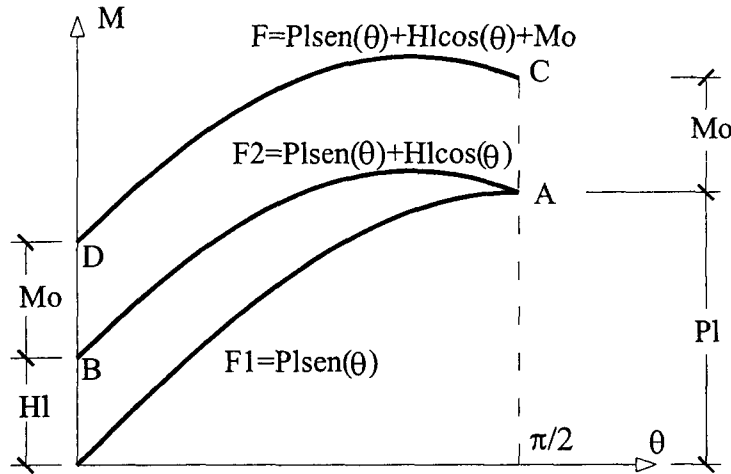


Figura 4.2.4

donde las funciones del gráfico son

$$F_1(\theta) = Pl \sin \theta, \quad F_2(\theta) = F_1(\theta) + Hl \cos \theta, \quad F(\theta) = F_2(\theta) + M_0$$

Obsérvese que $F(\theta)$ verifica, en el intervalo $[0, \pi/2]$, que

$$F''(\theta) = -Pl \sin \theta - Hl \cos \theta < 0$$

o sea, la concavidad de la gráfica va dirigida hacia abajo. Las posiciones de equilibrio del pilar con las acciones indicadas se determinan a partir de las intersecciones de las gráficas de las funciones φ y F . Éstas pueden ser como se indica en la figura 4.2.5 (a) y (b), para los casos de una ley genérica y de una bilineal

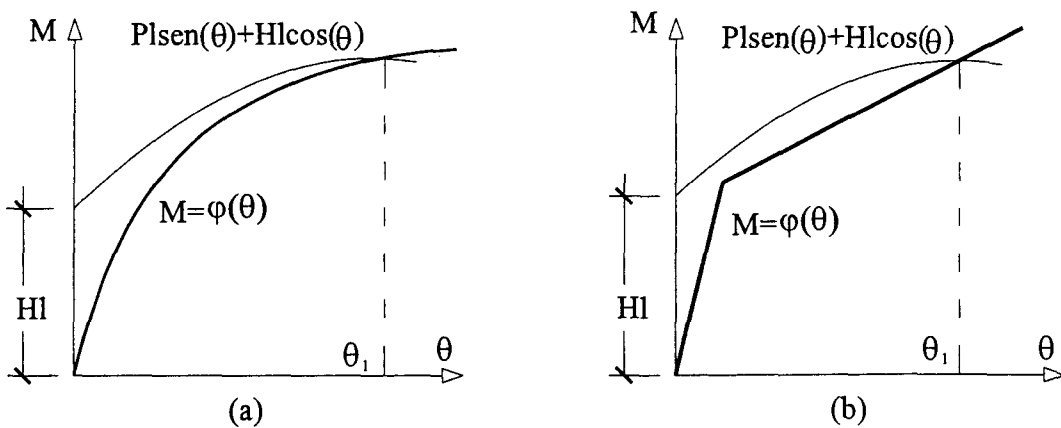


Figura 4.2.5

donde el pilar tiene únicamente una posición de equilibrio dada por $\theta = \theta_1$ (véanse las figuras 4.2.5 y 4.2.6)

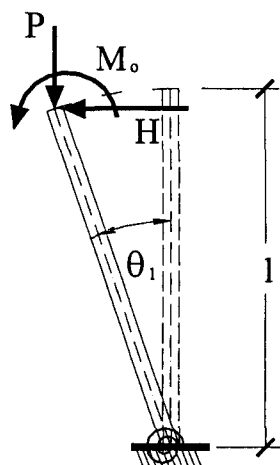


Figura 4.2.6

También podría darse el caso de más de una intersección, tal y como se ilustra en la figura 4.2.7

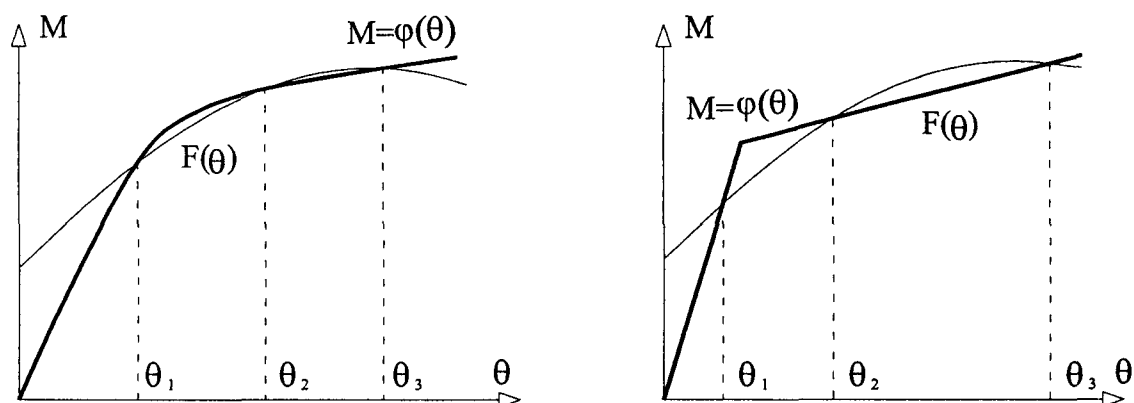


Figura 4.2.7

Hay que señalar que no todas las posiciones de equilibrio son del mismo tipo. Esto puede observarse de manera intuitiva viendo como se modifican los puntos de intersección entre las gráficas de φ y F al variar la gráfica de F , la cual depende de los parámetros P, H y M_0 para el caso de un pilar longitud l dada.

En la figura 4.2.4 puede verse que si H y M_0 se mantienen constantes, cuando aumenta P la gráfica de la función F pivota en el punto D, desplazándose el punto C paralelamente al eje de los momentos, aumentando su ordenada.

Si estamos por ejemplo en el caso de una ley bilineal $\varphi(\theta)$ que para $F(\theta)$ da tres posiciones de equilibrio, lo anterior tendría el efecto que se indica en la figura 4.2.8 donde P aumenta y H y M_0 se mantienen constantes.

La posición de equilibrio correspondiente al ángulo θ_1 es tal que el ángulo se incrementa al aumentar la carga P , lo mismo ocurre con la posición de equilibrio correspondiente al ángulo θ_3 . Sin embargo se observa que la posición de equilibrio relativa al ángulo θ_2 , con el aumento de la carga P disminuye el ángulo.

Lo anterior puede analizarse a través del concepto de energía potencial, comprobándose como veremos que las posiciones correspondientes a los ángulos θ_1 y θ_3 son de equilibrio estable, y la de θ_2 , donde el ángulo disminuye con el aumento de carga, es de equilibrio inestable.

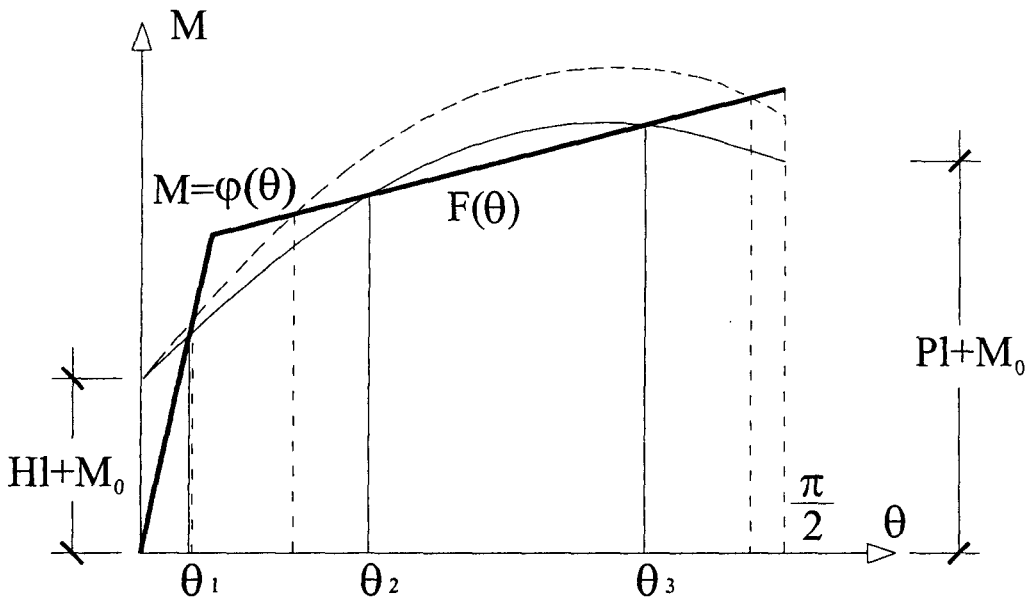


Figura 4.2.8

Estabilidad de las posiciones de equilibrio

Tomando como referencia, para la variación Π de energía potencial, la posición $\theta = 0$, es decir $\Pi(0) = 0$ se tiene

$$\Pi(\theta) = - \int_0^\theta [-\varphi(\theta) + Pl \sin \theta + Hl \cos \theta + M_0] d\theta \quad (4.2.3)$$

ya que de acuerdo con la figura 4.2.9 el trabajo elemental de P , H y M_0 es respectivamente $Pl d\theta \sin \theta$, $Hl d\theta \cos \theta$ y $M_0 d\theta$

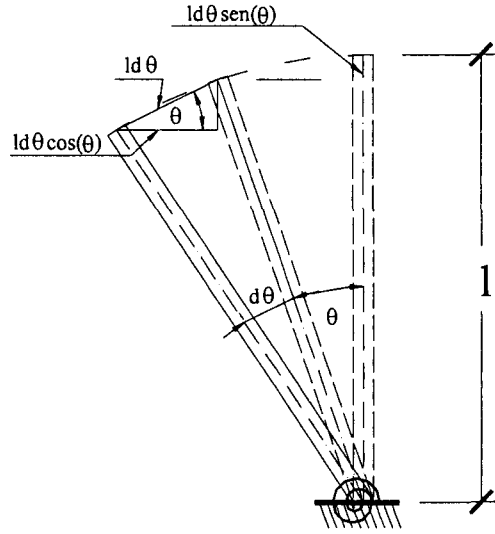


Figura 4.2.9

La energía potencial se puede poner en la forma

$$\Pi(\theta) = \int_0^\theta [\varphi(\theta) - F(\theta)] d\theta \quad (4.2.4)$$

de la cual resulta de manera inmediata la ecuación de equilibrio

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = \varphi(\theta) - F(\theta) = 0 \quad (4.2.5)$$

Se tiene además para las derivadas sucesivas las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \Pi^{(k+1)}(\theta) &= \varphi^{(k)}(\theta) - F^{(k)}(\theta) \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Sea $\bar{\theta}$ una de las raíces de la ecuación de equilibrio, si

$$\Pi''(\bar{\theta}) = \varphi'(\bar{\theta}) - F'(\bar{\theta}) > 0$$

es decir si

$$\varphi'(\bar{\theta}) > F'(\bar{\theta}) \quad (4.2.7)$$

el equilibrio es estable. Por otra parte si

$$\Pi''(\bar{\theta}) = \varphi'(\bar{\theta}) - F'(\bar{\theta}) < 0$$

o sea

$$\varphi'(\bar{\theta}) < F'(\bar{\theta}) \quad (4.2.8)$$

entonces el equilibrio es inestable. Se ha determinado de esta manera la condición de estabilidad a través de la comparación de los valores de las primeras derivadas de las funciones φ y F en las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas de dichas funciones. Todo esto se esquematiza en la figura 4.2.10

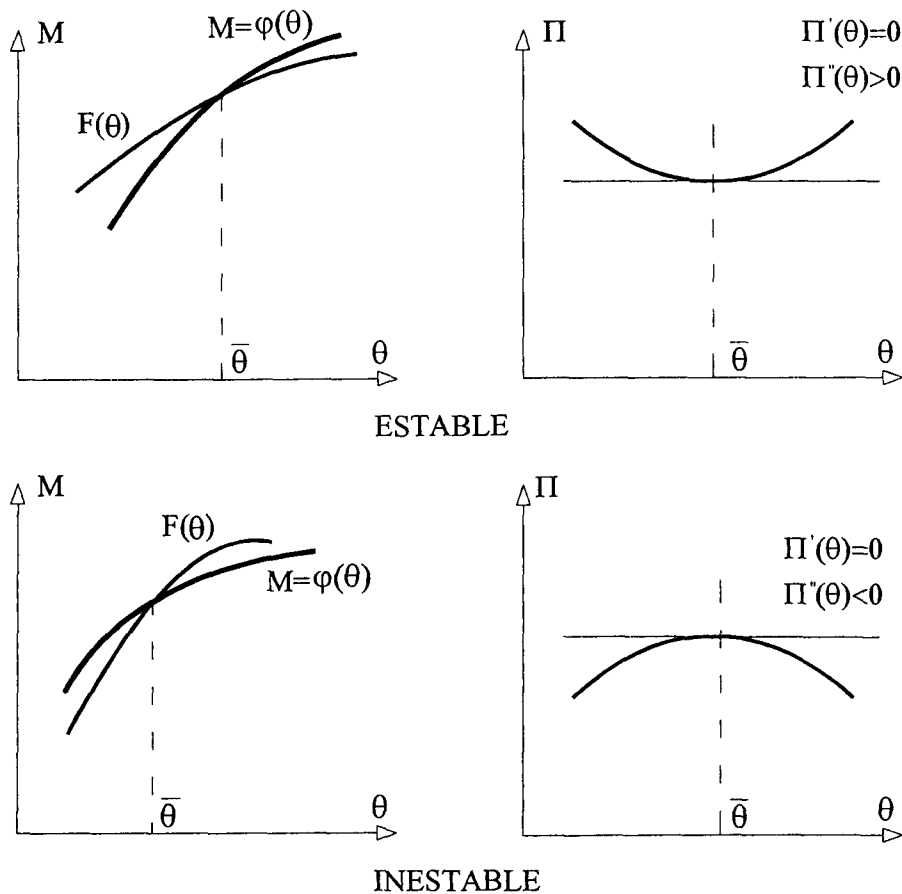


Figura 4.2.10

Se tiene una situación dudosa cuando

$$\varphi'(\bar{\theta}) = F'(\bar{\theta}) \quad (4.2.9)$$

Si se verifica que

$$\Pi'''(\bar{\theta}) = \varphi''(\bar{\theta}) - F''(\bar{\theta}) \neq 0 \quad (4.2.10)$$

el equilibrio es inestable al no haber mínimo relativo para la energía potencial. Gráficamente la función Π se comporta en un entorno de la posición de equilibrio de una de las dos maneras que se indican en la figura 4.2.11

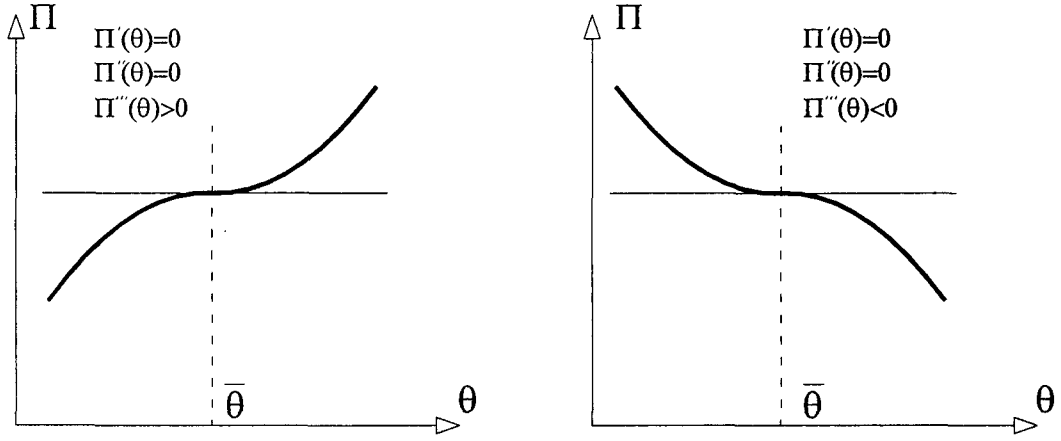


Figura 4.2.11

La diferencia $\varphi(\theta) - F(\theta)$ en un punto próximo a la posición de equilibrio dada por $\bar{\theta}$, suponiendo φ y F al menos de la clase C^2 en un cierto entorno de $\bar{\theta}$, es desarrollando por Taylor

$$\begin{aligned}\varphi(\theta) - F(\theta) &= [\varphi(\bar{\theta}) - F(\bar{\theta})] + [\varphi'(\bar{\theta}) - F'(\bar{\theta})](\theta - \bar{\theta}) \\ &\quad + \frac{1}{2}[\varphi''(\theta^*) - F''(\theta^*)](\theta - \bar{\theta})^2 = \\ &= \frac{1}{2}[\varphi''(\theta^*) - F''(\theta^*)](\theta - \bar{\theta})^2\end{aligned}\tag{4.2.11}$$

donde θ^* es un valor intermedio entre $\bar{\theta}$ y θ .

Si $\Pi'''(\bar{\theta}) = \varphi''(\bar{\theta}) - F''(\bar{\theta}) \neq 0$ por continuidad también se verifica que

$$\varphi''(\theta^*) - F''(\theta^*) \neq 0$$

y la diferencia $\varphi(\theta) - F(\theta)$ no cambia de signo en las proximidades de la posición de equilibrio. La situación es de inestabilidad como hemos indicado, y de acuerdo con lo deducido este caso se reconoce cuando las gráficas de las funciones φ y F , siendo tangentes mutuamente para el valor de la abscisa correspondiente a la posición de equilibrio, no se cruzan en un entorno de dicha abscisa. Esto se indica en la figura 4.2.12

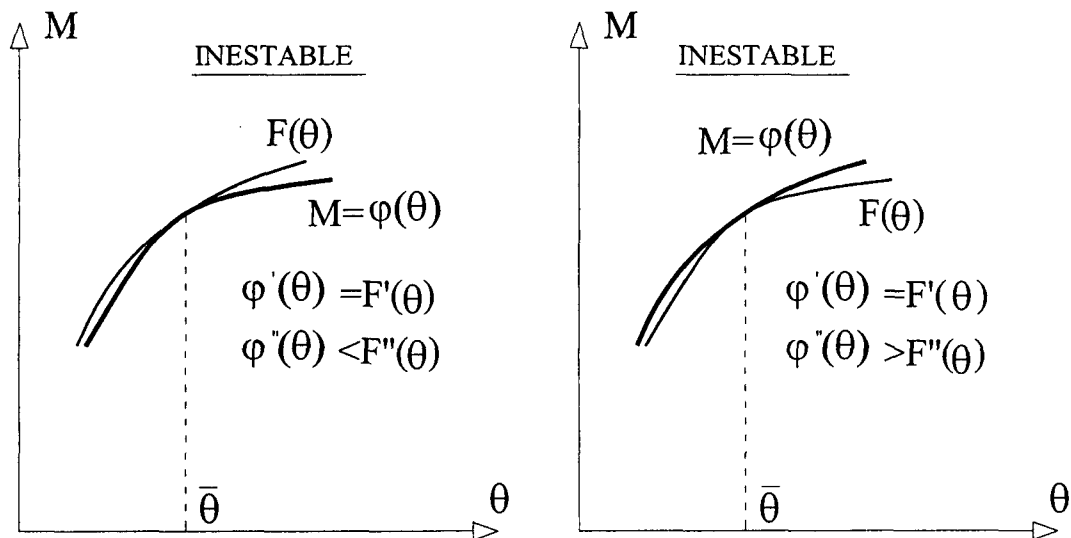


Figura 4.2.12

Por otra parte si para la posición de equilibrio correspondiente a $\bar{\theta}$ se verifica

$$\begin{aligned}\varphi'(\bar{\theta}) - F'(\bar{\theta}) &= 0 \\ \varphi''(\bar{\theta}) - F''(\bar{\theta}) &= 0 \\ \varphi'''(\bar{\theta}) - F'''(\bar{\theta}) &\neq 0\end{aligned}\tag{4.2.12}$$

podemos poner, suponiendo φ y F al menos de la clase C^3 en un cierto entorno de $\bar{\theta}$, desarrollando por Taylor la energía potencial

$$\Pi(\theta) - \Pi(\bar{\theta}) = \frac{1}{4!} \Pi^{(4)}(\theta^*)(\theta - \bar{\theta})^4 = \frac{1}{4!} [\varphi'''(\theta^*) - F'''(\theta^*)] (\theta - \bar{\theta})^4$$

y el equilibrio es estable si

$$\varphi'''(\bar{\theta}) > F'''(\bar{\theta})\tag{4.2.13}$$

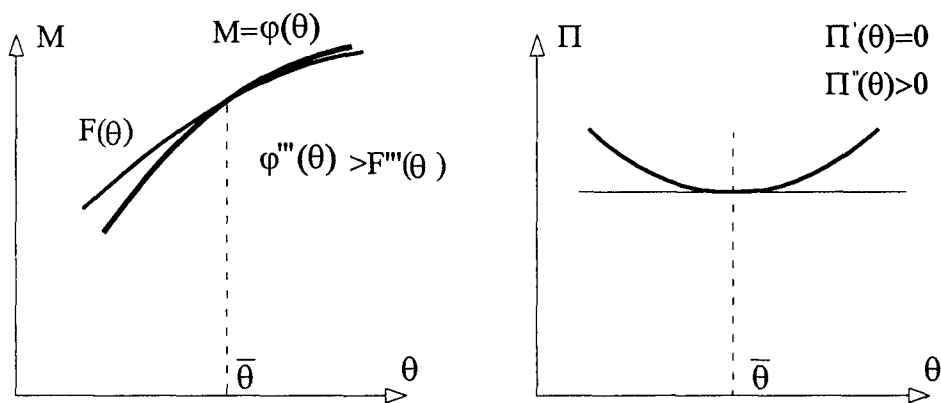
e inestable si

$$\varphi'''(\bar{\theta}) < F'''(\bar{\theta})\tag{4.2.14}$$

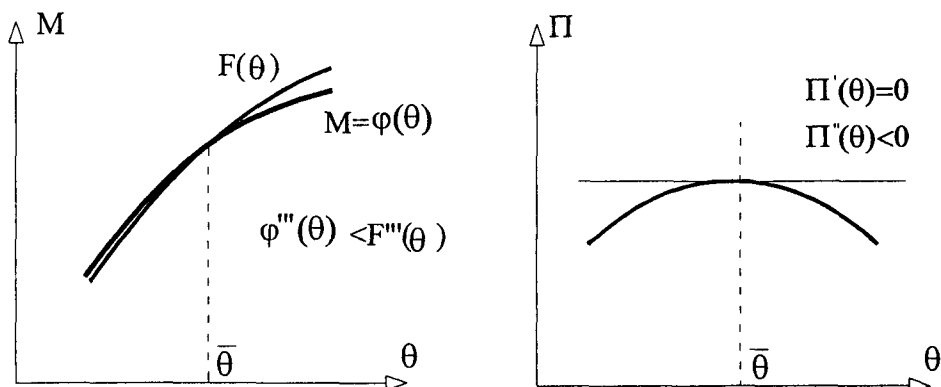
Esto se pone de manifiesto observando las gráficas de φ y F , y asimismo la de Π , véase figura 4.2.13, que en este caso de acuerdo con

$$\varphi(\theta) - F(\theta) = \frac{1}{3!} [\varphi'''(\theta^*) - F'''(\theta^*)] (\theta - \bar{\theta})^3$$

son de la forma



ESTABLE



INESTABLE

Figura 4.2.13

El análisis de la estabilidad del equilibrio para otros casos donde

$$\begin{aligned}\varphi^{(i)}(\bar{\theta}) - F^{(i)}(\bar{\theta}) &= 0, i = 0, \dots, p-1, \\ \varphi^{(p)}(\bar{\theta}) - F^{(p)}(\bar{\theta}) &\neq 0\end{aligned}$$

se realiza de forma análoga a los anteriores.

Análisis de un caso particular.

Supongamos que $H = 0$ y $M_0 = 0$, con $P \neq 0$, este caso donde no hay acción horizontal ni momento en el extremo del pilar, por analogía con el problema continuo, podría llamarse problema homogéneo. La ecuación de equilibrio para esta situación es

$$\varphi(\theta) - Pl \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (4.2.15)$$

Consideremos para mayor simplicidad del análisis, una relación constitutiva $\varphi(\theta)$ bilineal. El problema de determinar los valores de P para los cuales existen soluciones de la ecuación anterior distintas de la nula, es un problema no lineal de autovalores, donde la no linealidad surge, por una parte, de la falta de proporcionalidad entre el momento y el giro en la relación constitutiva dada por $\varphi(\theta)$ (no linealidad del material), y, por otra parte, de la no linealidad en la expresión del desplazamiento de la carga

dada por $l \operatorname{sen} \theta$ en lugar de la aproximación $l \theta$. La primera podemos decir que se debe a la no linealidad del material y la segunda a la no linealidad geométrica. El problema linealizado correspondería a la ecuación que resulta al considerar para θ pequeño, las aproximaciones

$$\varphi(\theta) \approx k\theta$$

$$\operatorname{sen} \theta \approx \theta$$

con $k = \varphi'(0)$

o sea la ecuación lineal

$$k\theta - Pl\theta = 0$$

El valor de la carga crítica sería

$$P_{cr} = \frac{k}{l} \quad (4.2.16)$$

Para dicha carga crítica hay infinitas soluciones, teóricamente todos los valores $\theta \in [0, \theta_c]$, aunque para que las aproximaciones del problema linealizado tengan sentido debemos limitarnos en la práctica a los valores $\theta \in [0, \hat{\theta}]$ con $\hat{\theta}$ pequeño si el valor θ_c del punto de quiebro del diagrama bilineal no es suficientemente pequeño. Gráficamente se puede interpretar lo anterior en la figura 4.2.14 del siguiente modos: al aumentar la carga P la recta tangente en el origen a la gráfica de F llega un momento en el que coincide con la tangente de φ en dicho punto, es decir se igualan las pendientes k y Pl de dichas tangentes. Todas las posiciones correspondientes a los ángulos θ del intervalo $[0, \hat{\theta}]$ para la carga P_{cr} son para este modelo linealizado, de equilibrio neutro o indiferente.

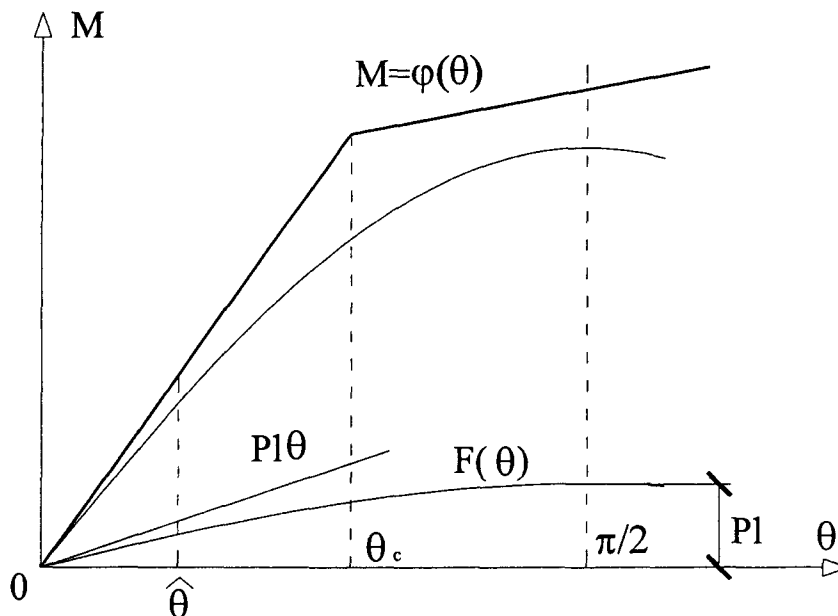


Figura 4.2.14

Si se estudia directamente el problema original, es decir la ecuación (4.2.15), resulta que para valores de $P < P_{cr} = k/l$ solo hay una posición de equilibrio, $\bar{\theta} = 0$, que es estable como en el caso linealizado. La afirmación anterior es consecuencia de la desigualdad $\varphi'(0) = k > F'(0) = Pl$. Sin embargo si $P = P_{cr}$ entonces

$$\begin{aligned}\varphi'(0) &= F'(0) \\ \varphi''(0) &= F''(0) \\ \varphi'''(0) - F'''(0) &= 0 + Pl > 0\end{aligned}\tag{4.2.17}$$

y el equilibrio indiferente que se tenía en el modelo linealizado para la carga crítica y la posición $\bar{\theta} = 0$, se torna en equilibrio estable para el modelo original.

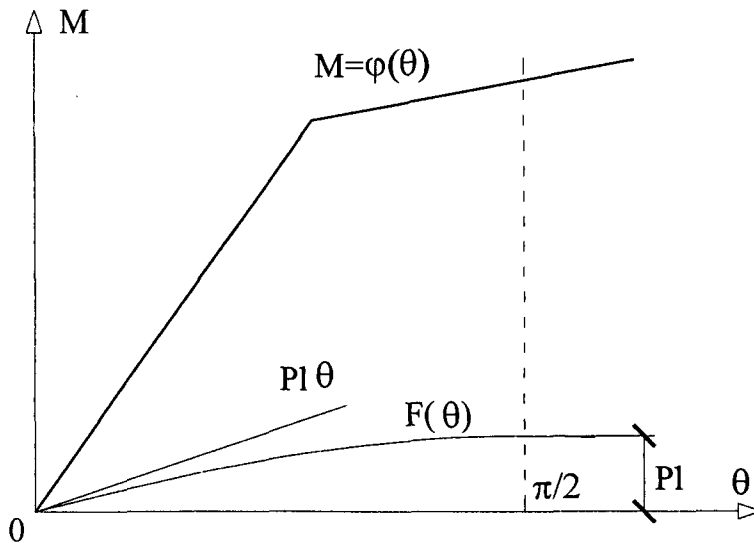


Figura 4.2.15

Si ahora $P > P_{cr}$ puede haber dos o más posiciones de equilibrio tal y como se pone de manifiesto en los casos (a) y (b) de la figura 4.2.16 relativos ya al modelo original.

Conviene indicar que el modelo linealizado no es el más adecuado para estudiar este caso pues únicamente proporciona como posición de equilibrio, $\bar{\theta} = 0$, que es inestable.

En el esquema (a) de la figura se observa que para este caso empleando el modelo original, se tienen dos posiciones de equilibrio: $\bar{\theta} = \theta_1 = 0$ que es inestable y $\bar{\theta} = \theta_2$ que es estable. En (b) se puede apreciar que hay cuatro posiciones de equilibrio: θ_2 y θ_4 estables y θ_1 y θ_3 inestables.

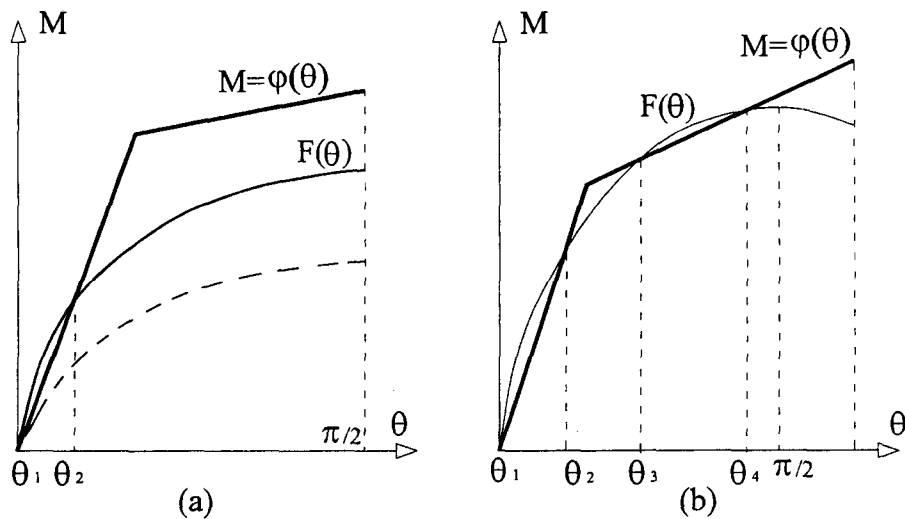


Figura 4.2.16

También en los casos anteriores donde la carga axial es inferior a la crítica, podría haber además de $\bar{\theta} = 0$ otras posiciones de equilibrio. Todo ello depende de la forma de la gráfica de la ley bilineal. Por ejemplo en el caso de la figura 4.2.17 para el caso indicado, es decir $P < P_{cr}$ pueden darse varias situaciones que se indican con las posiciones (1), (2), (3) etc. para la gráfica de la función F

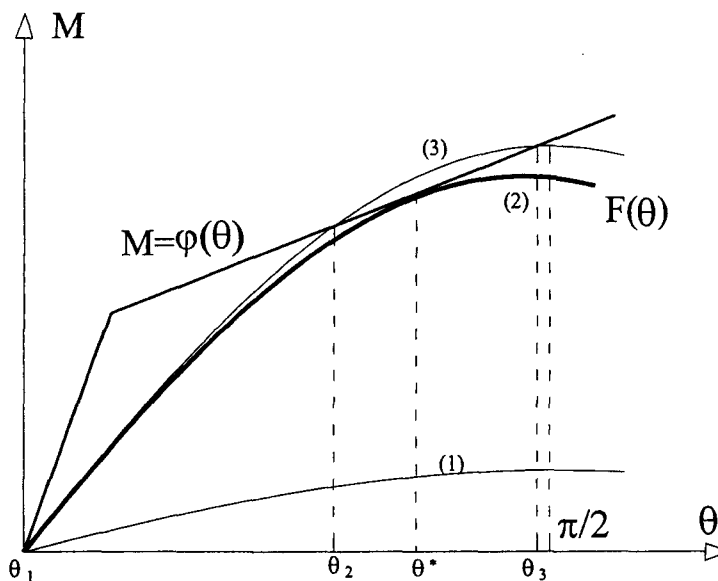


Figura 4.2.17

Para la carga P correspondiente a la gráfica (1) solo hay una posición de equilibrio $\bar{\theta} = \theta_1 = 0$ que es estable. Para la relativa a (2) hay dos soluciones o posiciones de equilibrio: para $\bar{\theta} = \theta_1 = 0$ que es estable y para el valor del ángulo θ^* que corresponde a la tangencia entre las gráficas de ϕ y F la posición de equilibrio es inestable, y corresponde a una situación fronteriza de la que nacen dos nuevas posiciones de equilibrio como se puede apreciar en (3). Para este caso hay tres posiciones de equilibrio, las correspondientes a $\bar{\theta} = \theta_1 = 0$ y $\bar{\theta} = \theta_3$ que son estables y para $\bar{\theta} = \theta_2$ que es inestable.

Bifurcación del equilibrio.

Supongamos el mismo caso de antes donde vamos modificando el valor de la carga P teniendo una ley constitutiva bilineal como la indicada en la figura 4.2.18. Si se realiza un gráfico $\theta - P$ giro-carga para las diferentes posiciones de equilibrio resulta lo siguiente: Al aumentar la carga P desde 0 hasta P_{cr} únicamente hay una posición de equilibrio correspondiente al ángulo $\bar{\theta} = \theta_1 = 0$ que es estable. En la figura corresponde a las gráficas de F dadas por (0) y (1). Cuando hay tangencia en el origen entre las gráficas de φ y F , situación dada por (2) es cuando se alcanza el valor de la carga crítica, manteniéndose para dicho caso $\bar{\theta} = \theta_1 = 0$ como posición estable. En la figura 4.2.19 lo anterior se corresponde con la trayectoria AB.

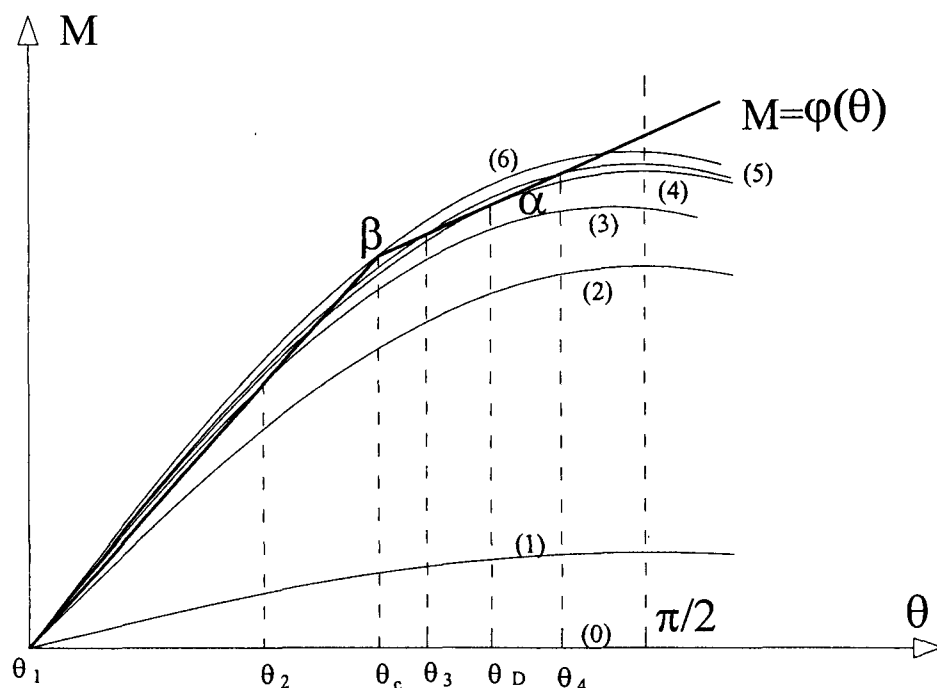


Figura 4.2.18

Al aumentar después P en el rango $P > P_{cr}$ aparece una nueva posición de equilibrio $\bar{\theta} = \theta_2$ que es estable, pasando ahora $\bar{\theta} = \theta_1 = 0$ a ser posición de equilibrio inestable. Hay bifurcación del equilibrio y aparece una nueva trayectoria que parte de B y va hacia C. Para $P > P_{cr}$ hay un momento en el que se alcanza la carga que hace que la gráfica de F sea tangente en el punto (α) a la de φ . En la figura 4.2.19 esta situación límite se corresponde con el punto D.

A partir de la posición límite anterior al aumentar la carga, la gráfica de F da lugar a cuatro intersecciones con la gráfica de φ , teniéndose consecuentemente cuatro posiciones de equilibrio, dos de ellas estables y las otras dos inestables. Si la carga sigue creciendo se alcanzará el punto C, que se relaciona con el punto (β) de la figura 4.2.18. La ordenada de dicho punto es una cota superior de las cargas que puede alcanzar el pilar en situación estable. Ahora bien para la carga correspondiente a dicho punto la

posición de equilibrio del pilar es inestable, de acuerdo con los razonamientos efectuados anteriormente. En la figura 4.2.19 dicho aumento de carga equivale al arco BC de la trayectoria, siendo la posición de equilibrio la dada por el ángulo θ_c .

Los puntos del eje de ordenadas para $\bar{\theta} = \theta_1 = 0$ con $P > P_{cr}$ son todos ellos de equilibrio, pero inestable. La carga P_c que resulta cuando la gráfica de F pasa por el punto (B) de la figura 4.2.18 verifica que $P_c > P_{cr}$ y representa por tanto una carga superior a la crítica que puede alcanzarse por la rama estable BC de la trayectoria sin cambio súbito en la posición de equilibrio, si al llegar a la carga crítica separamos el pilar ligeramente de la posición de equilibrio $\bar{\theta} = \theta_1 = 0$.

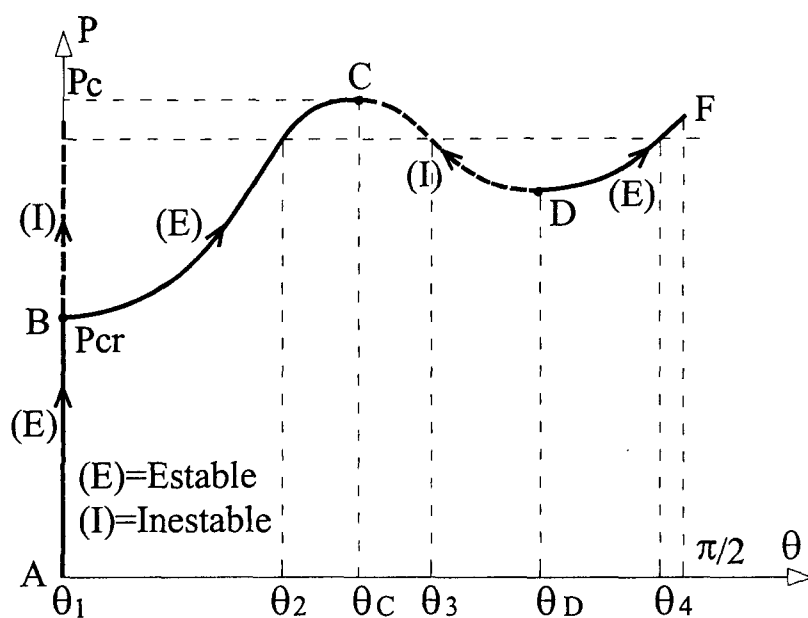


Figura 4.2.19

Finalmente para un caso donde $H \neq 0$ o $M_0 \neq 0$, caso que podría denominarse no homogéneo, las trayectorias con el incremento de la carga P evolucionan de otro modo, pues no hay bifurcación del equilibrio y $\bar{\theta} = 0$ no es posición de equilibrio. Observando las figuras adjuntas 4.2.20 y 4.2.21 se tiene que al aumentar la carga P desde 0 hasta P_D , situación en la que la gráfica de F es tangente en (α) a la de φ , solo hay una posición de equilibrio, definida por la rama ascendente que parte del punto A. En la posición límite donde se da la tangencia, para la cual $P = P_D$ hay dos posiciones de equilibrio. Para cargas superiores a P_D se tienen tres posiciones de equilibrio dadas por θ_1 , θ_2 y θ_3 , donde la primera y tercera son estables y la segunda inestable.

La capacidad portante del pilar vendría dada por P_c lo que representa un límite superior de la carga que puede alcanzar el pilar manteniéndose estable. Como antes dicho punto C que es una frontera de separación de las zonas estable (arco AC) e inestable (arco CD).

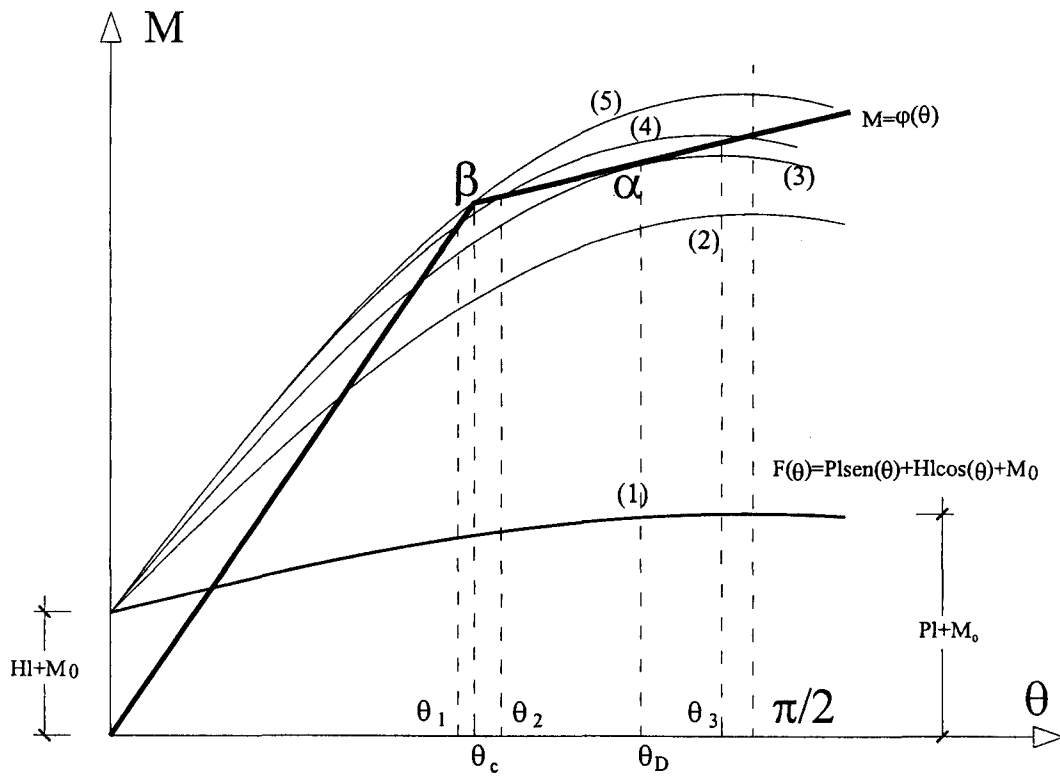


Figura 4.2.20

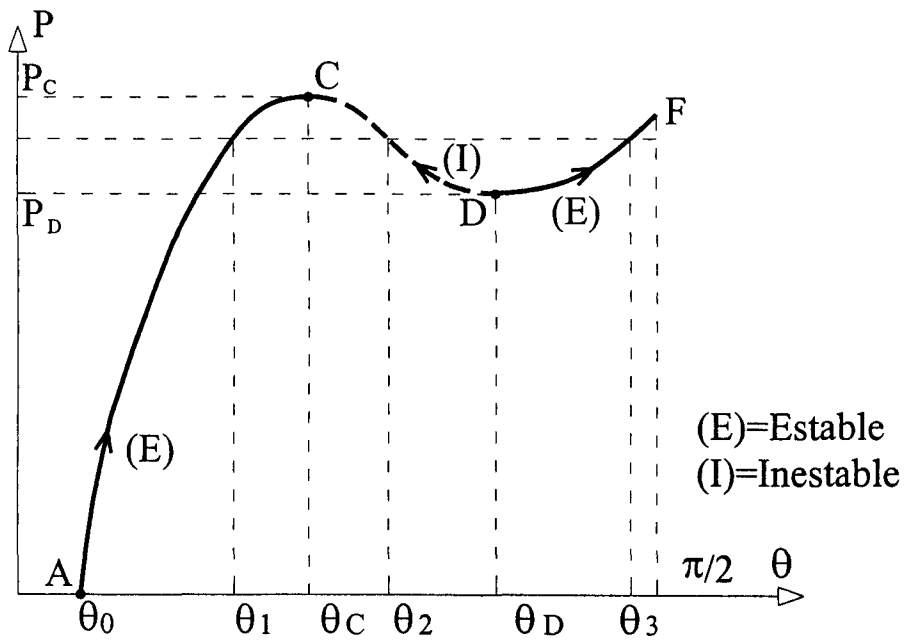


Figura 4.2.21

Caso particular de no linealidad del material y linealidad geométrica

Este caso es de interés por la analogía con el problema continuo que se aborda en un apartado posterior.

Si en lugar de establecer para el modelo las hipótesis de no linealidad del material y no linealidad geométrica se considera como no linealidad únicamente la del material, veremos que se mantienen los aspectos fundamentales del caso anterior con una simplificación notable del problema quedando además los cálculos del lado de la seguridad. Ahora la trayectoria carga-giro tiene una rama de subida alcanzando un máximo que define como antes la capacidad portante del pilar. No obstante desaparece el mínimo y la rama final de subida. Para el caso de un diagrama momento-curvatura definido por una poligonal se puede dar de forma sencilla la expresión analítica de la función carga-giro. Dicha función está formada por arcos de hipérbola equilátera. A continuación para el caso de una ley bilineal determinamos la citada función en los casos de problemas no homogéneo y homogéneo respectivamente.

Sea $\varphi(\theta)$ la función de la ley momento-curvatura en el caso bilineal. Dicha función puede definirse como $k_0\theta$ para $0 \leq \theta < \theta_c$ y $k_1\theta + \theta_c(k_0 - k_1)$ para $\theta \geq \theta_c$, verificando las pendientes k_0 y k_1 del diagrama bilineal la relación $0 < k_1 < k_0$

Para el caso $H \neq 0$ o $M_0 \neq 0$ la función $F(\theta)$ que define el momento originado por las acciones externas es ahora para la hipótesis de linealidad geométrica

$$F(\theta) = Pl\theta + (Hl + M_0) \quad (4.2.18)$$

que es algo superior al que resulta para la hipótesis de no linealidad geométrica. Suponiendo $0 < Hl + M_0 < \theta_c(k_0 - k_1)$, para los valores de P tales que $0 \leq P \leq k_1/l$, solo se tiene la posición de equilibrio correspondiente al ángulo

$$\theta_1 = \frac{Hl + M_0}{k_0 - Pl} \quad (4.2.19)$$

que es estable. Para $k_1/l < P \leq P_c$, donde

$$P_c = \frac{k_0\theta_c - Hl - M_0}{l\theta_c} \quad (4.2.20)$$

se tiene además de la anterior, la posición de equilibrio relativa a

$$\theta_2 = \frac{\theta_c(k_0 - k_1) - (Hl + M_0)}{Pl - k_1} \quad (4.2.21)$$

que es inestable. En la figura 4.2.22 adjunta puede verse que para $P > P_c$ no hay intersección entre las gráficas de φ y F , por tanto no existen posiciones de equilibrio.

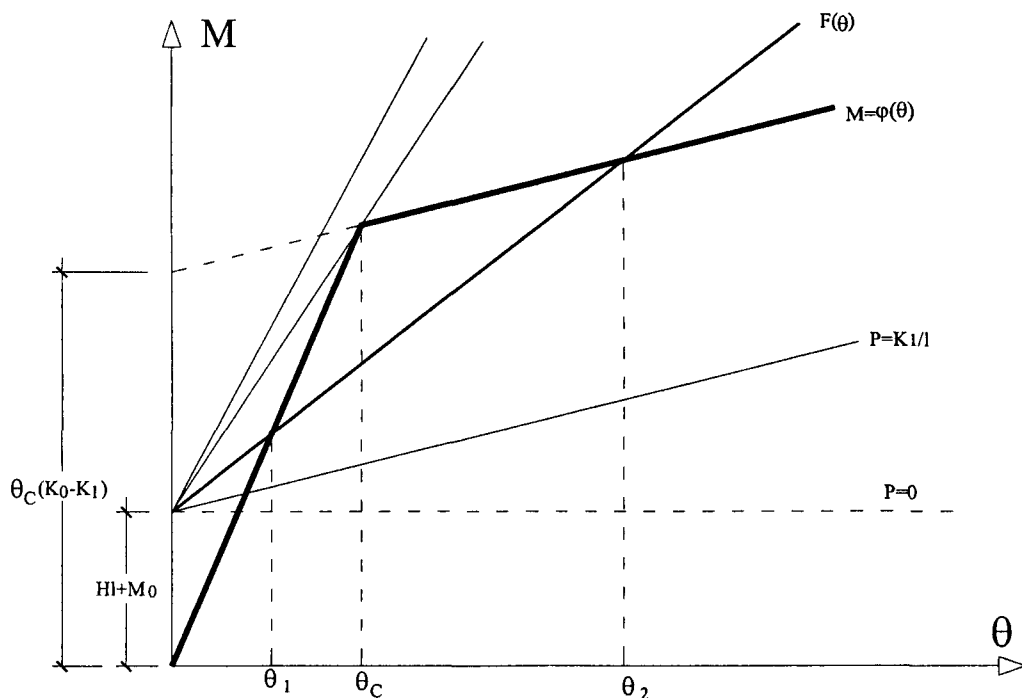


Figura 4.2.22

La curva carga-giro está definida en este caso por las ramas de dos hipérbolas equiláteras con asíntotas horizontales dadas por $P = k_0 / l$ y $P = k_1 / l$, tal y como puede verse en la figura 4.2.23, donde la rama de subida para $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_c$ con $\theta_0 = (Hl + M_0) / k_0$ viene dada por

$$P = \frac{k_0}{l} - \frac{Hl + M_0}{l\theta} \quad (4.2.22)$$

y la rama de bajada para $\theta > \theta_c$ por

$$P = \frac{k_1}{l} + \frac{\theta_c(k_0 - k_1) - (Hl + M_0)}{l\theta} \quad (4.2.23)$$

Obsérvese que $P = k_0 / l$ y $P = k_1 / l$ representan las cargas de pandeo en la hipótesis de linealidad geométrica y linealidad del material cuando las leyes momento-curvatura vienen dadas respectivamente por las funciones $\varphi(\theta) = k_0 \theta$ y $\varphi(\theta) = k_1 \theta$.

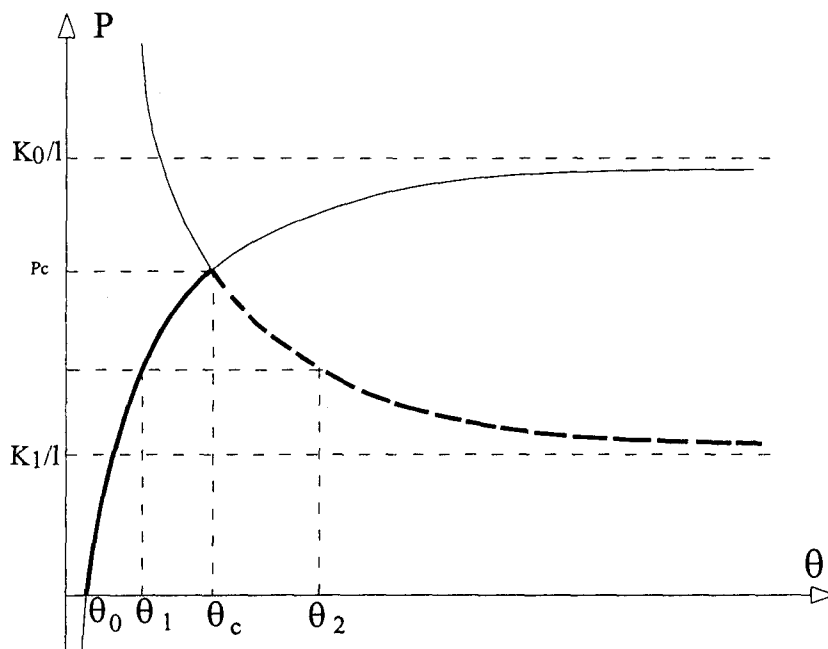


Figura 4.2.23

El valor de la carga correspondiente al máximo de la función carga-giro es P_c . Interesa destacar que dicho valor queda del lado de la seguridad, ya que si se considerara no linealidad geométrica el valor máximo vendría dado por

$$\bar{P}_c = \frac{k_0 \theta_c - (Hl \cos \theta_c + M_0)}{l \sin \theta_c} \quad (4.2.24)$$

que verifica $\bar{P}_c > P_c$ ya que aumenta el numerador y disminuye el denominador.

Como en los problemas anteriores de no linealidad geométrica, el caso homogéneo $H = 0$ y $M_0 = 0$, tiene también bifurcación del equilibrio tal y como puede apreciarse en la figura 4.2.24, del diagrama giro-carga al alcanzar la carga P el valor k_0/l . Para el ángulo $\theta_1 = 0$ corresponde una posición de equilibrio que es estable para P comprendida entre 0 y k_0/l . Para valores superiores de la carga dicha posición es inestable. Cuando la carga es tal que $k_1/l < P < k_0/l$ hay dos posiciones de equilibrio: la ya citada correspondiente a $\theta_1 = 0$ y la relativa a

$$\theta_2 = \frac{\theta_c (k_0 - k_1)}{Pl - k_1} \quad (4.2.25)$$

la cual es de equilibrio inestable. Finalmente para $P = k_0/l$ todas las posiciones correspondientes a los ángulos $\theta \in [0, \theta_c]$ son de equilibrio, teóricamente indiferente, para esta modelización.

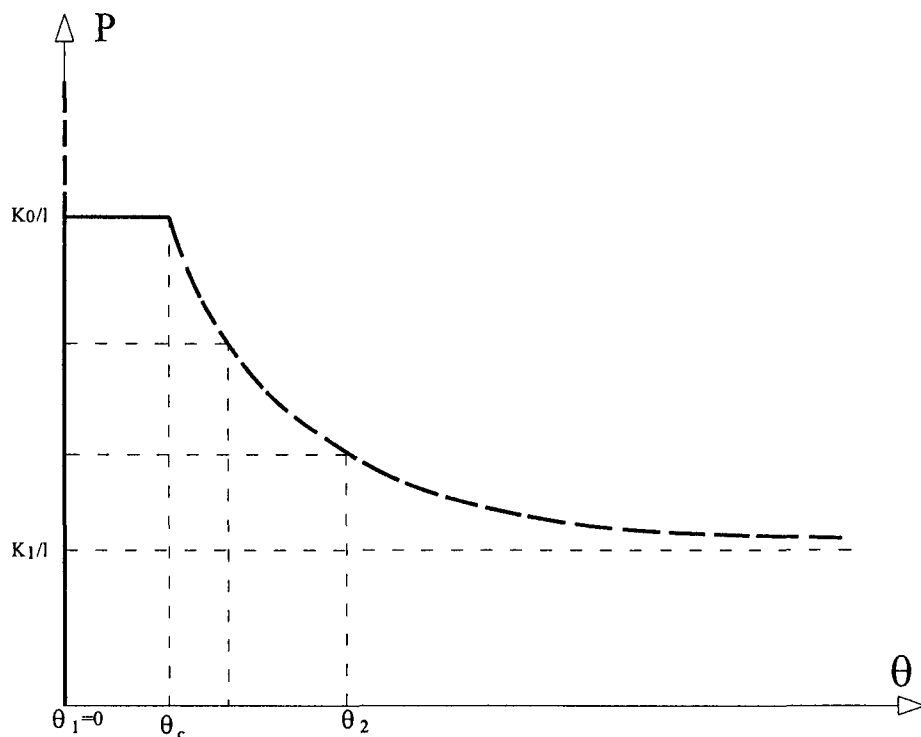


Figura 4.2.24

Comentarios

Para el desarrollo realizado hasta ahora se ha seguido un enfoque geométrico, para el análisis del problema de estabilidad, a partir del comportamiento de las gráficas de las funciones φ y F y en especial de la evolución de sus puntos de intersección al modificarse el valor de la carga P . Se ha considerado incluso que la función φ fuera poco regular como en el caso de la bilineal donde la función es continua pero no derivable, lo que no ha supuesto ninguna restricción.

El problema se podría haber analizado de manera local siguiendo lo expuesto en [Ngu00] y [MaH94], exigiendo cierta regularidad para φ . Por ejemplo si se considera que la función es de la forma

$$\varphi(\theta) = k_1\theta + k_2\theta^2 + k_3\theta^3 \quad (4.2.26)$$

el análisis de la estabilidad en las proximidades del punto de bifurcación, caso donde $H = M_0 = 0$, se podría abordar a partir de (4.2.15) mediante

$$k_1\theta + k_2\theta^2 + k_3\theta^3 - Pl\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots\right) = 0 \quad (4.2.27)$$

Poniendo P en función de θ en la forma

$$P = P_0 + P_1\theta + P_2\theta^2 + \dots \quad (4.2.28)$$

resulta identificando términos en potencias de θ

$$P_0 = k_1/l, \quad P_1 = k_2/l, \quad P_2 = (k_1 + 6k_3)/(6l) \quad (4.2.29)$$

donde P_0 es la carga para la que se produce la bifurcación. Lo anterior permite realizar un cierto análisis local, teniéndose bifurcación simétrica si $P_1 = 0$ es decir si $k_2 = 0$. Si además $P_2 > 0$ la bifurcación es simétrica y estable y si $P_2 < 0$ es simétrica e inestable. La función P dependiente de θ indica que en el caso de bifurcación simétrica estable para valores de la carga ligeramente mayores que P_0 hay otra posición de equilibrio además de la correspondiente a $\theta = 0$. Ocurriendo lo mismo en el caso de bifurcación simétrica inestable para valores de la carga ligeramente inferiores a P_0 . Las leyes usuales momento-giro (que se pueden derivar de las de momento-curvatura) como se indicó en el capítulo segundo, son funciones impares del argumento θ por tanto $k_2 = 0$ y lo frecuente es que la bifurcación sea simétrica. Cuando $k_2 \neq 0$ la bifurcación es asimétrica. En la figura 4.2.25 se ilustra lo comentado.

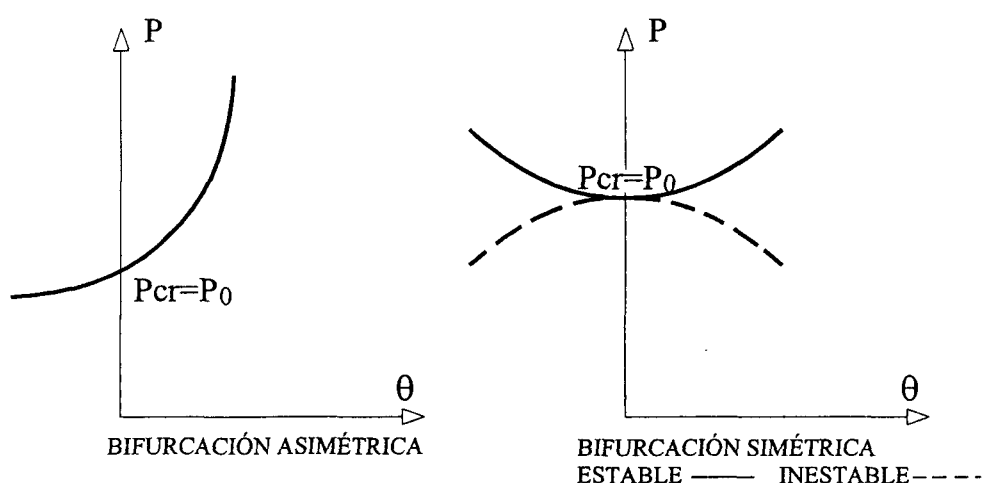


Figura 4.2.25

Este análisis local y otros con él relacionados, como son los basados en el método de las perturbaciones, si bien son interesantes, como destaca Croll y Walker [CrW75, p.137], para los problemas de varios grados de libertad, su aplicación desde nuestro punto de vista es más limitada para el caso que hemos expuesto de un grado de libertad, donde el enfoque geométrico y descriptivo que se ha empleado da una mejor visión del problema.

Por otra parte y continuando de nuevo con el estudio geométrico, hay que señalar que todo el desarrollo realizado a lo largo de este punto 4.2.1, se ha basado en que la función φ de la relación momento curvatura se ha supuesto independiente del valor de la carga P . Si se tuviera en cuenta dicha dependencia a través de la ley dada por la superficie mecánica, las posiciones de equilibrio para cada carga P se corresponderían con las soluciones de la ecuación

$$\varphi(P, \theta) = F(P, \theta) \quad (4.2.30)$$

donde dicha función supuestos H y M_0 fijos es $F(P, \theta) = Pl \sin \theta + Hl \cos \theta + M_0$ si se tiene en cuenta la no linealidad geométrica o $F(P, \theta) = Pl \theta + Hl + M_0$ en el supuesto de linealidad. En cualquier caso, se trataría de determinar la intersección de las superficies $M = \varphi(P, \theta)$ y $M = F(P, \theta)$ esquematizadas en la figura 4.2.26.

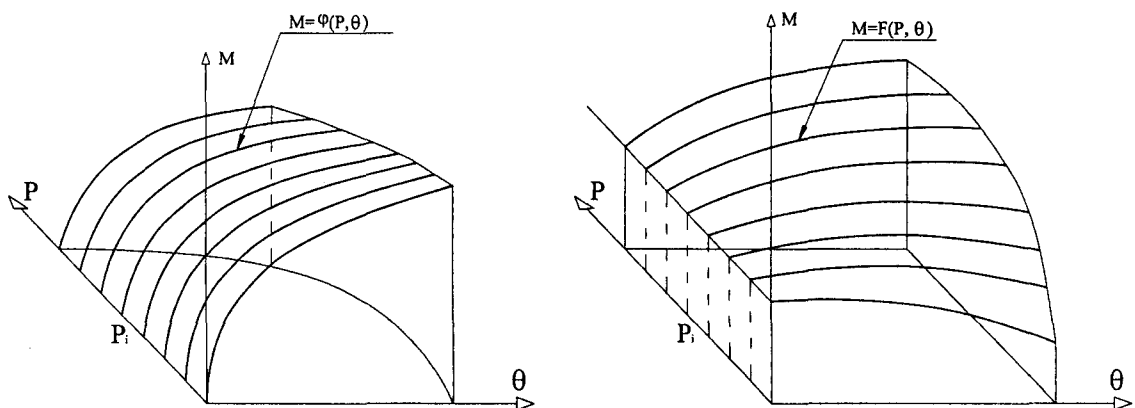


Figura 4.2.26

Para la carga P_i indicada en la figura anterior, se tendría la posición de equilibrio determinada por la intersección de las gráficas que resultan al seccionar las superficies anteriores por el plano $P = P_i$ tal y como se indica en la figura 4.2.27.

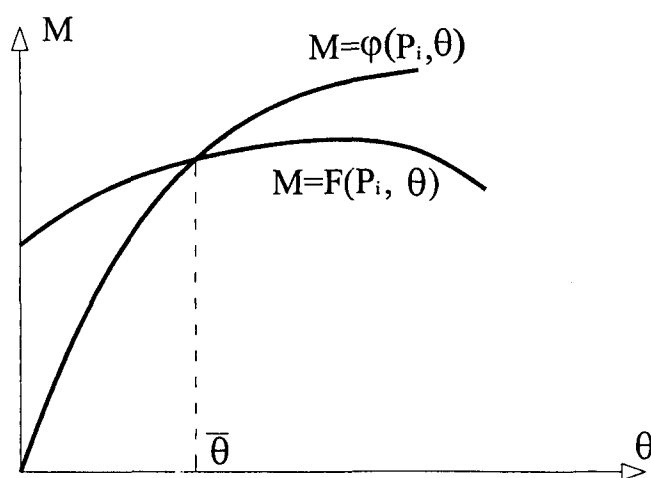


Figura 4.2.27

Este nuevo enfoque que resulta al considerar la dependencia de la carga P , tiene su importancia pues permite introducir a través de este simple modelo, el concepto de carga crítica de Engesser de módulo tangente. Por ejemplo suponiendo, el caso homogéneo, $H = 0$ y $M_0 = 0$, la carga de Engesser se correspondería aquí con aquella carga P^* para la cual las gráficas de las funciones $\phi(P^*, \theta)$ y $F(P^*, \theta)$ para $\theta = 0$ tienen una tangente común, es decir

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta}(P, \theta = 0) = \frac{\partial F}{\partial \theta}(P, \theta = 0) \quad (4.2.31)$$

Sabiendo que en este caso $\frac{\partial F}{\partial \theta}(P,0) = Pl$ y llamando $K(P)$ a la función definida mediante $k(P) = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(P,0)$ al módulo de rigidez tangente en el origen, la carga P^* se obtendría resolviendo la ecuación

$$k(P) = Pl \quad (4.2.32)$$

cuya interpretación gráfica se da en la figura 4.2.28

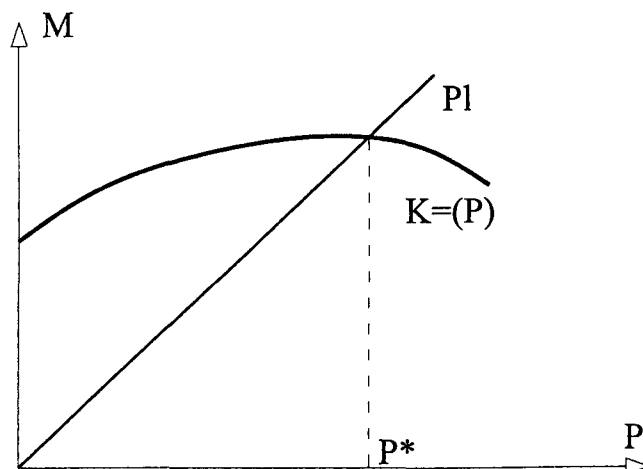


Figura 4.2.28

De manera análoga la capacidad portante o carga máxima para un caso no homogéneo, con linealidad geométrica y superficie mecánica tal que para cada carga P , por ejemplo la ley momento-curvatura sea bilineal, se obtendría en la forma habitual pero sabiendo que para cada valor de la carga la relación momento curvatura es diferente. Esto se puede esquematizar teniendo en cuenta que para la sucesión creciente de valores P_i las gráficas de $\varphi(P_i, \theta)$ y $F(P_i, \theta)$ tienen el aspecto indicado en la figura 4.2.29.

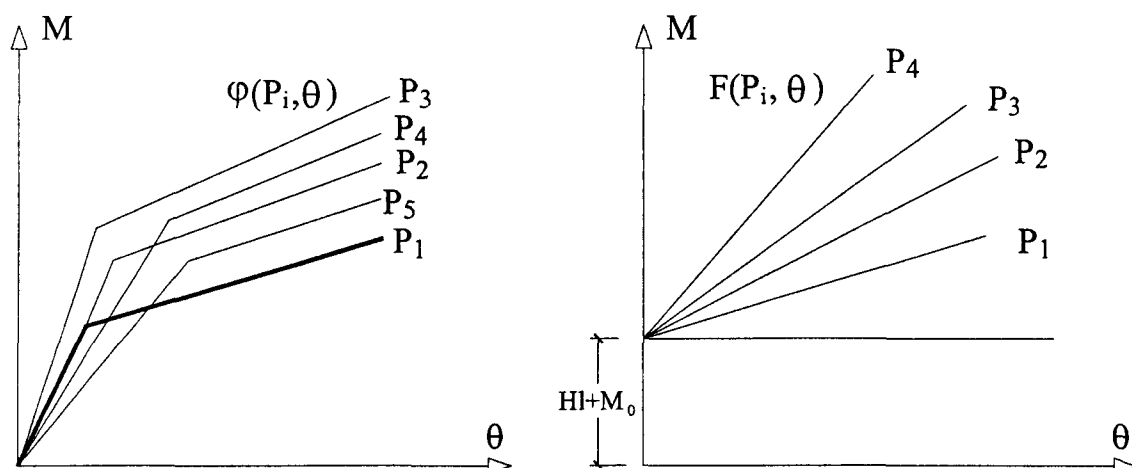


Figura 4.2.29

La carga máxima \hat{P} sería aquella para la cual la ecuación (4.2.30)

$$\varphi(P, \theta) = F(P, \theta)$$

tiene dos soluciones en θ iguales. Esta idea se esquematiza en la figura 4.2.30

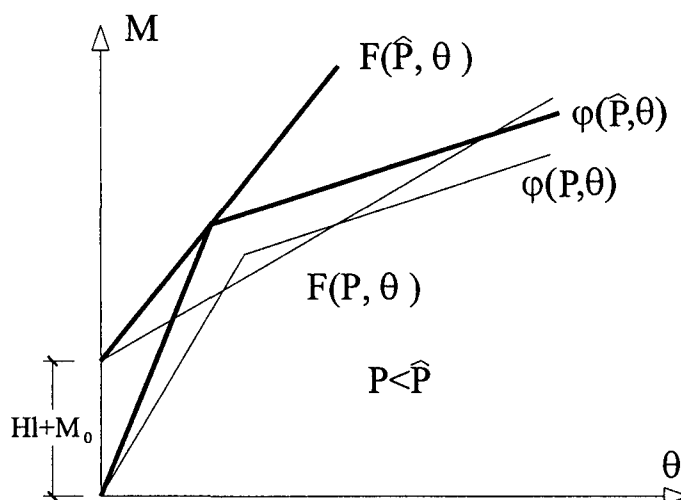


Figura 4.2.30

4.2.2 Modelo con varios grados de libertad

Si el modelo de un grado de libertad pese a su sencillez permite poner de manifiesto aspectos conceptuales importantes del fenómeno de pandeo en régimen no lineal, el siguiente modelo incide más en aspectos cuantitativos pudiendo obtener con él resultados próximos a los del problema continuo cuando se toma un número suficientemente alto de grados de libertad. Este mayor realismo en los resultados contribuye también a una mejor comprensión del fenómeno de pandeo.

En los puntos siguientes se pone de manifiesto a través de ejemplos, la respuesta de la pieza sometida a pandeo en régimen no lineal de una forma ahora cuantitativa a partir de los resultados numéricos que se obtienen analizando para un problema también discreto, distintas situaciones donde se combinan la linealidad y no linealidad, del comportamiento del material y de la geometría del desplazamiento. En particular en el punto 4.2.3 se analiza un caso de un grado de libertad empleando lo expuesto en 4.2.1. Asimismo en el punto 4.2.4 se estudia un caso con varios grados de libertad a partir del desarrollo que se hace a continuación.

Se considera como en el caso anterior una barra vertical (véase la figura 4.2.31) sometida a las acciones H, M_0 y P en su extremo superior, pero constituida por n tramos iguales de longitud l y rigidez infinita unidos entre si mediante articulaciones con resortes de respuesta elástica no lineal.

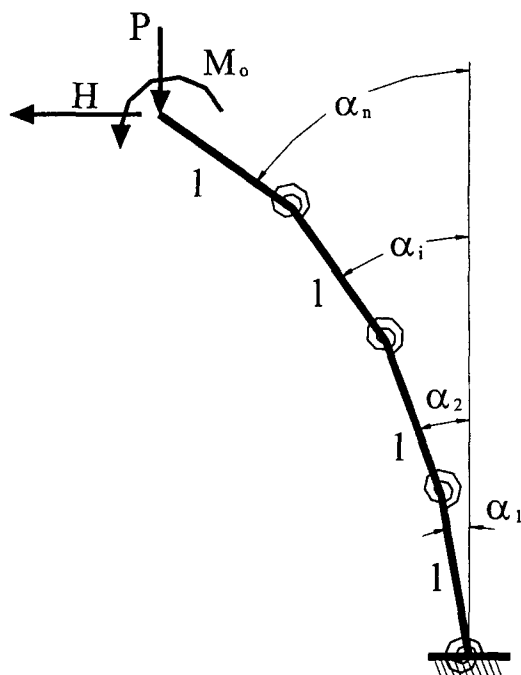


Figura 4.2.31

La barra esquematiza el comportamiento de una ménsula vertical empotrada en su base. La ley que define el momento que se moviliza en cada articulación elástica para un giro relativo entre cada dos tramos consecutivos de valor θ es $M = \varphi(\theta)$. En la figura 4.2.31 se indican los giros $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ de cada uno de los tramos de la pieza respecto de la posición vertical inicial.

A continuación, y con un desarrollo esquemático, se dan las ecuaciones de equilibrio de la ménsula para las cuatro combinaciones posibles, de linealidad o no, para el material y la geometría, únicamente con el propósito de indicar cual es el conjunto de ecuaciones que se resuelven en cada caso. El método de resolución empleado es el usual de Newton-Raphson.

No linealidad del material y no linealidad geométrica

La energía potencial total Π viene dada en este caso por la expresión

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \int_0^{\alpha_i - \alpha_{i-1}} \varphi(u) du - Pl \left[n - \sum_{i=1}^n \cos \alpha_i \right] - Hl \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i - M_0 \alpha_n \quad (4.2.33)$$

con $\alpha_0 = 0$. Las ecuaciones de equilibrio que resultan son

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_1} = \varphi(\alpha_1) - \varphi(\alpha_2 - \alpha_1) - Pl \sin \alpha_1 - Hl \cos \alpha_1 = 0 \\ \vdots \\ F_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} = \varphi(\alpha_i - \alpha_{i-1}) - \varphi(\alpha_{i+1} - \alpha_i) - Pl \sin \alpha_i - Hl \cos \alpha_i = 0 \\ i = 2, \dots, n-1 \\ \vdots \\ F_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_n} = \varphi(\alpha_n - \alpha_{n-1}) - Pl \sin \alpha_n - Hl \cos \alpha_n - M_0 = 0 \end{array} \right. \quad (4.2.34)$$

Las ecuaciones anteriores resultan también de imponer el equilibrio de momentos en cada nudo, de este modo se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(\alpha_i - \alpha_{i-1}) - Pl \sum_{k=i}^n \sin \alpha_k - Hl \sum_{k=i}^n \cos \alpha_k - M_0 = 0 \\ i = 1, \dots, n, \alpha_0 = 0 \end{array} \right. \quad (4.2.35)$$

Si en este sistema restamos de cada ecuación la siguiente se obtiene el sistema anterior que es de estructura más sencilla.

Por otra parte la matriz Hessiana de la energía potencial Π coincide con la matriz jacobiana de la función vectorial $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)^T$ que define las ecuaciones de equilibrio. Llamando $c_i = \cos \alpha_i, s_i = \sin \alpha_i, i = 1, \dots, n$ resulta la matriz simétrica J donde

$$J = \left[\frac{\partial F_i}{\partial \alpha_j} \right]_{n \times n} = \left[\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right]_{n \times n} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\varphi'(\alpha_1) + \varphi'(\alpha_2 - \alpha_1) - Plc_1 + Hls_1) & -\varphi'(\alpha_2 - \alpha_1) & & & \\ -\varphi'(\alpha_2 - \alpha_1) & (\varphi'(\alpha_2 - \alpha_1) + \varphi'(\alpha_3 - \alpha_2) - Plc_2 + Hls_2) & -\varphi'(\alpha_3 - \alpha_2) & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -\varphi'(\alpha_n - \alpha_{n-1}) & (\varphi'(\alpha_n - \alpha_{n-1}) - Plc_n + Hls_n) \end{bmatrix} \quad (4.2.36)$$

La estabilidad del equilibrio una vez resuelto el sistema no lineal (4.2.34) puede analizarse en la forma usual, mediante el signo de la forma cuadrática asociada a la

matriz jacobiana J , lo que puede hacerse por ejemplo mediante el criterio de menores principales de dicha matriz o el de autovalores.

La resolución del sistema no lineal de ecuaciones se abordará en el ejemplo que se desarrolla después con el método iterativo usual de Newton-Raphson, mediante la resolución de los sucesivos sistemas lineales de matriz de coeficientes $J(x^{(m)})$ y término independiente $F(x^{(m)})$ es decir

$$\begin{cases} J(x^{(m)})v = F(x^{(m)}) \\ x^{(m+1)} = x^{(m)} - v \end{cases} \quad (4.2.37)$$

lo que equivale al proceso de iteración de punto fijo $x^{(m+1)} = x^{(m)} - J^{-1}(x^{(m)})F(x^{(m)})$ donde $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ comenzando en un $x^{(0)}$ conveniente de modo que el proceso converja.

Linealidad del material y linealidad geométrica

El interés de este caso lineal está simplemente en la obtención de unos valores de referencia para realizar comparaciones con las diferentes situaciones de no linealidad. Se está suponiendo en este caso $\varphi(u) = ku$, $\sin \alpha_i \approx \alpha_i$, $\cos \alpha_i \approx 1$, $i = 1, \dots, n$ resultando un sistema lineal de matriz tridiagonal, que permite determinar la posición de equilibrio.

$$\begin{bmatrix} \frac{2k}{l} - P & -\frac{k}{l} & & & \\ -\frac{k}{l} & \frac{2k}{l} - P & -\frac{k}{l} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{k}{l} & \frac{2k}{l} - P & -\frac{k}{l} \\ & & & -\frac{k}{l} & \frac{k}{l} - P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ H \\ \vdots \\ H \\ H + \frac{M_0}{l} \end{bmatrix} \quad (4.2.38)$$

Por otra parte para el caso homogéneo, la carga de pandeo se corresponde obviamente con el autovalor positivo más pequeño de la matriz siguiente

$$\begin{bmatrix} \frac{2k}{l} & -\frac{k}{l} & & & \\ -\frac{k}{l} & \frac{2k}{l} & -\frac{k}{l} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & -\frac{k}{l} & \frac{2k}{l} & -\frac{k}{l} \\ & & & -\frac{k}{l} & \frac{k}{l} \end{bmatrix} \quad (4.2.38a)$$

Linealidad del material y no linealidad geométrica

Las ecuaciones de equilibrio son ahora

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = k\alpha_1 - k(\alpha_2 - \alpha_1) - Pls_1 - Hlc_1 = 0 \\ \vdots \\ F_i = k(\alpha_i - \alpha_{i-1}) - k(\alpha_{i+1} - \alpha_i) - Pls_i - Hlc_i = 0 \\ i = 2, \dots, n-1 \\ \vdots \\ F_n = k(\alpha_n - \alpha_{n-1}) - Pls_n - Hlc_n - M_0 = 0 \end{array} \right. \quad (4.2.39)$$

La matriz jacobiana es para este caso

$$J = \begin{bmatrix} 2k - Plc_1 + Hls_1 & -k & & & \\ -k & 2k - Plc_2 + Hls_2 & -k & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -k & 2k - Plc_{n-1} + Hls_{n-1} & -k \\ & & & -k & k - Plc_n + Hls_n \end{bmatrix} \quad (4.2.40)$$

No linealidad del material y linealidad geométrica

Las ecuaciones de equilibrio y la matriz jacobiana son respectivamente

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = \varphi(\alpha_1) - \varphi(\alpha_2 - \alpha_1) - Pl\alpha_1 - Hl = 0 \\ \vdots \\ F_i = \varphi(\alpha_i - \alpha_{i-1}) - \varphi(\alpha_{i+1} - \alpha_i) - Pl\alpha_i - Hl = 0 \\ i = 2, \dots, n-1 \\ \vdots \\ F_n = \varphi(\alpha_n - \alpha_{n-1}) - Pl\alpha_n - Hl - M_0 = 0 \end{array} \right. \quad (4.2.41)$$

$$J = \begin{bmatrix} \varphi'(\alpha_1) + \varphi'(\alpha_2 - \alpha_1) - Pl & -\varphi'(\alpha_2 - \alpha_1) & & & \\ -\varphi'(\alpha_2 - \alpha_1) & \varphi'(\alpha_2 - \alpha_1) + \varphi'(\alpha_3 - \alpha_2) - Pl & -\varphi'(\alpha_3 - \alpha_2) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\varphi'(\alpha_n - \alpha_{n-1}) & \varphi'(\alpha_n - \alpha_{n-1}) - Pl & \end{bmatrix} \quad (4.2.42)$$

4.2.3 Ejemplo de ménsula con un grado de libertad

Consideremos una ménsula como la de la figura 4.2.1 de longitud $l = 20m$. La pieza es infinitamente rígida en toda su longitud y la rótula elástica se encuentra en la base de la ménsula. Las únicas acciones son la carga axial P (toneladas) y una carga horizontal de valor $H = 2$ toneladas. Se va a realizar una discusión considerando las distintas posibilidades de no linealidad. El momento $\varphi(\theta)$ (toneladas metro) dependiente del giro θ (radianes) que se moviliza en la rótula o articulación es para el caso de linealidad del material $\varphi(\theta) = 2000\theta$, y para el de no linealidad del material

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} 2000\theta, & 0 \leq \theta \leq 0.05 \\ 500\theta + 75, & \theta > 0.05 \end{cases}$$

Linealidad del material y linealidad geométrica

Las posiciones de equilibrio en función de la carga P se obtienen resolviendo la ecuación $F(\theta) = \varphi(\theta)$, donde $\varphi(\theta) = k_0\theta$ siendo $F(\theta) = Pl\theta$ para el caso homogéneo y $F(\theta) = Pl\theta + Hl$ para el no homogéneo. La carga crítica es $P_{cr} = k_0 / l$ es decir

$$P_{cr} = 2000 / 20 = 100 \text{ toneladas}$$

En la figura 4.2.32 se representan las curvas carga giro $P - \theta$ para los casos homogéneo y no homogéneo respectivamente.

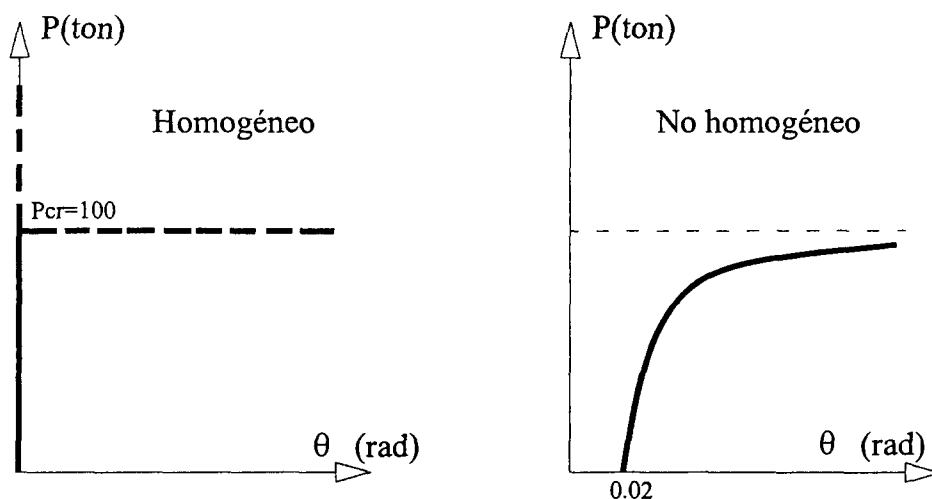


Figura 4.2.32

Para el homogéneo $\theta = 0$ corresponde a una posición de equilibrio estable para $P < P_{cr} = 100$, e inestable si $P > P_{cr} = 100$. Para $P = P_{cr} = 100$ todas las posiciones son de equilibrio indiferente. Para el no homogéneo para cada P tal que $0 \leq P < P_{cr} = 100$ se obtiene una posición de equilibrio estable, dada por el ángulo θ que se relaciona con P mediante

$$P = \frac{k_0}{l} - \frac{H}{\theta} = 100 - \frac{2}{\theta}$$

La gráfica corresponde a una rama de hipérbola equilátera que tiene como asíntota horizontal $P = 100$. En la tabla 4.2.1 se indican algunos valores del giro en función de la carga

P	θ
0.0	0.020000
10	0.022222
20	0.025000
40	0.033333
60	0.050000
80	0.100000
90	0.200000
95	0.400000
99	2.000000

Tabla 4.2.1

Linealidad del material y no linealidad geométrica

La ecuación $F(\theta) = \varphi(\theta)$ que permite determinar las posiciones de equilibrio tiene $\varphi(\theta) = k\theta$ como antes pero $F(\theta) = Pl \sin \theta$ y $F(\theta) = Pl \sin \theta + Hl \cos \theta$ para los casos homogéneo y no homogéneo respectivamente. En la figura 4.2.33 se representan las curvas carga giro $P - \theta$ para los dos casos homogéneo y no homogéneo. Asimismo en las tablas 4.2.2 y 4.2.3 se dan los valores de los giros en función de la carga para ambos casos.

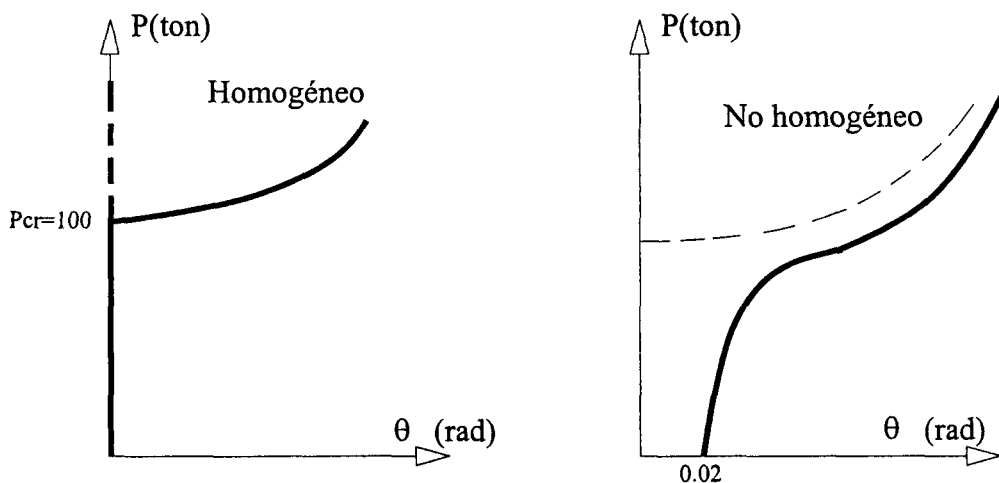


Figura 4.2.33

P	θ_1	θ_2
$0 \leq P \leq P_{cr} = 100$	0.0	----
100.01	0.0	0.0244940
100.1	0.0	0.0774325
101	0.0	0.2440967
102	0.0	0.3440136
110	0.0	0.7489866
120	0.0	1.0267383

Tabla 4.2.2

P	θ	P	θ
0.0	0.0199960	60	0.0499067
10	0.0222165	80	0.0988677
20	0.0249915	100	0.4760350
40	0.0333107	110	0.8119690

Tabla 4.2.3

No linealidad del material y no linealidad geométrica

Los dos casos anteriores correspondían a linealidad del material. Ahora se considera la no linealidad del material y simultáneamente no linealidad geométrica. Las posiciones de equilibrio en función de la carga P se obtienen de la ecuación $F(\theta) = \varphi(\theta)$, donde $\varphi(\theta)$ viene dada por la expresión bilineal dada al comienzo, $F(\theta) = Pl \sin \theta$ para el caso homogéneo y $F(\theta) = Pl \sin \theta + Hl \cos(\theta)$ para el no homogéneo. Resolviendo ambas ecuaciones para cada valor de P puede construirse la curva carga giro $P - \theta$. El valor de la carga crítica resulta como antes de igualar las pendientes, en el caso homogéneo, de F y φ para $\theta = 0$ resultando $P_{cr} = 100$. Los valores de θ en el caso homogéneo para valores de P comprendidos entre 0 y P_{cr} se indican en la tabla 4.2.4 dando el significado de las raíces θ_1, θ_2 y θ_3 en la figura 4.2.34

P	θ_1	θ_2	θ_3
$0 < P < 32.985$	0.0	-----	----
32.985	0.0	0.7000	0.7000
40	0.0	0.25800	1.4350
60	0.0	0.10700	2.0700
80	0.0	0.06800	2.2790
$P_{cr} = 100$	0.0	0.05003	2.4370

Tabla 4.2.4

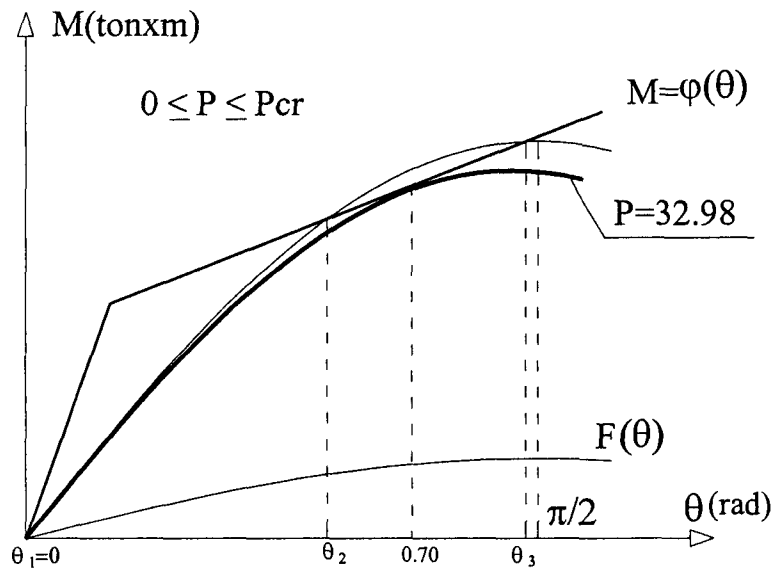


Figura 4.2.34

Para cargas muy ligeramente superiores en este caso a la crítica y hasta alcanzar la carga límite $P_{lim} = 100.0417$ aparece una nueva posición de equilibrio tal y como se indica en la figura 4.2.35 donde se puede ver el significado de los ángulos. En la tabla 4.2.5 se indica como antes la correspondencia de valores de los ángulos con los de la carga axial.

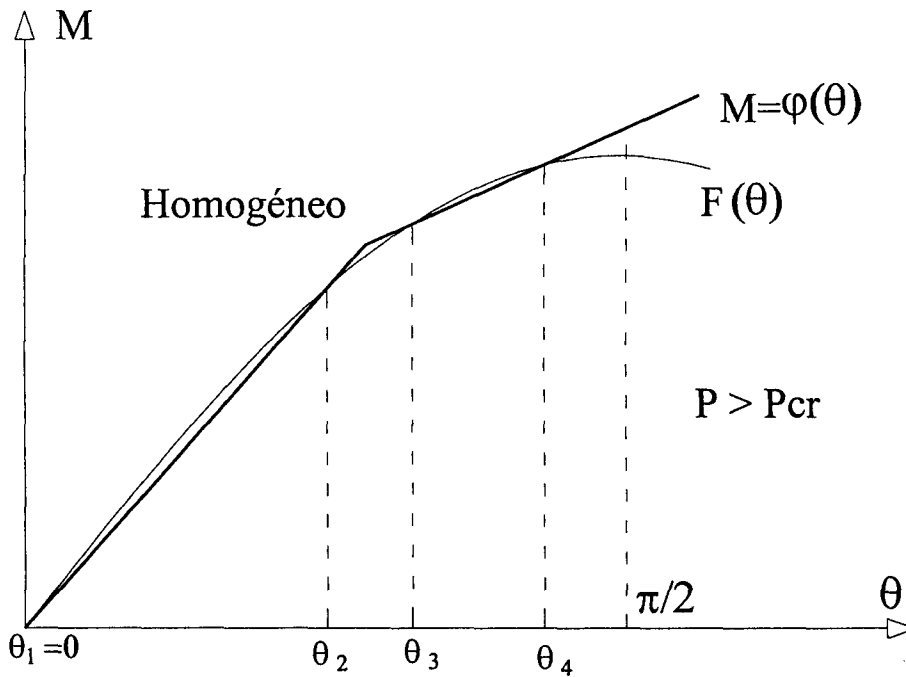


Figura 4.2.35

P	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
100.01	0.0	0.02449	0.050020	2.43802
100.02	0.0	0.03460	0.050010	2.43808
100.03	0.0	0.04240	0.050008	2.43810
100.04	0.0	0.04898	0.050001	2.43815
$P_{\text{lim}} = 100.0417$	0.0	0.05000	0.050000	2.43822
$P > P_{\text{lim}}$	0.0	----	----	$2.438 < \theta_4 < \pi$

Tabla 4.2.5

La última línea de la tabla anterior indica que para $P > P_{\text{lim}}$ solo hay dos posiciones de equilibrio, la vertical que es inestable y una inclinada con un gran ángulo que es estable.

En la figura 4.2.36 está construida la gráfica carga giro $P - \theta$ para este caso homogéneo de no linealidad del material y no linealidad geométrica.

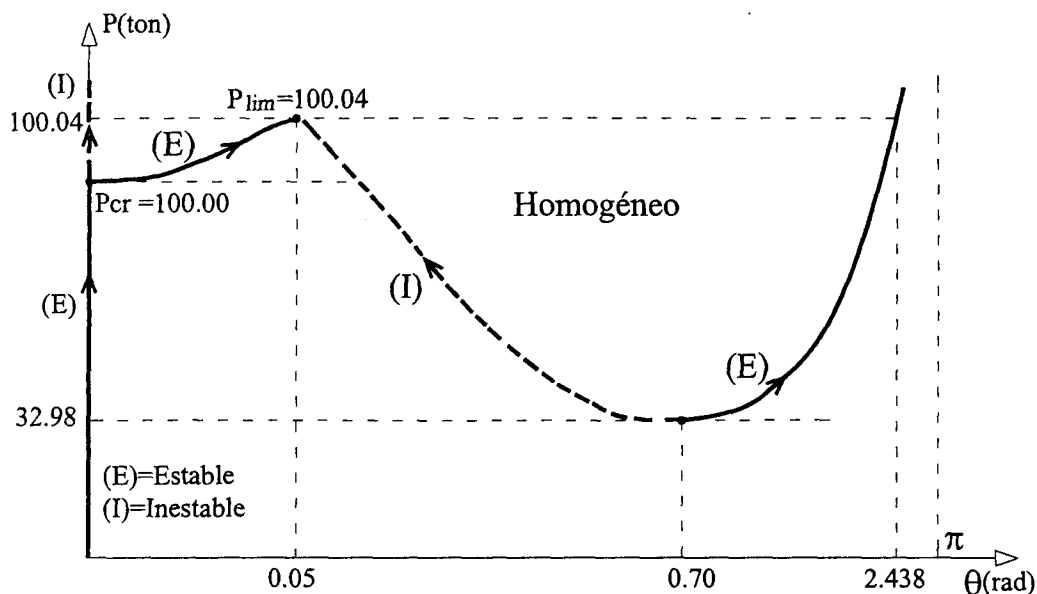


Figura 4.2.36

Los valores y la gráfica para el caso no homogéneo se indican a continuación en la tabla 4.2.6 y figuras 4.2.37, 4.2.38. Obsérvese que la carga límite se ha reducido ahora por la presencia de la carga horizontal $H = 2$, al valor $P_{\text{lim}} = 60.075$

P	θ_1	θ_2	θ_3
0	0.019996	----	----
10	0.022216	----	----
20	0.024991	----	----
30	0.028558	----	----
30.215	0.028646	0.53000	0.53000
40	0.033310	0.11830	1.44770
50	0.039957	0.07030	1.78652
60	0.049906	0.05011	1.99953
$P_{\text{lim}} = 60.075$	0.050000	0.05000	2.00008

Tabla 4.2.6

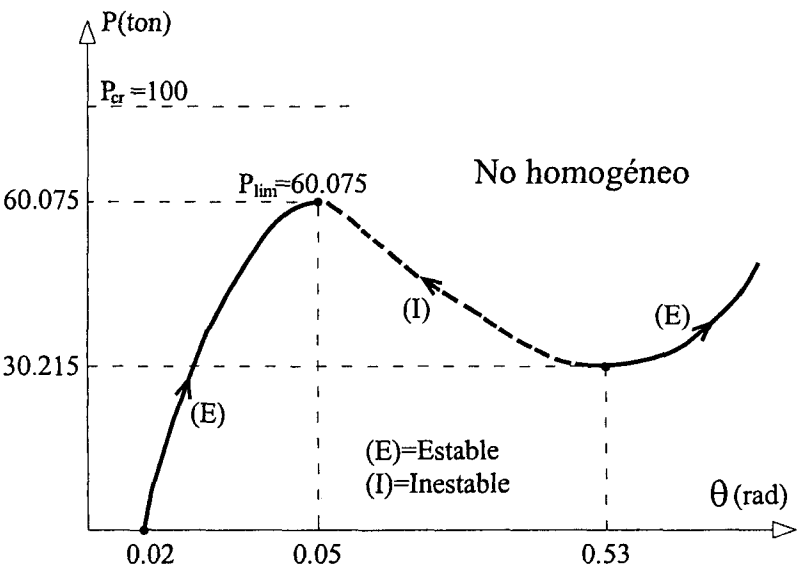


Figura 4.2.37

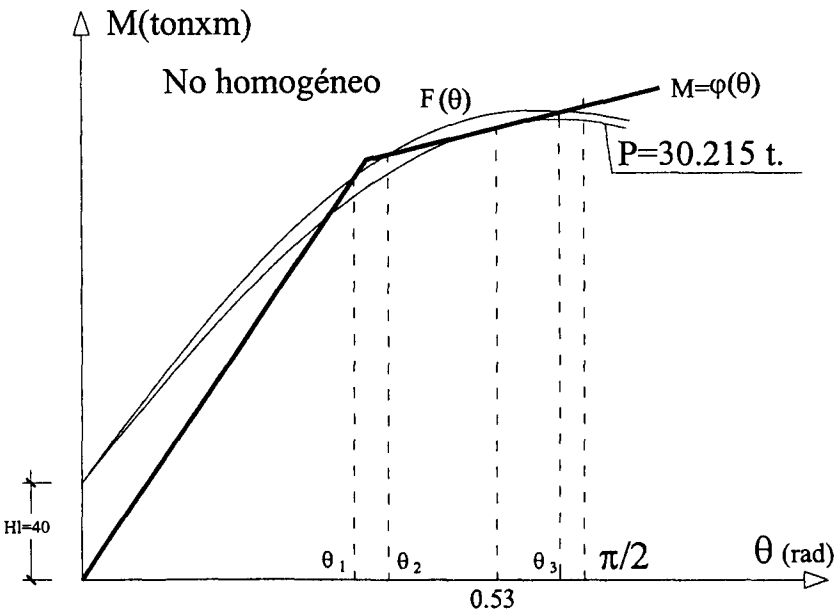


Figura 4.2.38

No linealidad del material y linealidad geométrica

Abordamos finalmente el caso de no linealidad del material y linealidad geométrica. Ahora $\varphi(\theta)$ viene dada como en el caso anterior por la expresión bilineal dada al principio, $F(\theta) = Pl\theta$ para el caso homogéneo y $F(\theta) = Pl\theta + Hl$ para el no homogéneo. De nuevo el valor de la carga crítica resulta como en los casos anteriores de igualar las pendientes en el caso homogéneo de F y φ para $\theta = 0$. Las curvas carga giro $P - \theta$ se corresponden con las de las figuras 4.2.24 y 4.2.23 para los casos homogéneo y no homogéneo respectivamente. Dichas curvas se representan con los valores numéricos relativos al ejemplo en la figura 4.2.39

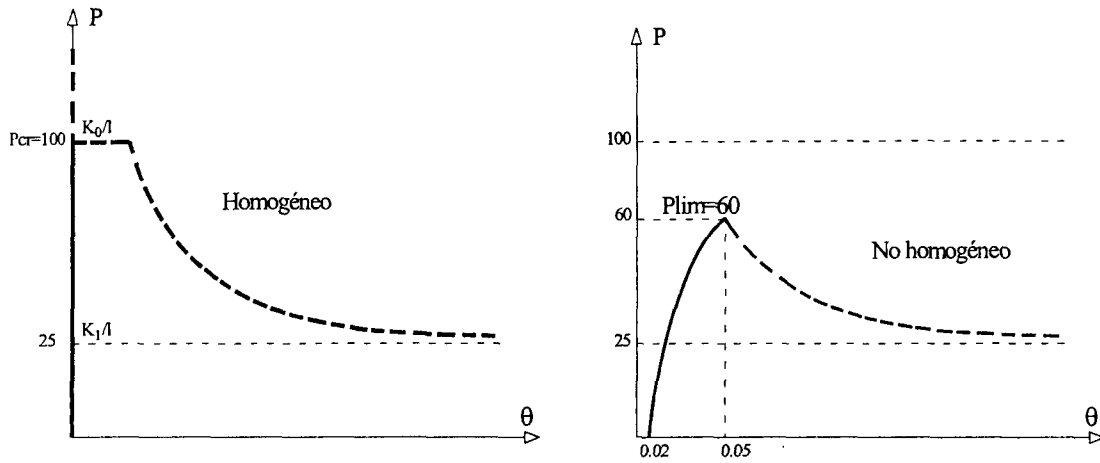


Figura 4.2.39

En la tabla 4.2.7 se dan los valores de la gráfica carga giro correspondiente al caso homogéneo y en la 4.2.8 para el no homogéneo. La rama de bajada para el caso homogéneo viene dada por

$$\theta_2 = \frac{0.05(2000 - 500)}{20P - 500} = \frac{75}{20P - 500}, \quad 25 < P \leq 100$$

Las ramas de subida y bajada respectivamente en el no homogéneo están dadas por las expresiones

$$\theta_1 = \frac{40}{2000 - 20P}, \quad 0 \leq P \leq P_{lim} = 60$$

$$\theta_2 = \frac{0.05(2000 - 500) - 40}{20P - 500} = \frac{35}{20P - 500}, \quad 25 < P \leq P_{lim} = 60$$

P	θ_1	θ_2
0	0.0	----
10	0.0	----
20	0.0	----
25	0.0	----
26	0.0	3.750000
40	0.0	0.250000
60	0.0	0.107143
80	0.0	0.068182
100	0.0	0.050000

Tabla 4.2.7

P	θ_1	θ_2
0	0.0200000	----
10	0.0222222	----
20	0.0250000	----
25	0.0266667	----
26	0.0270270	1.750000
30	0.0285714	0.350000
40	0.0333333	0.116667
50	0.0400000	0.070000
59	0.0487805	0.051471
60	0.0500000	0.050000

Tabla 4.2.8

Como se puede ver hay prácticamente coincidencia de valores de θ_1 para cada carga P en los casos de no linealidad del material y linealidad o no linealidad geométrica. Además tienen una carga límite casi idéntica pues para el de no linealidad geométrica es de 60.075 toneladas, siendo de 60 toneladas para el de linealidad geométrica. Obsérvese que esta última es ligeramente inferior como ya se indicó.

4.2.4 Ejemplo de ménsula con cuatro grados libertad

Se analiza ahora el comportamiento de una ménsula de longitud $L = 20m$ discretizada en este caso en cuatro elementos de longitud $l = 5m$. Las rótulas elásticas están situadas en la base de la ménsula y en los puntos de separación de los tramos tal y como se esquematiza en la figura 4.2.31. La pieza se encuentra sometida a la carga axial P (toneladas) y a una carga horizontal en el extremo de valor $H = 10$ toneladas. El momento $\varphi(\theta)$ (toneladas metro) que se moviliza en las rótulas o articulaciones que se encuentran en los puntos de separación de los tramos es para el caso de linealidad del material $\varphi(\theta) = 20000\theta$ y para el de no linealidad viene dado por la expresión bilineal siguiente

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} 20000\theta, & 0 \leq \theta \leq 0.04 \\ 5000\theta + 600, & \theta > 0.04 \end{cases}$$

donde θ (radianes) representa el giro relativo entre tramos consecutivos.

Se realiza ahora una discusión análoga a la del caso de un grado de libertad destacando especialmente la comparación de resultados entre el problema no homogéneo de no linealidad del material y no linealidad geométrica y el de no linealidad del material y linealidad geométrica. El primero constituye un modelo más realista al considerar las no linealidades en el material y geométrica. El segundo por su parte es de gran interés en este estudio pues representa una excelente aproximación al primero para el caso de pequeños desplazamientos recogiendo al tiempo las peculiaridades de éste.

La carga de pandeo para el problema homogéneo en régimen lineal (linealidad del material y geométrica) es el autovalor positivo más pequeño de la matriz (4.2.38a) que para este caso es

$$\begin{bmatrix} 8000 & -4000 & & & \\ -4000 & 8000 & -4000 & & \\ & -4000 & 8000 & -4000 & \\ & & -4000 & 4000 & \end{bmatrix}$$

resultando $P_{cr} = 482.459$ toneladas. Los ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4 que forman los tramos en la posición deformada respecto a la vertical, considerando la carga H (problema no homogéneo) para diferentes valores de P inferiores a $P_{cr} = 482.459$ se obtienen resolviendo el sistema (4.2.38) y se dan en la tabla 4.2.9

P	α_1	α_2	α_3	α_4
0	0.01	0.0175	0.0225	0.025
50	0.0110447	0.0194513	0.0251148	0.0279644
100	0.0123597	0.0219105	0.0284135	0.0317061
150	0.0140670	0.0251066	0.0327046	0.0365762
200	0.0163747	0.0294307	0.0385152	0.0431738
250	0.0196700	0.0356107	0.0468256	0.0526140
300	0.0247646	0.0451719	0.0596913	0.0672338
350	0.0336957	0.0619431	0.0822704	0.0928991
400	0.0534416	0.0990391	0.132233	0.149703
450	0.133978	0.250384	0.336121	0.381546
470	0.347156	0.651021	0.875892	0.995350
480	1.75*	3.29*	4.43*	5.0*

Tabla 4.2.9

Como puede observarse los valores indicados con (*) indican que al aproximarnos a la carga de pandeo los ángulos toman valores considerables, aunque los resultados carecen de sentido geométrico como es obvio. No obstante indicamos que el propósito de este ejemplo, del mismo modo que el anterior, es fundamentalmente conceptual.

Para el caso de linealidad del material y no linealidad geométrica comprobamos mediante la resolución del sistema no lineal (4.2.39) que en el problema homogéneo ($H = 0$) la única solución para $0 \leq P \leq P_{cr}$ es $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ es decir la pieza se mantiene en posición vertical en equilibrio estable. Sin embargo para cargas superiores a la crítica además de la posición vertical que es ahora de equilibrio inestable se tiene otra solución estable. Los ángulos que definen las posiciones de equilibrio para algunos valores de la carga P se dan en la tabla 4.2.10 en la cual puede verse que los ángulos crecen monótonamente con el aumento de la carga axial de manera análoga al caso de un grado de libertad.

P	α_1	α_2	α_3	α_4
483	0.023386	0.060860	0.081990	0.093236
493	0.142390	0.267000	0.359600	0.408600
495	0.155190	0.291250	0.391779	0.445055
505	0.207251	0.388524	0.521970	0.592470
515	0.248069	0.464527	0.623305	0.706928
525	0.282582	0.528567	0.708360	0.802768

Tabla 4.2.10

De nuevo resolviendo el sistema no lineal (4.2.39) pero ahora para el problema no homogéneo con $H = 10$ se tiene para este caso de linealidad del material y no linealidad geométrica la correspondencia, de valores entre la carga P y los ángulos $\alpha_i, i = 1, \dots, 4$, dada en la tabla 4.2.11 para cargas comprendidas entre 0 y 600 toneladas. En la tabla puede observarse el crecimiento notable de los ángulos cuando la carga pasa de 400 a 500 (la crítica es $P_{cr} = 482.459$), donde aproximadamente se quintuplican. Después aunque se mantiene el crecimiento, al seguir aumentando la carga axial, éste se suaviza.

P	α_1	α_2	α_3	α_4
0	0.009998	0.0174962	0.0224949	0.0249941
100	0.0123555	0.0219023	0.0284021	0.0316931
200	0.0163625	0.0294072	0.0384826	0.0431367
300	0.0247062	0.0450604	0.0595388	0.0670588
400	0.0523768	0.0970218	0.1294916	0.1465693
480	0.1911469	0.3570412	0.4786530	0.5427750
500	0.2510123	0.4685549	0.627417	0.7108737
600	0.4693030	0.8685365	1.151647	1.2967260

Tabla 4.2.11

Hemos visto que para los problemas no homogéneos de los casos anteriores no existe carga límite, como ya ocurría en los problemas de un grado de libertad. Pues en el de linealidad del material y linealidad geométrica la carga de referencia era la crítica, y en el de linealidad del material y no linealidad geométrica si bien los ángulos experimentaban un aumento considerable en las proximidades de la carga crítica los ángulos crecían monótonamente con el aumento de la carga. Estos hechos cambian de manera notable al considerar la no linealidad del material de manera análoga a como ocurría en el problema de un grado de libertad.

Comparación entre los casos no homogéneos de no linealidad del material

Se considera ahora el problema no homogéneo de no linealidad del material y no linealidad geométrica. Para ello resolvemos el sistema (4.2.34) para $H = 10$ y para valores de P crecientes desde 0 hasta el valor límite $P_{\text{lim}} = 364.84$ que es la cota superior de las cargas que puede soportar el pilar en régimen estable. Los valores de los ángulos en función de la carga se dan en la tabla 4.2.12

*Caso no homogéneo de no linealidad del material y no linealidad geométrica.
Tramo de subida (estable)*

P	α_1	α_2	α_3	α_4
0	0.0100103	0.0175170	0.0225208	0.0250226
50	0.0110571	0.0194722	0.0251406	0.0279924
100	0.0123754	0.0219369	0.0284462	0.0317417
150	0.0140873	0.0251409	0.0327474	0.0366228
200	0.0164024	0.0294777	0.0385737	0.0432375
250	0.0197109	0.0356800	0.0469116	0.0527070
300	0.0248379	0.0452940	0.0598405	0.0673942
350	0.0340149	0.0624561	0.0828939	0.0935718
360	0.0370895	0.0680991	0.0904190	0.1020935
364	0.0390397	0.0714976	0.0948684	0.1070972
$P_{\text{lim}} = 364.84$	0.0402380	0.0734030	0.0972780	0.1097723

Tabla 4.2.12

Para el problema no homogéneo de no linealidad del material y linealidad geométrica resolvemos el sistema (4.2.41) para $H = 10$ y para valores de P crecientes desde 0 hasta el valor de la carga límite que es ahora $P_{\text{lim}} = 363.82$ o sea ligeramente inferior a la del caso de no linealidad geométrica. En la tabla 4.2.13 se dan los valores de los ángulos $\alpha_i, i = 1, \dots, 4$ en función de la carga P . Como se puede apreciar los valores son prácticamente análogos a los del caso de no linealidad geométrica dados en la tabla 4.2.12, con una coincidencia hasta el segundo dígito significativo.

*Caso no homogéneo de no linealidad del material y linealidad geométrica.
Tramo de subida (estable)*

P	α_1	α_2	α_3	α_4
0	0.0100122	0.0175207	0.0225260	0.0250285
50	0.0110599	0.0194776	0.0251481	0.0280009
100	0.0123797	0.0219451	0.0284576	0.0317548
150	0.0140943	0.0251544	0.0327659	0.0366440
200	0.0164148	0.0295015	0.0386063	0.0432750
250	0.0197357	0.0357274	0.0469766	0.0527817
300	0.0248977	0.0454081	0.0599965	0.0675731
350	0.0342265	0.0628535	0.0834325	0.0941873
360	0.0374494	0.0687501	0.0912885	0.1030809
363	0.0390257	0.0714813	0.0948572	0.1070917
$P_{\text{lim}} = 363.82$	0.0403754	0.0736177	0.0975553	0.1100846

Tabla 4.2.13

Por otra parte en el caso de no linealidad geométrica se tiene además del tramo de subida, para el cual al aumentar la carga aumentan los ángulos, otro de bajada, para el que al disminuir la carga aumentan los ángulos, donde la carga alcanza un valor mínimo y de nuevo se tiene otro de subida en la que al aumentar la carga los ángulos (para cada ángulo) también aumentan. En resumen se pueden considerar en la gráfica carga giro dos tramos estables y uno inestable. En las tablas 4.2.14 y 4.2.15 se indican dichos tramos. El mínimo está ligeramente por debajo del valor 185 toneladas.

*Caso no homogéneo de no linealidad del material y no linealidad geométrica.
Tramo de bajada (inestable)*

P	α_1	α_2	α_3	α_4
363	0.0424955	0.0765455	0.101034	0.113843
362	0.0431459	0.0773836	0.101997	0.114871
360	0.0443117	0.0788511	0.103664	0.116638
350	0.0497295	0.0854663	0.111047	0.124403
300	0.0806458	0.1277378	0.157420	0.172801
250	0.1202232	0.2005830	0.236002	0.254167
200	0.2168598	0.3809105	0.461376	0.487048
190	0.2687683	0.4774238	0.589893	0.619610
186	0.3145400	0.5620027	0.701867	0.735066
185	0.3436007	0.6154367	0.772276	0.807667
184.86	0.3566516	0.6393631	0.803715	0.840100

Tabla 4.2.14

*Caso no homogéneo de no linealidad del material y no linealidad geométrica.
Segundo tramo de subida (estable)*

P	α_1	α_2	α_3	α_4
185	0.378568	0.679441	0.856251	0.894372
186	0.412354	0.740970	0.936615	0.978481
190	0.475531	0.855148	1.084763	1.141915
200	0.561774	1.008500	1.280620	1.358272
250	0.792588	1.400033	1.759313	1.874841
300	0.938881	1.629677	2.021457	2.147473
350	1.052676	1.796202	2.200674	2.328124
375	1.102068	1.864917	2.271618	2.398073

Tabla 4.2.15

A continuación damos en la tabla 4.2.16 los valores correspondientes al tramo de bajada del caso no homogéneo de no linealidad del material y linealidad geométrica. Dichos valores como se puede observar también son próximos, hasta los correspondientes a la carga de 190 toneladas, a los del caso de no linealidad geométrica.

*Caso no homogéneo de no linealidad del material y linealidad geométrica.
Tramo de bajada (inestable)*

P	α_1	α_2	α_3	α_4
363	0.0416623	0.0754466	0.099762	0.112487
362	0.0424411	0.0764827	0.100973	0.113788
360	0.0436824	0.0780721	0.102795	0.115728
350	0.0490678	0.0846756	0.110185	0.123510
300	0.0795574	0.1259043	0.155471	0.170803
250	0.1164653	0.1938696	0.228811	0.246763
200	0.1937748	0.3387891	0.406155	0.430218
190	0.2196376	0.3875332	0.471839	0.498062
180	0.2549787	0.4540451	0.561388	0.590555
160	0.3857884	0.6998228	0.891847	0.933385
150	0.5044233	0.9231476	1.193342	1.274559
146.57	0.5655298	1.0381311	1.348509	1.451210

Tabla 4.2.16

En la figura 4.2.40 se comparan gráficamente las trayectorias carga-giro correspondientes a los ángulos α_1 y α_4 de los casos linealidad del material y no linealidad geométrica (c1 y c4), y no linealidad del material y linealidad geométrica (b1 y b4) y no linealidad del material y no linealidad geométrica (a1 y a4).

Trayectorias carga-giro para los casos no homogéneos: a) No linealidad del material y no linealidad geométrica. b) No linealidad del material y linealidad geométrica y c) Linealidad del material y no linealidad geométrica.

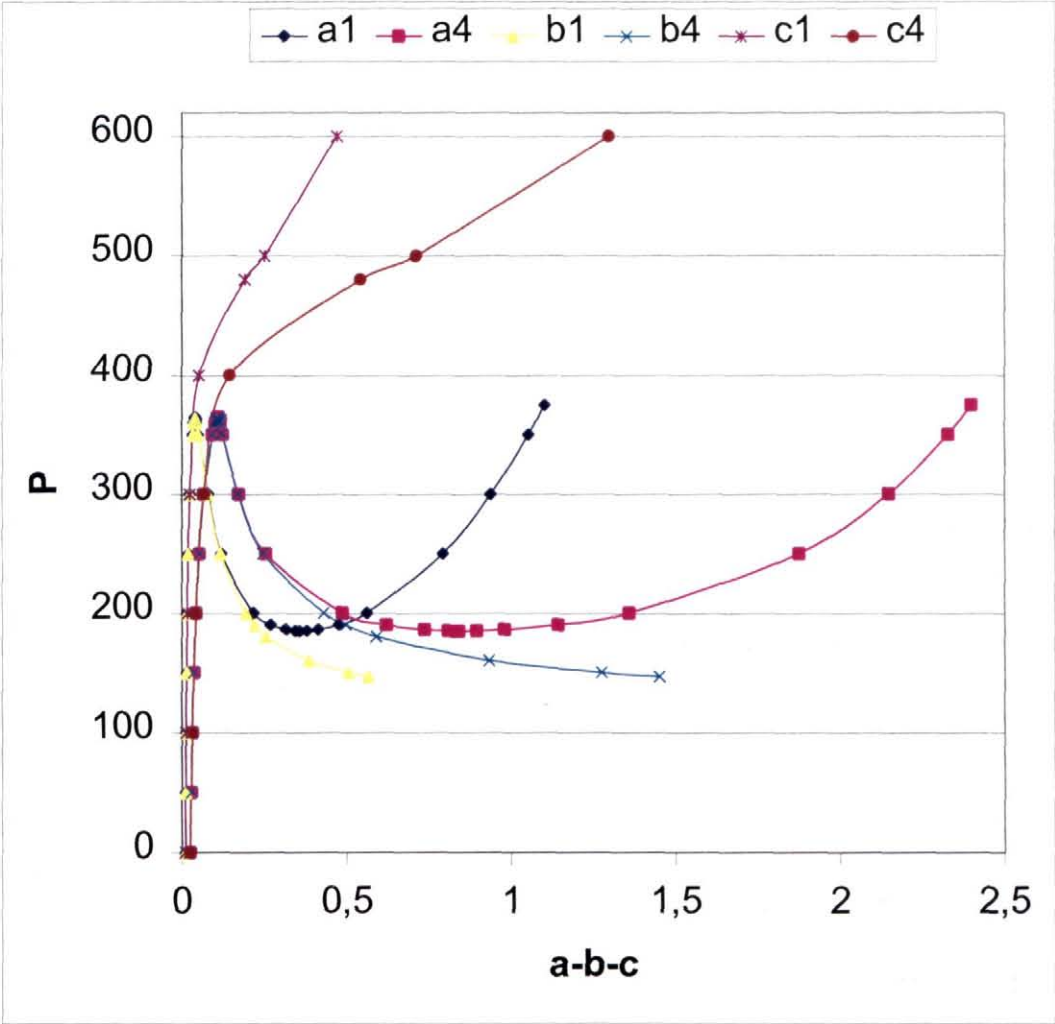


Figura 4.2.40

Por otra parte indicamos que la estabilidad puede analizarse en estos modelos discretos de varios grados de libertad de manera directa a partir de la matriz Hessiana de la energía potencial. Por ejemplo para el caso de no linealidad del material y no linealidad geométrica la estabilidad de las distintas configuraciones de equilibrio que se tienen pueden estudiarse a través del signo de la forma cuadrática asociada en este caso a la matriz (4.2.36). Veamos a modo ilustrativo las tres configuraciones de equilibrio para $P = 300$. La configuración correspondiente al primer tramo de subida viene dada por

P	α_1	α_2	α_3	α_4
300	0.0248379	0.0452940	0.0598405	0.0673942

La matriz Hessiana calculada mediante (4.2.36) es

$$\begin{bmatrix} 38315.042 & -19928.928 & & \\ -19928.928 & 38389.689 & -19956.959 & \\ & -19956.959 & 38435.214 & -19972.580 \\ & & -19972.580 & 18479.353 \end{bmatrix}$$

cuyos autovalores son 907.892, 18442.028, 45311.580 y 68957.917, es decir todos positivos, luego se trata de una configuración estable.

Para el tramo de bajada correspondiente a la configuración

P	α_1	α_2	α_3	α_4
300	0.0806458	0.1277378	0.157420	0.172801

la matriz Hessiana es

$$\begin{bmatrix} 9000425 & -5477.649 & & \\ -5477.649 & 23755.405 & -19759.166 & \\ & -19759.166 & 38239.721 & -19954.169 \\ & & -19954.169 & 18485.106 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de dicha matriz son -728.292, 8452.319, 22541.831 y 59214.799. La forma cuadrática asociada por tener autovalores positivos y negativos es indefinida y por tanto la configuración no es estable.

Para el segundo tramo de subida dado por

P	α_1	α_2	α_3	α_4
300	0.938881	1.629677	2.021457	2.147473

la matriz Hessiana es ahora

$$\begin{bmatrix} 9149.969 & -4997.846 & & \\ -4997.846 & 10134.028 & -4997.998 & \\ & -4997.998 & 10697.731 & -5001.385 \\ & & -5001.385 & 5861.159 \end{bmatrix}$$

Los autovalores: 1142.561, 5045.863, 11769.460 y 17885.003 son todos positivos y la configuración es estable.

4.2.5 Comentarios finales

Finalizamos este apartado 4.2 haciendo constar que con los modelos discretos expuestos se ha pretendido destacar ciertos aspectos del fenómeno de pandeo en régimen no lineal de una manera sencilla y directa y que no hemos contemplado en la amplia literatura consultada, al menos en la forma en que aquí se ha planteado.

El enfoque fundamentalmente conceptual constituye una introducción al problema continuo objeto de esta investigación y que se aborda a continuación en este mismo capítulo. También con los ejemplos numéricos se ha querido indicar la proximidad de resultados para los problemas de no linealidad del material entre los casos de linealidad y no linealidad geométrica, aunque no se ha querido por razones de extensión y objetivo realizar un estudio exhaustivo para justificar de manera rigurosa la proximidad señalada. Dicha proximidad se tiene fundamentalmente en el tramo de subida, alcanzándose cargas límites muy parecidas, con configuraciones de equilibrio similares.

También este desarrollo ha servido para poner de manifiesto la importancia que tiene la no linealidad del material en el fenómeno de pandeo, apareciendo de manera natural el concepto citado de carga límite. Dicha carga en algunos casos queda muy por debajo de la carga crítica, lo que justifica el estudio del problema de pandeo desde el enfoque no lineal y especialmente con no linealidad del material.

Finalmente la exposición ha servido para destacar también de forma sencilla cómo la no linealidad, particularmente, del material da lugar a la existencia de distintas configuraciones de equilibrio, unas estables y otras inestables. Este hecho se va a dar también en el problema continuo del pandeo de pilares que estudiamos en esta memoria.

4.3 PANDEO DE PILARES EN RÉGIMEN NO LINEAL EN EL CASO CONTINUO

El objetivo de este apartado y también el de los siguientes es el estudio del problema de pandeo en régimen no lineal en el caso continuo empleando la metodología de cálculo de los splines generalizados expuesta en el capítulo anterior. En primer lugar se desarrolla la formulación del problema, seguidamente se expone de manera esquemática la discretización del mismo mediante la teoría de elementos finitos, finalizando el desarrollo del apartado con unos comentarios sobre la no unicidad de solución del problema dependiendo de los valores de la carga axial sobre el pilar.

4.3.1 Formulación del problema de pandeo en régimen no lineal

La ecuación que se considera, como ya se expuso en el capítulo segundo es

$$\left[g(x, P, \chi(u)) \right]'' + Pu'' = f(x) \quad (4.3.1)$$

fundamentalmente para el caso donde la curvatura $\chi(u)$ se aproxima por la derivada segunda del desplazamiento, es decir se toma la curvatura linealizada, o sea $\chi(u) = u''$. La ecuación como se indicó resulta ahora no lineal debido al comportamiento del material pues de acuerdo con la aproximación realizada se tiene ahora linealidad geométrica en el problema.

Para la ecuación no lineal se considera un problema de contorno de n puntos, análogo al expuesto en el apartado 3.5 del capítulo tercero para el problema de pandeo en régimen lineal. Para ello se toma un dominio Ω formado por la unión de intervalos $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$ es decir

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n-1} [x_i, x_{i+1}] \quad (4.3.2)$$

La acción f en Ω es en general una función del espacio de Sobolev $H^{-2}(\Omega)$, es decir viene definida por la suma de una función continua a trozos y deltas de Dirac y Dipolos aplicadas tanto en algunos de los nodos $x_i, i = 1, \dots, n$ como en puntos interiores de los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$. Es decir viene definida mediante la acción conjunta de cargas repartidas y cargas puntuales y momentos.

Por otra parte la función g que, para cada sección de abscisa x y cada axil P , define la relación momento-curvatura, supondremos en las aplicaciones de este trabajo que en cada intervalo abierto (x_i, x_{i+1}) , $i = 1, \dots, n-1$ no depende de x , es decir se está considerando que las características mecánicas de la sección no se modifican dentro de cada intervalo, aunque pueda variar de unos intervalos a otros. Se supondrá además que fijadas la sección x y la carga P , la función depende de la curvatura χ de manera continua y derivable a trozos respecto de la curvatura, con derivada acotada en los puntos donde esté definida. Como se ha visto en el capítulo segundo en el apartado correspondiente a la superficie mecánica, la función es creciente con derivada decreciente respecto a dicha variable (cuando nos referimos al semieje de curvaturas positivas).

En la mayor parte de las aplicaciones se indicará que dicha dependencia viene dada por una poligonal, o más técnicamente, por una función spline de primer grado, es decir por una función continua y polinómica a trozos definida mediante polinomios de grado menor o igual que uno. La gráfica de $M = g(x, P, \chi(u))$ para x y P dados, es decir $M = M(\chi)$ tiene el aspecto que se indica en (a) y (b) de la figura 4.3.1, es decir la gráfica pasa por el origen siendo creciente con derivada creciente para las curvaturas negativas y creciente con derivada decreciente para las curvaturas positivas.

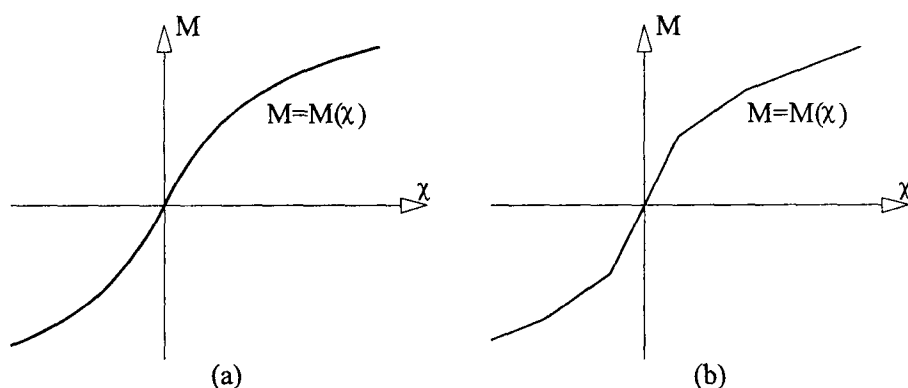


Figura 4.3.1

Además se supondrá también que el axil P no varía en cada intervalo, pero puede tomar diferentes valores en los distintos intervalos. Se puede indicar por tanto que el axil P en el interior de $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$ tiene el valor P_i . De esta forma quedan definidos todos los términos de la ecuación diferencial no lineal que rige el fenómeno.

Por otra parte las condiciones de contorno son análogas a las del problema de pandeo en régimen lineal. Las esenciales equivalen a fijar condiciones de interpolación de Hermite-Birkoff dando los valores del desplazamiento y/o la primera derivada de éste en algunos nodos. Es decir se fijan los valores, de acuerdo con la notación introducida en los apartados 3.4 y 3.5 del capítulo tercero, de las formas lineales

$$l_{ij}(u) = u^{(j-1)}(x_i) \quad (4.3.3)$$

en algunos nodos, es decir se conocen los valores

$$l_{ij}(u) = u^{(j-1)}(x_i) = r_{ij}^* \quad (4.3.4)$$

para

$$(i, j) \in J_p \subset \{1, \dots, n\} \times \{1, 2\} \quad (4.3.5)$$

Asimismo se conocen de forma complementaria los valores de las acciones nodales, dadas mediante las formas lineales

$$\bar{l}_{ij}(u) = Q_{ij}^{c*} \quad (4.3.6)$$

para

$$(i, j) \in J_s = \{1, \dots, n\} \times \{1, 2\} - J_p \quad (4.3.7)$$

donde $\bar{l}_{ij}, j = 1, 2$ corresponden a los operadores relativos a la carga puntual y al momento exterior aplicadas en el nodo x_i . Es decir

$$\begin{aligned} \bar{l}_{i1}(u) &= Q_{i1}^C = \\ &= -[g(x, P_{i-1}, \chi(u))]' \Big|_{x_i^-} - P_{i-1} u'(x_i) + \\ &+ [g(x, P_i, \chi(u))]' \Big|_{x_i^+} + P_i u'(x_i) \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

corresponden a la carga puntual y

$$\begin{aligned} \bar{l}_{i2}(u) &= Q_{i2}^C = \\ &= g(x_i^-, P_{i-1}, \chi_i^-) - g(x_i^+, P_i, \chi_i^+) \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

al momento puntual, donde $\chi_i^- = \chi(u) \Big|_{x_i^-}$ y $\chi_i^+ = \chi(u) \Big|_{x_i^+}$ representan la curvatura de la deformada $u(x)$ en el nodo x_i por la izquierda y derecha respectivamente.

Debe observarse que los datos de desplazamientos y giros conocidos y a su vez los de acciones puntuales conocidas se fijan de forma complementaria en el sentido de que la unión de los conjuntos J_p y J_s determina el conjunto $\{1, \dots, n\} \times \{1, 2\}$.

En definitiva el problema de contorno definido consiste en determinar la función $u(x)$ (deformada) en el espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$ que verifica $l_{ij}(u) = r_{ij}^*, (i, j) \in J_p$ es decir

$$u \in U = \{h \in H^2(\Omega), l_{ij}(u) = r_{ij}^*, (i, j) \in J_p\} \quad (4.3.10)$$

donde la función u satisface la ecuación variacional

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x, P_i, \chi(u)) v'' dx + \sum_{i=1}^{n-1} (-P_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} u' v' dx = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f v dx + \sum_{(i,j) \in J_s} Q_{ij}^{C*} v^{(j-1)}(x_i) \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

para toda función v perteneciente al espacio vectorial

$$V = \{h \in H^2(\Omega), l_{ij}(v) = 0, (i, j) \in J_p\} \quad (4.3.12)$$

donde para la parte correspondiente de f en cada $(x_i, x_{i+1}), i = 1, \dots, n-1$ dada mediante una carga puntual $F_\alpha \delta(x - \alpha)$ o momento $M_\beta (-\delta'(x - \beta))$ se debe tener en cuenta que

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} F_\alpha \delta(x - \alpha) v(x) dx = F_\alpha v(\alpha) \quad (4.3.13)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} M_\beta (-\delta'(x - \beta)) v(x) dx = M_\beta v'(\beta)$$

Se debe exigir que las condiciones dadas en el problema de contorno anterior garanticen la existencia y unicidad de la solución para el caso de problema de pandeo en régimen lineal, donde la función g es de la forma

$$g(x, P_i, \chi(u)) = A_i u''(x) \quad (4.3.14)$$

en cada $(x_i, x_{i+1}), i = 1, \dots, n-1$ con A_i (rigidez) > 0 .

Obsérvese que en [RoO99] y en este trabajo las condiciones que garantizan la unicidad para el correspondiente problema lineal se han dado (véase apartado 3.4) a partir de la regularidad de cierta matriz \mathbf{K}_{ss} y no como es usual en la teoría de elementos finitos como aplicación del teorema de Lax-Milgram [Red91], [BrS94], [Ros85] que exige como hipótesis la continuidad y el carácter elíptico de la forma bilineal. Estas condiciones se verifican de forma inmediata para la viga-columna con elementos sometidos a flexión o flexión y tracción pero no cuando la pieza tiene elementos a flexión y compresión en configuraciones de equilibrio inestable.

En el correspondiente problema no lineal dado por la ecuación (4.3.1) puede haber, por la propia naturaleza de la no linealidad, más de una solución. Este hecho se ha introducido en este capítulo mediante el estudio de algunos modelos discretos, donde se ha puesto de manifiesto la existencia de diversas configuraciones de equilibrio (véanse los ejemplos de los puntos 4.2.3 y 4.2.4).

4.3.2 Discretización mediante elementos finitos

La discretización por elementos finitos de este problema no lineal puede abordarse como se ha expuesto para los problemas lineales en los apartados 3.4 y 3.5 del capítulo anterior, pero no empleando necesariamente splines generalizados. A continuación exponemos de forma muy esquemática el proceso de discretización.

Para cada elemento $(x_i, x_{i+1}), i = 1, \dots, n-1$ se tiene integrando por partes ambos miembros de (4.3.1) después de multiplicar por v

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} [g(x, P_i, \chi(u)) v'' - P_i u' v'] dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f v dx + \sum_{\alpha=1}^4 l_\alpha(v) q_\alpha^C \quad (4.3.15)$$

donde

$$\begin{aligned} l_1(v) &= v(x_i^+), \quad l_2(v) = v'(x_i^+), \quad l_3(v) = v(x_{i+1}^-), \quad l_4(v) = v'(x_{i+1}^-) \\ q_1^C &= (g' + P_i u') \Big|_{x_i^+}, \quad q_2^C = -g \Big|_{x_i^+}, \quad q_3^C = -(g' + P_i u') \Big|_{x_{i+1}^-}, \quad q_4^C = g \Big|_{x_{i+1}^-} \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

Considerando ahora la función

$$\bar{g}(x, P_i, \chi(u)) = g(x, P_i, \chi(u)) / u'' \quad (4.3.17)$$

en el primer miembro de la expresión (4.3.15) resulta

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} [\bar{g}(x, P_i, \chi(u)) u'' v'' - P_i u' v'] dx \quad (4.3.18)$$

Obsérvese que

$$\bar{g}(x, P_i, \chi(u))$$

representa, cuando la curvatura es $\chi(u) = u''$, la rigidez en la sección x dada por la pendiente de la secante que une el punto $(0,0)$ con el punto $(u'', g(u''))$ tal y como se indica en la figura 4.3.2

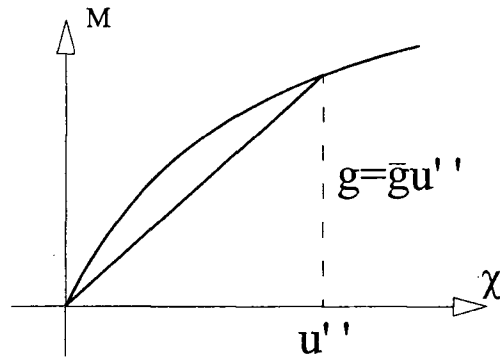


Figura 4.3.2

Tomando ahora para el elemento la base de funciones de forma

$$\{N_i(x), i = 1, \dots, 4\}$$

verificando

$$l_i(N_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 4$$

donde dichas funciones pueden pertenecer al espacio de polinomios de grado menor o igual que tres, se puede determinar en la forma usual la matriz de rigidez y el vector de cargas nodales equivalentes para cada elemento. O sea

$$\begin{aligned} k_{\alpha\beta}(u) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} [\bar{g}(x, P_i, \chi(u)) N_\alpha'' N_\beta'' - P_i N_\alpha' N_\beta'] dx \\ \alpha, \beta &= 1, \dots, 4 \\ f_\alpha &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) N_\alpha(x) dx \\ \alpha &= 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

Ensamblando las correspondientes matrices elementales en la forma correspondiente se obtiene la ecuación de equilibrio global

$$\mathbf{K}(u)\mathbf{u} = \mathbf{F} + \mathbf{Q}^c \quad (4.3.20)$$

Después de considerar los datos para las condiciones de contorno esenciales y naturales y reordenar en la forma usual filas y columnas queda el sistema reducido que permite obtener las incógnitas relativas a las condiciones esenciales

$$\mathbf{K}_{ss}(u)\mathbf{u}_s = \mathbf{F}_s + \mathbf{Q}_s^c - \mathbf{K}_{sp}(u)\mathbf{u}_p^* \quad (4.3.21)$$

donde el vector \mathbf{u}_s representa los desplazamientos y giros desconocidos, siendo \mathbf{K}_{ss} por hipótesis una matriz regular.

En este caso de problema no lineal, donde además las funciones de forma no son splines generalizados, las soluciones nodales obviamente no son exactas por lo que las cargas nodales de equilibrio que son incógnitas y que una vez determinado el vector \mathbf{u}_s pasan a ser conocidas mediante la relación

$$\mathbf{Q}_p^c = \mathbf{K}_{pp}(u)\mathbf{u}_p^* + \mathbf{K}_{ps}(u)\mathbf{u}_s \quad (4.3.22)$$

tampoco serán exactas como ocurría en los problemas lineales cuando se emplean splines generalizados.

Obsérvese que el procedimiento requiere partir de una solución $u_0(x)$, que se irá modificando sucesivamente mediante un proceso iterativo. Dicha solución inicial puede ser la de un problema lineal con las mismas condiciones esenciales y naturales que el no lineal, tomando como rigidez, en cada intervalo una función $A_i(x)$ de modo que se tenga la aproximación

$$g(x, P_i, \chi(u)) \approx A_i(x)u'' \quad (4.3.23)$$

Si como venimos suponiendo g no depende de x en cada intervalo, A_i es constante y podría ser el valor de $\partial g / \partial \chi$ para cierta χ tal y como se indica en la figura 4.3.3

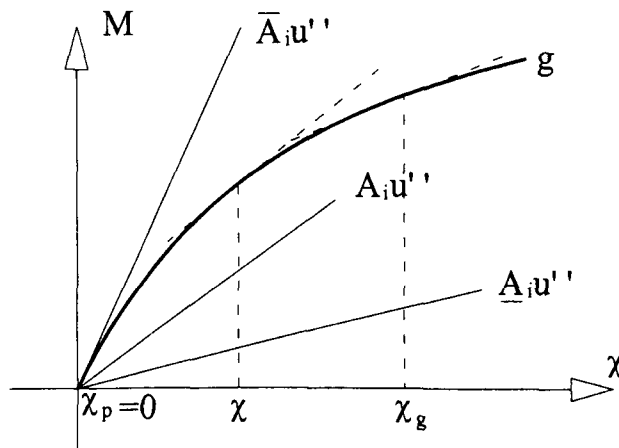


Figura 4.3.3

En esta investigación con una metodología algo diferente a la que se expone en este punto, se van a emplear valores A_i grandes que se pueden obtener de $\partial g / \partial \chi$ para valores pequeños de la curvatura χ .

Puede comprobarse que dependiendo del rango de valores del axil P y de las rigideces A_i consideradas se pueden obtener distintas soluciones estables e inestables del problema.

Asimismo otra vía de resolución del problema es aplicar a la ecuación (4.3.21) el método de Newton-Raphson aunque para estos casos el procedimiento resulta muy laborioso al requerir las derivadas de los elementos de las matrices \mathbf{K}_{ss} y \mathbf{K}_{sp} que dependen a su vez de la solución u .

4.3.3 Comentarios sobre la no unicidad de solución del problema

Hasta ahora se ha venido indicando que el problema no lineal de pandeo puede tener más de una solución. De hecho este aspecto de gran interés se ha introducido en este trabajo a partir de modelos discretos los cuales han pretendido poner este hecho de manifiesto.

Sin embargo el estudio teórico para el caso continuo requiere cierta fundamentación del problema dentro del área del análisis funcional no lineal y de la teoría de la bifurcación. Nos remitimos a las diferentes referencias que en este sentido se han dado en los apartados 2.2 y 2.3 del capítulo segundo.

Damos a continuación un pequeño apunte del proceso de iteración, antes indicado en el método de elementos finitos, ahora para el problema continuo. Dicho proceso guarda gran relación con los métodos de iteración monótona empleados en el análisis de problemas no lineales (véase por ejemplo [Sta79,p.608]).

Supongamos por ejemplo un caso con condiciones esenciales y naturales homogéneas. El problema no lineal puede ponerse en la forma

$$(A(x)u'')'' + Pu'' = f(x) + (A(x)u'')'' - [g(x, P, \chi(u))]'' \quad (4.3.24)$$

y la solución que expresamos formalmente mediante la función de Green correspondiente al problema lineal cuyo operador es

$$L(u) = (A(x)u'')'' + Pu'' \quad (4.3.25)$$

verificará

$$u(x) = \int_{x_1}^{x_n} G(x, t) [f(t) + (A(t)u'')'' - (g(t, P, \chi(u)))''] dt \quad (4.3.26)$$

y el proceso iterativo que indicamos es desde este enfoque para la determinación de las soluciones exactas del problema

$$u_{m+1}(x) = \int_{x_1}^{x_n} G(x, t) [f(t) + (A(t)u_m'')'' - (g(t, P, \chi(u_m)))''] dt \quad (4.3.27)$$

El proceso descrito se puede escribir mediante un operador T que viene definido por el segundo miembro de la expresión anterior

$$u_{m+1} = T(u_m) \quad (4.3.28)$$

La función con la que se arrancarí el método podría ser por ejemplo la función $u_0(x)$ solución del problema lineal $L(u) = f$ con las mismas condiciones de contorno que el no lineal.

Las distintas soluciones del problema no lineal serían puntos fijos del operador T que actúa en el espacio $H^2(\Omega)$.

Desde el punto de vista matemático habría que analizar, cuales son las funciones $A(x)$ que conviene considerar, de modo que la aplicación T sea una contracción o al menos genere sucesiones convergentes en ciertos subconjuntos de $H^2(\Omega)$.

Estos aspectos que requieren cierto grado de formalización desde un planteamiento teórico, se van a abordar en esta investigación enfocando el cálculo de las posibles soluciones desde un punto de vista más ingenieril a través de una analogía entre el problema no lineal y el problema lineal, tal y como se expone en el apartado siguiente.

4.4 PILAR LINEAL EQUIVALENTE

En este apartado se supone que la ley momento-curvatura para la viga-columna viene dada por una función cuya gráfica es una poligonal. También que dicha ley para cada carga P en cada elemento $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$ de la pieza, es independiente de la variable x , y asimismo que la curvatura se aproxima mediante la derivada segunda del desplazamiento, es decir se considera $\chi(u) = u''$. El proceso que sigue a continuación se basa en el análisis de distintos casos de piezas isostáticas donde la ley de curvaturas en la pieza puede ser monótona o no, posteriormente los resultados se generalizan a cualquier pieza isostática o hiperestática incluso con discontinuidades en la curvatura de la pieza, como sucede cuando hay momentos exteriores, cambios en el axil o en las dimensiones de la sección, al pasar de unos elementos a otros.

4.4.1 Introducción

Supongamos en primer lugar el caso de una pieza de longitud l empotrada en la base y libre en el extremo superior sometida a las acciones que se indican en la figura 4.4.1

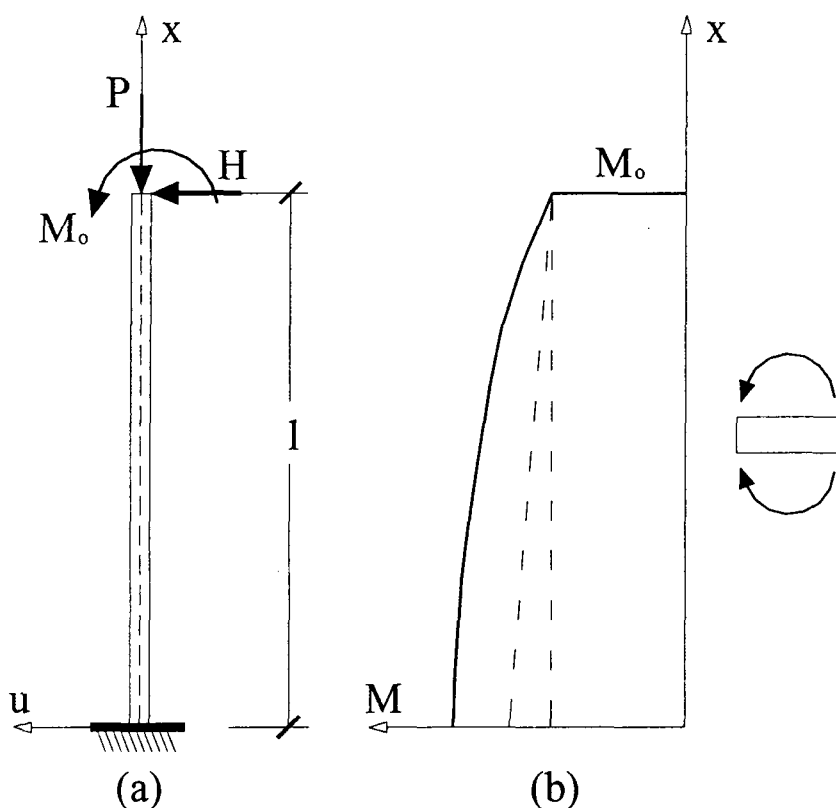


Figura 4.4.1

La ley momento curvatura (véase la figura 4.4.2), limitándonos al semieje de curvaturas positivas, es trilineal. Suponemos además que dicha ley es la misma para todas las secciones de la pieza. Es decir la función g no depende de la variable x en toda la longitud.

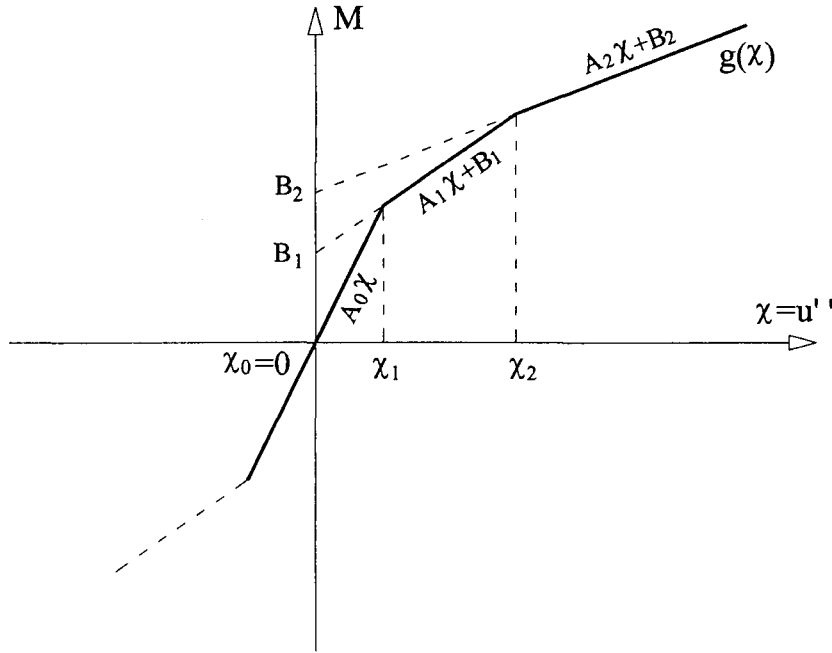


Figura 4.4.2

La definición de g es

$$g(\chi) = \begin{cases} A_0\chi, & \chi \in [0, \chi_1) \\ A_1\chi + B_1, & \chi \in [\chi_1, \chi_2) \\ A_2\chi + B_2, & \chi > \chi_2 \end{cases} \quad (4.4.1)$$

Por el estado de cargas de acuerdo con la orientación de los ejes la curvatura es positiva en todos los puntos de la pieza. En la figura 4.4.1 se ha indicado el aspecto de la ley de momentos flectores es decir de manera cualitativa pues la determinación exacta de la misma dependerá de la deformada final.

Supongamos que el momento M_0 determina una curvatura en el extremo superior de la pieza tal que

$$0 < M_0 < g(\chi_1) \quad (4.4.2)$$

y que la acción conjunta de M_0 y H sin incluir el efecto del momento producido por la carga axial P es tal que

$$M_0 + Hl > g(\chi_2) \quad (4.4.3)$$

Por otra parte al ser los momentos flectores crecientes del extremo superior al inferior de la ménsula (véase la ley de flectores en la figura 4.4.1), también lo es de manera correlativa la curvatura.

Se tiene en base a lo anterior que la curvatura en el nodo x_1 es $c_1 > \chi_2$ y que hay dos nodos intermedios x_2 y x_3 que verifican que sus curvaturas son $c_2 = \chi_2$ y $c_3 = \chi_1$ y que en el extremo superior del pilar, nodo x_4 , por lo indicado antes la curvatura es

$c_4 \in (0, \chi_1)$. En definitiva las curvaturas en los nodos para este caso decrecen de manera monótona donde

$$\begin{aligned} c_i &= \chi(u(x_i)) = u''(x_i) \\ i &= 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

En la figura 4.4.3 se han dibujado simultáneamente las gráficas de la ley de momentos flectores y la de la relación momento-curvatura, pudiendo observarse la correspondencia entre los nodos de la pieza y sus curvaturas. La posición estimada de los nodos (intermedios) viene dada teniendo en cuenta el diagrama momento-curvatura y el aspecto aproximado de la ley de flectores (ya que desde el punto de vista cuantitativo dicha ley es desconocida)

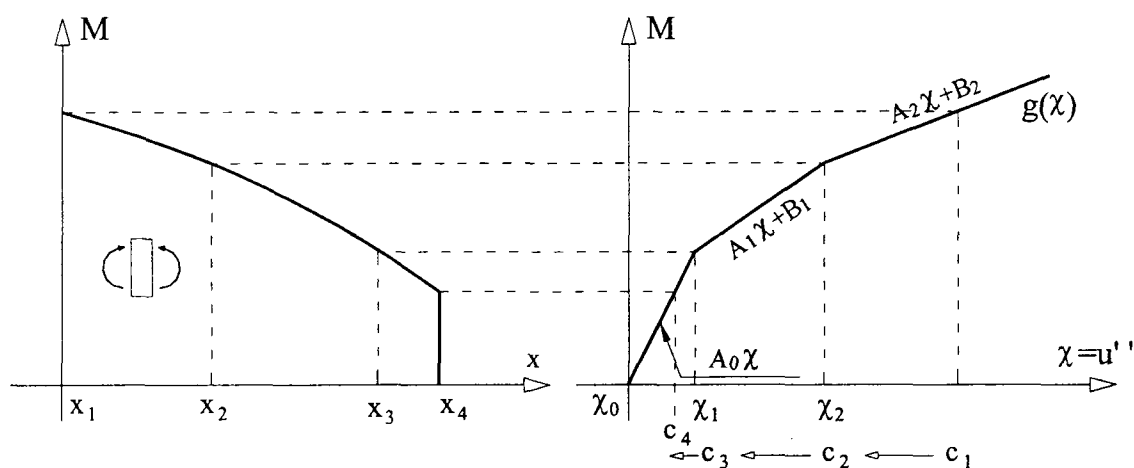


Figura 4.4.3

Por otra parte en la figura 4.4.4 se ha dibujado el pilar en el estado deformado indicando las curvaturas $c_i, i = 1, \dots, 4$ al lado de los correspondientes nodos.

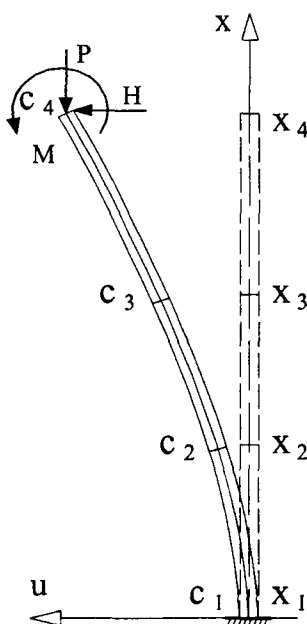


Figura 4.4.4

La ecuación diferencial que verifican los distintos tramos del pilar de acuerdo con la información anterior es

$$\begin{aligned}(A_2 u'' + B_2)'' + P u'' &= 0, & x \in (x_1, x_2) \\ (A_1 u'' + B_1)'' + P u'' &= 0, & x \in (x_2, x_3) \\ (A_0 u'')'' + P u'' &= 0, & x \in (x_3, x_4)\end{aligned}\quad (4.4.5)$$

En resumen se verifica la ecuación diferencial $A_2 u^{(4)} + P u^{(2)} = 0$ en (x_1, x_2) , de la misma forma $A_1 u^{(4)} + P u^{(2)} = 0$ en (x_1, x_2) y $A_0 u^{(4)} + P u^{(2)} = 0$ en (x_3, x_4) . Además en los nodos hay continuidad en la ley de momentos flectores ya que no hay aplicado ningún momento exterior en los puntos intermedios de la directriz de la pieza, por tanto

$$\begin{aligned}(A_2 u'' + B_2) \Big|_{x_2^-} &= (A_1 u'' + B_1) \Big|_{x_2^+} \\ (A_1 u'' + B_1) \Big|_{x_3^-} &= (A_0 u'') \Big|_{x_3^+}\end{aligned}\quad (4.4.6)$$

Al haber continuidad en la ley de momentos también la hay en las curvaturas en este caso donde la ley no se modifica al variar la abscisa x en la directriz de la pieza. Por tanto en los nodos x_2 y x_3 se verifica

$$\begin{aligned}u''(x_2^-) &= u''(x_2^+) = u''(x_2) = \chi_2 \\ u''(x_3^-) &= u''(x_3^+) = u''(x_3) = \chi_1\end{aligned}\quad (4.4.7)$$

De acuerdo con lo anterior la ecuación diferencial del problema corresponde a la de un pilar en régimen lineal cuyas rigideces en los distintos tramos son: A_2 en (x_1, x_2) , A_1 en (x_2, x_3) y A_0 en (x_3, x_4) . El pilar en la posición deformada puede representarse tal y como se indica en la figura 4.4.5, donde para que se tenga además la equivalencia en deformada con el pilar en régimen no lineal, hay que aplicarle en los nodos x_2 y x_3 unos momentos ficticios cuyos valores son respectivamente

$$\begin{aligned}M_2 &= A_2 u''(x_2^-) - A_1 u''(x_2^+) = (A_2 - A_1) u''(x_2) = (A_2 - A_1) \chi_2 = B_1 - B_2 \\ M_3 &= A_1 u''(x_3^-) - A_0 u''(x_3^+) = (A_1 - A_0) u''(x_3) = (A_1 - A_0) \chi_1 = -B_1\end{aligned}\quad (4.4.8)$$

Dichos momentos en este caso concreto son negativos y tienen por tanto sentido contrario al dibujado, pues $A_2 < A_1$ y $A_1 < A_0$ con las curvaturas χ_1 y χ_2 positivas.

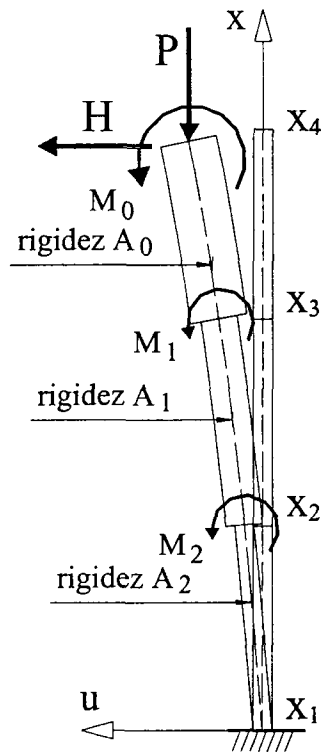
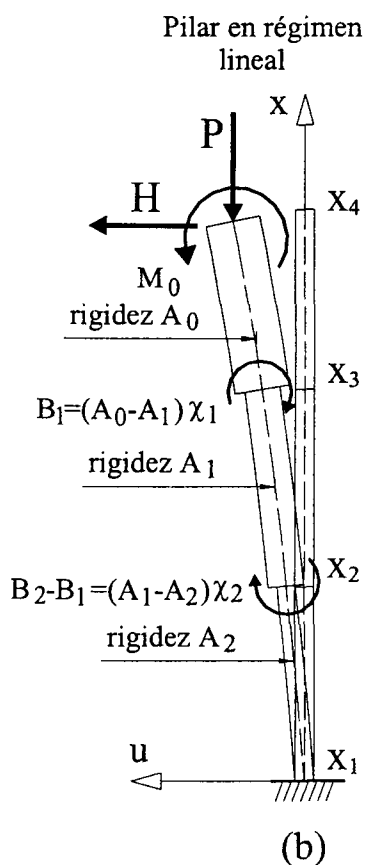
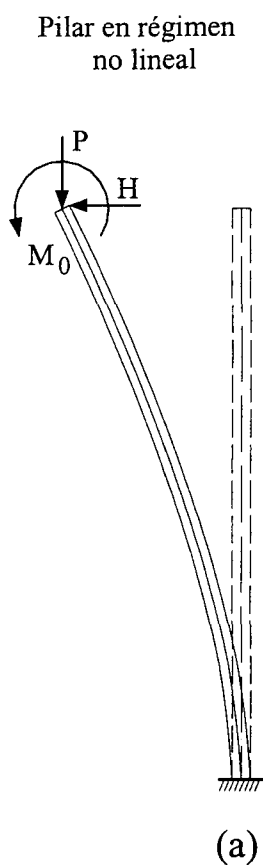


Figura 4.4.5

En resumen ambos pilares tienen la misma deformada pudiendo establecer la analogía que se indica en la figura 4.4.6, donde al pilar en régimen lineal podemos denominarlo como pilar lineal equivalente



Ecuación diferencial

$$[g(P, u'')]'' + Pu'' = 0$$

Condiciones de contorno

$$u(0) = 0$$

$$u'(0) = 0$$

$$-(g(P, u''))'|_{x_4} - Pu'(x_4) = H$$

$$g(P, u'')|_{x_4} = M_0$$

Ecuación diferencial

$$A_2 u^{(4)} + Pu^{(2)} = 0, \quad x \in (x_1, x_2)$$

$$A_1 u^{(4)} + Pu^{(2)} = 0, \quad x \in (x_2, x_3)$$

$$A_0 u^{(4)} + Pu^{(2)} = 0, \quad x \in (x_3, x_4)$$

Condiciones de contorno

$$u(0) = 0$$

$$u'(0) = 0$$

$$A_2 u''(x_2^-) - A_1 u''(x_2^+) = M_2$$

$$A_1 u''(x_3^-) - A_0 u''(x_3^+) = M_3$$

$$-A_0 u'''(x_4) - Pu'(x_4) = H$$

$$A_0 u''(x_4) = M_0$$

Figura 4.4.6

Para el pilar no lineal se puede interpretar que la rigidez en cada sección del pilar depende de la solución $u(x)$. Siendo la rigidez secante

$$\bar{g}(u'') = g(P, u'') / u''$$

La gráfica de la rigidez en función de la curvatura puede verse en la figura 4.4.7

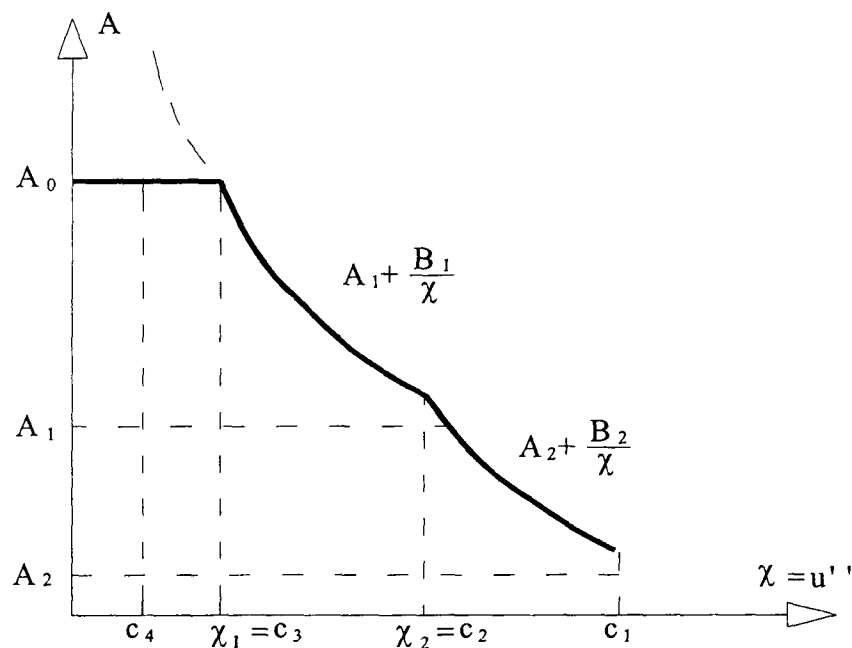


Figura 4.4.7

Esto permite interpretar para el pilar en régimen no lineal que tiene una variación continua de la rigidez: aumentando desde x_1 hasta x_3 con dos leyes distintas y constante desde x_3 hasta x_4 como se indica en la figura 4.4.8

Nótese que el valor mínimo que puede alcanzar la rigidez para la zona de mayor curvatura del pilar que es la del nodo x_1 , es siempre mayor que A_2 .

En el desarrollo seguido el único inconveniente es que la posición de los nodos x_2 y x_3 , como se ha indicado, resulta desconocida. En el apartado siguiente se verá que dichos valores se pueden determinar mediante la resolución de un sistema no lineal de ecuaciones.

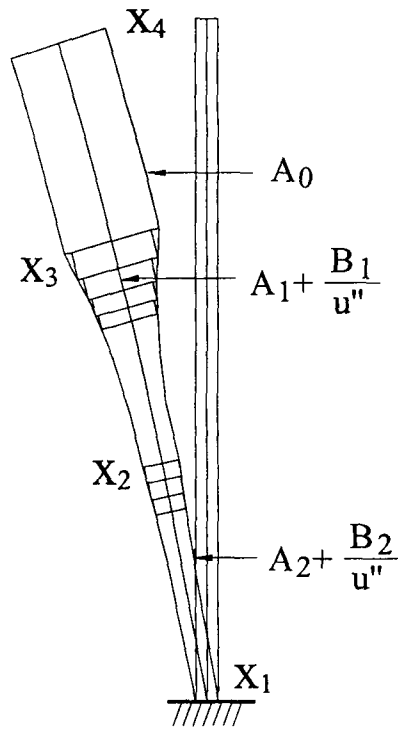


Figura 4.4.8

En el ejemplo anterior se ha visto que el crecimiento de la curvatura desde el extremo superior hasta la base del pilar era monótono, sin embargo dicha condición no es necesaria para establecer la equivalencia entre el problema no lineal y el lineal. En efecto consideremos una pieza biarticulada sometida a las acciones que se indican en la figura 4.4.9 donde se esquematiza en (a) la deformada de la pieza y en (b) la ley de flectores

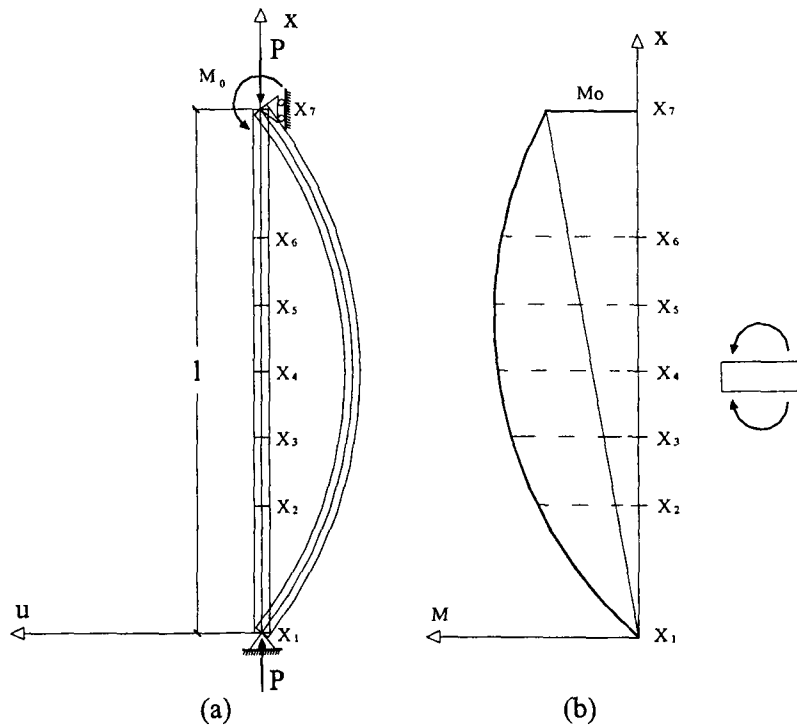


Figura 4.4.9

El diagrama momento-curvatura es el trilineal de la figura 4.4.10. Supongamos que el momento M_0 es menor que $g(\chi_1)$ y que la carga P es suficientemente grande de modo que la ley de flectores tenga el aspecto indicado en la figura 4.4.9 (b), es decir los momentos crezcan a partir del valor cero en la articulación situada en la base del pilar, alcanzando el valor máximo en un punto intermedio x_4 con un momento en dicho punto superior al valor $g(\chi_2)$. A partir de dicho nodo los momentos decrecen alcanzando en el extremo superior del pilar, nodo x_7 , el valor M_0 . Los nodos x_2 y x_6 se corresponden como puede verse en la figura 4.4.10, donde se representa simultáneamente la ley de flectores y el diagrama momento-curvatura, con la curvatura χ_1 y asimismo x_3 y x_5 con la curvatura χ_2 . En la misma figura se indica debajo del eje del diagrama momento-curvatura, la sucesión de valores $c_i, i = 1, \dots, 7$ donde

$$\begin{aligned} c_i &= \chi(u(x_i)) \\ i &= 1, \dots, 7 \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

que crece desde c_1 hasta c_4 , decreciendo después hasta el valor c_7 .

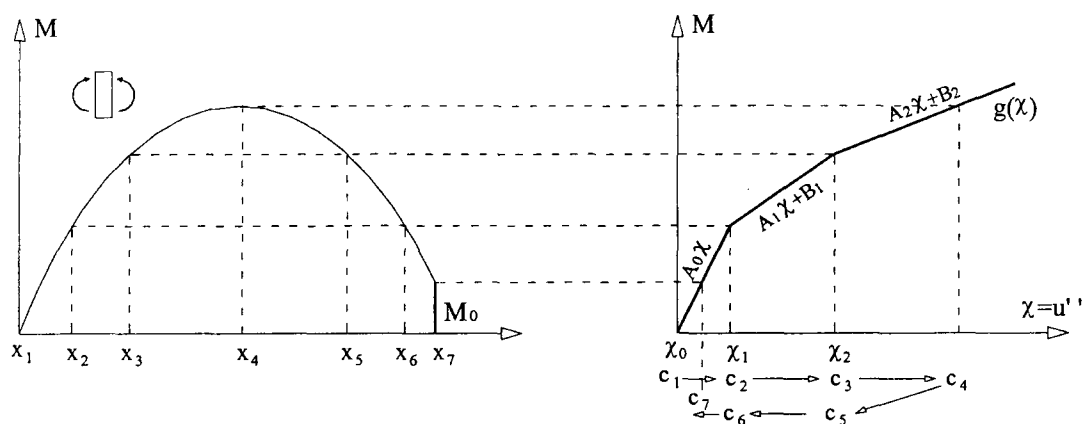


Figura 4.4.10

La ecuación diferencial que verifica la deformada de la pieza es

$$\begin{aligned} A_0 u^{(4)} + P u^{(2)} &= 0, & x \in (x_1, x_2) \cup (x_6, x_7) \\ A_1 u^{(4)} + P u^{(2)} &= 0, & x \in (x_2, x_3) \cup (x_5, x_6) \\ A_2 u^{(4)} + P u^{(2)} &= 0, & x \in (x_3, x_4] \cup (x_4, x_5) = (x_3, x_5) \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Lo anterior equivale a una pieza en régimen elástico lineal, que denominamos, como antes, con el término de pilar lineal equivalente. Las rigideces de los distintos tramos y los momentos en los nodos intermedios se indican en la figura 4.4.11. De nuevo como en el caso anterior la posición de los nodos intermedios o equivalentemente la longitud de los distintos tramos es desconocida. También, aunque se conoce el aspecto de la ley de flectores, ésta es desconocida de manera cuantitativa.

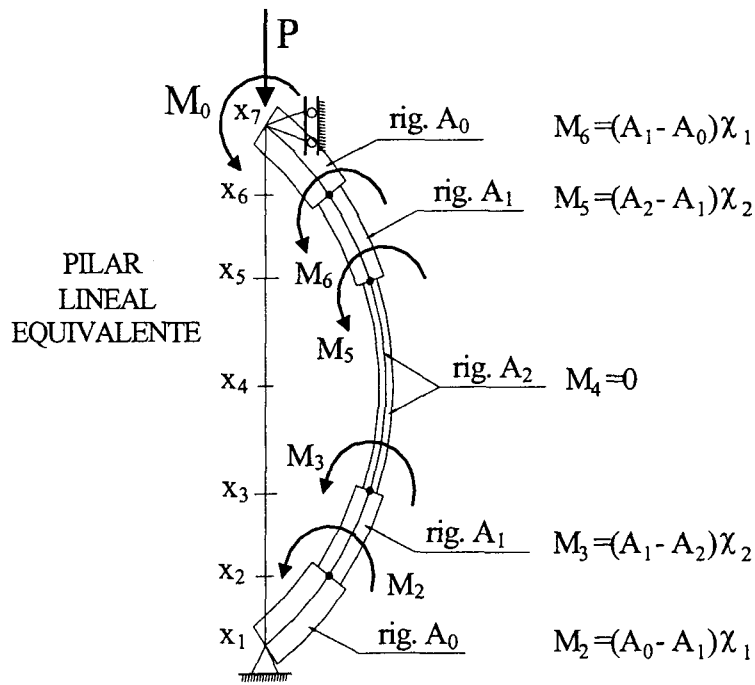


Figura 4.4.11

Para este caso también podría ocurrir que para valores de la carga P pequeños, los momentos flectores en todos los puntos no superaran el valor $g(\chi_1)$ en cuyo caso el problema se podría resolver directamente en régimen lineal. Por otra parte también podría darse la situación de que el momento máximo se situara entre $g(\chi_1)$ y $g(\chi_2)$. En este caso la analogía vendría dada por el esquema de la figura 4.4.12 donde ahora los valores desconocidos son x_2 y x_4 , no interesando la posición del nodo x_3 . Es decir los elementos adyacentes al nodo x_3 pasan a ser un único elemento con curvaturas comprendidas entre χ_1 y χ_2

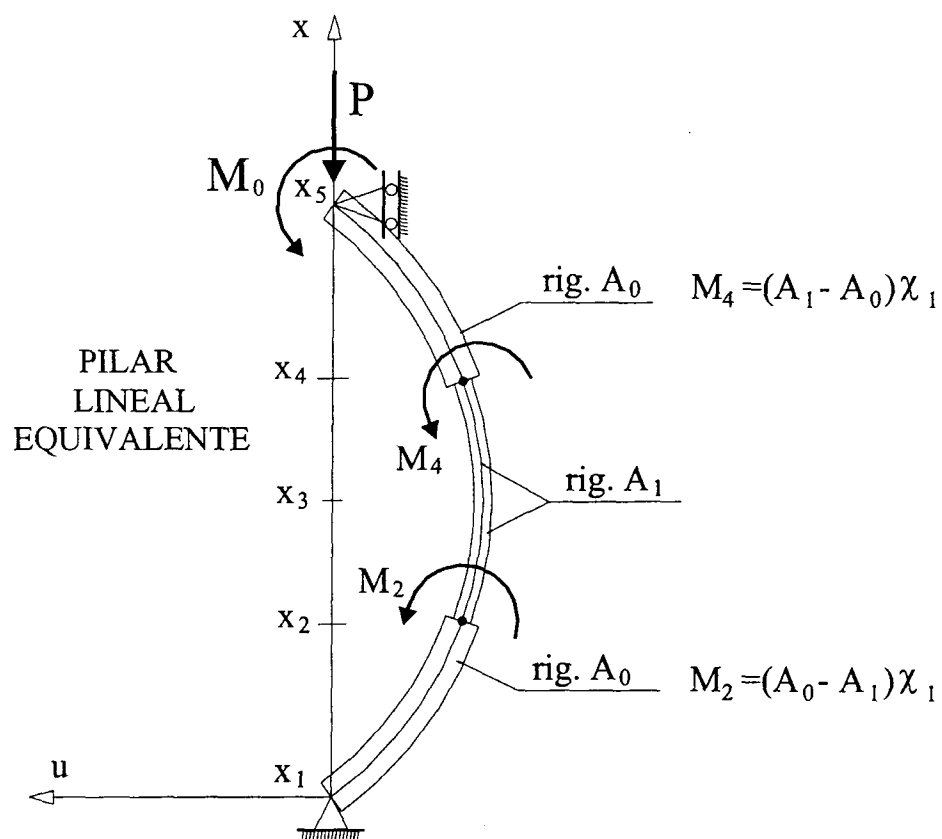
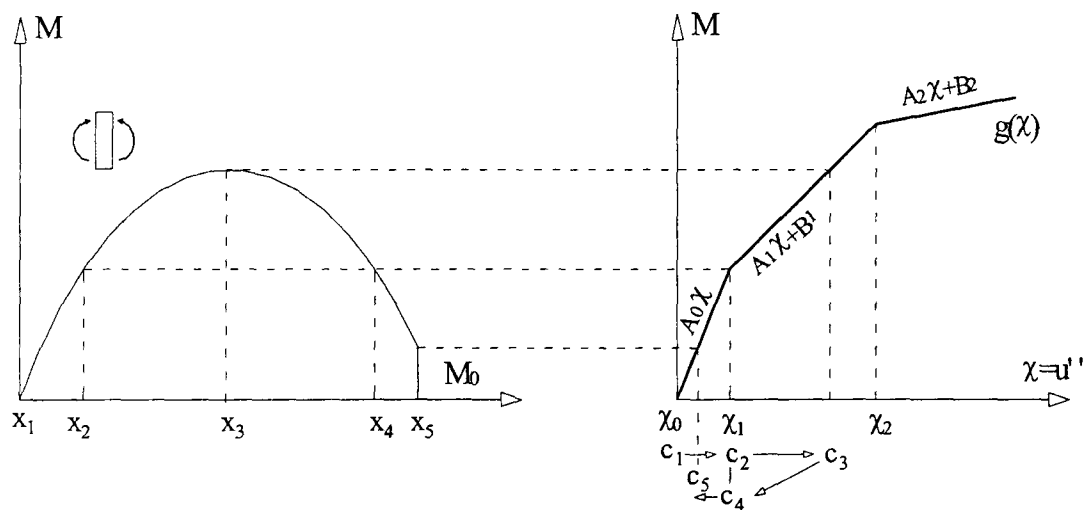


Figura 4.4.12

4.4.2 Teorema de equivalencia

En la introducción realizada se han expuesto dos ejemplos de tipo isostático con leyes de curvatura en la pieza, en un caso monótona y en el otro no monótona, además se ha supuesto que no había cambio en el axil ni en las características de la sección a lo largo de la directriz.

Supongamos ahora un problema de carácter general donde la única limitación que imponemos es que las leyes momento curvatura vienen definidas en la forma usual por funciones crecientes cuyas gráficas son poligonales.

Supongamos que se ha determinado una solución $u(x)$ (puede haber más de una) del correspondiente problema de contorno no lineal definido en el punto 4.3.1 relativo al dominio

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]$$

con axil P_i constante en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$ y asimismo la relación momento curvatura $g(x, P, \chi(u))$ en cada intervalo es también independiente de x , pudiendo ponerse consecuentemente como una función g_i , $i = 1, \dots, n-1$ que depende únicamente de la curvatura. Evidentemente dicha función se modificará si el axil P_i cambia a otro valor también constante en el intervalo.

Se tiene el siguiente resultado:

Suponiendo que para cada intervalo (x_i, x_{i+1}) , $i = 1, \dots, n-1$ la ley momento curvatura viene dada por $g_i(u'')$, $i = 1, \dots, n-1$ y que los momentos flectores relativos a la deformada $u(x)$, solución del problema en régimen no lineal, verifican en dicho intervalo que

$$M|_{(x_i, x_{i+1})} = a_i u''(x) + b_i, \quad x \in (x_i, x_{i+1}) \quad (4.4.11)$$

entonces $u(x)$ satisface las ecuaciones diferenciales lineales de cuarto orden siguientes:

$$\begin{aligned} a_i u^{(4)} + P_i u^{(2)} &= f(x), \quad x \in (x_i, x_{i+1}) \\ i &= 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

y asimismo las condiciones de contorno naturales:

- a) *En cada nodo x_i , $i = 2, \dots, n-1$ donde no está impedido el desplazamiento y la carga exterior aplicada es F_i^E la solución $u(x)$ verifica que*

$$-a_{i-1} u'''(x_i^-) - P_{i-1} u'(x_i^-) + a_i u'''(x_i^+) + P_i u'(x_i^+) = F_i^E \quad (4.4.13)$$

- b) *En cada nodo x_i , $i = 2, \dots, n-1$ donde no está impedido el giro y el momento exterior aplicado es M_i^E la solución $u(x)$ verifica que*

$$a_{i-1}u''(x_i^-) - a_i u''(x_i^+) = b_i - b_{i-1} + M_i^E \quad (4.4.14)$$

Es decir la solución $u(x)$ del problema en régimen no lineal es también solución de un problema en régimen lineal definido por las ecuaciones diferenciales lineales anteriormente indicadas, o sea las relativas al caso de un pilar o viga-columna con rigidez a_i y axil P_i en cada intervalo (x_i, x_{i+1}) , $i = 1, \dots, n-1$ con las mismas condiciones de contorno esenciales que las del pilar en régimen no lineal y la misma condición de contorno natural correspondiente a la carga puntual pero sin embargo con diferente condición de contorno relativa al momento puntual. El momento ficticio que hay que aplicar en cada nodo interno x_i , $i = 1, \dots, n-1$ para que se tenga la equivalencia es, como se indica en la última expresión, la suma del término $b_i - b_{i-1}$ más el momento exterior M_i^E que hay aplicado en el nodo en el problema no lineal.

En efecto de la ecuación de equilibrio

$$M'' + Pu'' = f$$

se tiene que con la hipótesis de que el flector en cada intervalo (x_i, x_{i+1}) , $i = 1, \dots, n-1$ viene dado por

$$M|_{(x_i, x_{i+1})} = a_i u''(x) + b_i$$

y al ser a_i y b_i constantes se tiene la ecuación diferencial lineal indicada.

Por otra parte las condiciones de equilibrio en cada nodo para el problema no lineal dadas por las condiciones naturales son:

$$- \left[g(x, P_{i-1}, \chi(u)) \right]' \Big|_{x_i^-} - P_{i-1} u'(x_i) + \left[g(x, P_i, \chi(u)) \right]' \Big|_{x_i^+} + P_i u'(x_i) = F_i^E$$

para la carga puntual y

$$g(x_i^-, P_{i-1}, \chi_i^-) - g(x_i^+, P_i, \chi_i^+) = M_i^E$$

para el momento aplicado.

Teniendo ahora en cuenta la expresión de la ley momento curvatura en cada intervalo se tiene

$$\begin{aligned} F_i^E &= - \left[g(x, P_{i-1}, \chi(u)) \right]' \Big|_{x_i^-} - P_{i-1} u'(x_i^-) + \left[g(x, P_i, \chi(u)) \right]' \Big|_{x_i^+} + P_i u'(x_i^+) = \\ &= - (a_{i-1} u''(x) + b_{i-1})' \Big|_{x_i^-} - P_{i-1} u'(x_i^-) + (a_i u''(x) + b_i)' \Big|_{x_i^+} + P_i u'(x_i^+) \end{aligned}$$

$$F_i^E = -a_{i-1} u'''(x_i^-) - P_{i-1} u'(x_i^-) + a_i u'''(x_i^+) + P_i u'(x_i^+)$$

que es la expresión para la carga puntual en el nodo para el pilar en régimen lineal.

Para el momento

$$\begin{aligned} M_i^E &= g(x_i^-, P_{i-1}, \chi_i^-) - g(x_i^+, P_i, \chi_i^+) = \\ &= a_{i-1}u''(x_i^-) + b_{i-1} - a_i u''(x_i^+) - b_i \end{aligned}$$

de donde se deduce que el momento ficticio en el nodo para el pilar en régimen lineal es

$$M_i(\text{ficticio}) = a_{i-1}u''(x_i^-) - a_i u''(x_i^+) = b_i - b_{i-1} + M_i^E \quad (4.4.15)$$

Por otra parte como suponemos que las condiciones esenciales para el problema no lineal deben garantizar que cualquier problema en régimen lineal tenga solución única tal y como se indica en el punto 4.3.1, entonces las condiciones dadas garantizan que el problema lineal tiene solución única, luego dicha solución debe coincidir con la solución $u(x)$ del problema no lineal.

Obsérvese que aunque el momento exterior en el problema no lineal sea nulo es decir $M_i^E = 0$ el momento que hay que aplicar en el problema lineal para que se tenga la equivalencia indicada es

$$M_i(\text{ficticio}) = a_{i-1}u''(x_i^-) - a_i u''(x_i^+) = b_i - b_{i-1} \quad (4.4.16)$$

También es interesante indicar que si las relaciones momento curvatura g_{i-1} y g_i son la misma para los dos intervalos consecutivos y adyacentes al nodo x_i y $M_i^E = 0$ entonces la expresión del momento que hay que aplicar es

$$M_i(\text{ficticio}) = (a_{i-1} - a_i)u''(x_i) = b_i - b_{i-1} \quad (4.4.17)$$

siendo además la curvatura continua en el nodo, es decir $u''(x_i^-) = u''(x_i^+) = u''(x_i)$.

Todo esto se ilustra y resume de manera gráfica en las figuras siguientes.

Comenzando por la última situación donde no hay momento exterior aplicado en el nodo x_i , es decir $M_i^E = 0$ y donde además no cambia la relación momento curvatura a izquierda y derecha de dicho nodo, o sea $g_{i-1} = g_i$, entonces hay continuidad de la curvatura en dicho nodo y se tiene la situación indicada en la figura 4.4.13

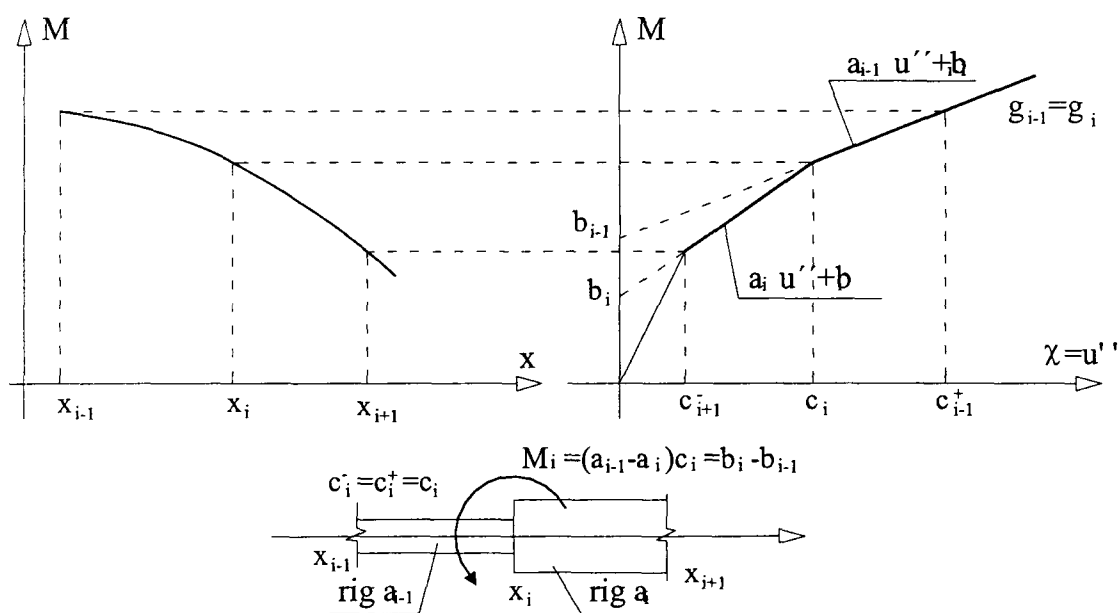


Figura 4.4.13

Si suponemos como antes que no hay momento exterior aplicado en el nodo x_i , luego $M_i^E = 0$, pero que sin embargo si hay ahora cambio en la ley momento curvatura, por cambio de las dimensiones de la sección, en las características de la misma (cuantía de las armaduras en piezas de hormigón), o por cambio en el axil, de modo que $g_{i-1} \neq g_i$, entonces se pierde la continuidad de la curvatura en dicho nodo y se tiene el esquema que se indica en la figura 4.4.14

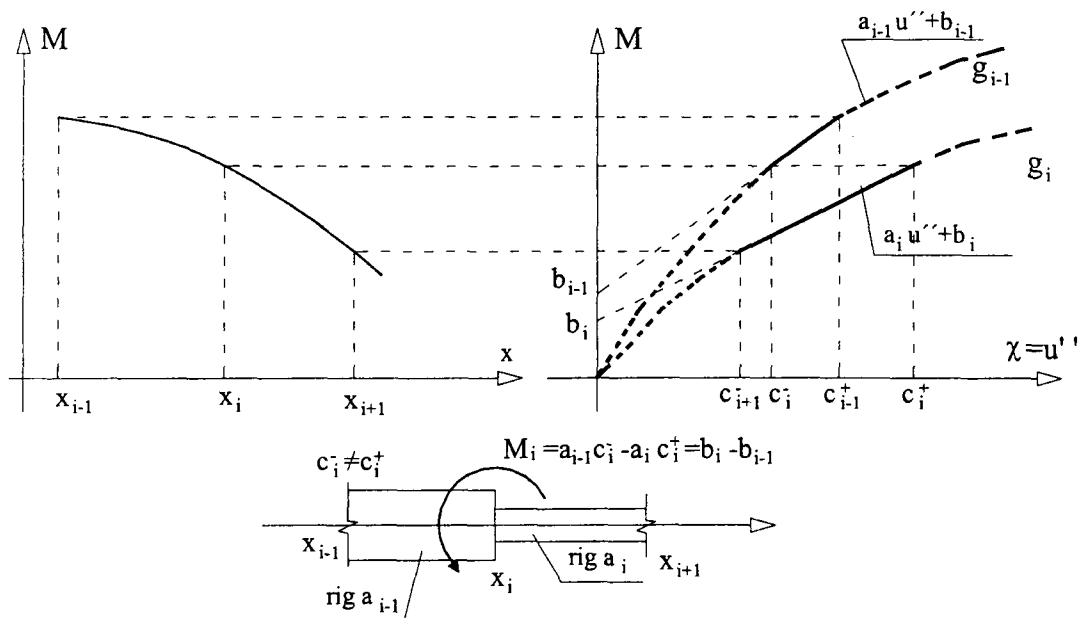


Figura 4.4.14

Esquematisamos ahora en la figura 4.4.15 el caso donde no hay cambio en la ley momento curvatura, es decir $g_{i-1} = g_i$, pero sin embargo hay aplicado un momento exterior no nulo en el nodo $M_i^E \neq 0$

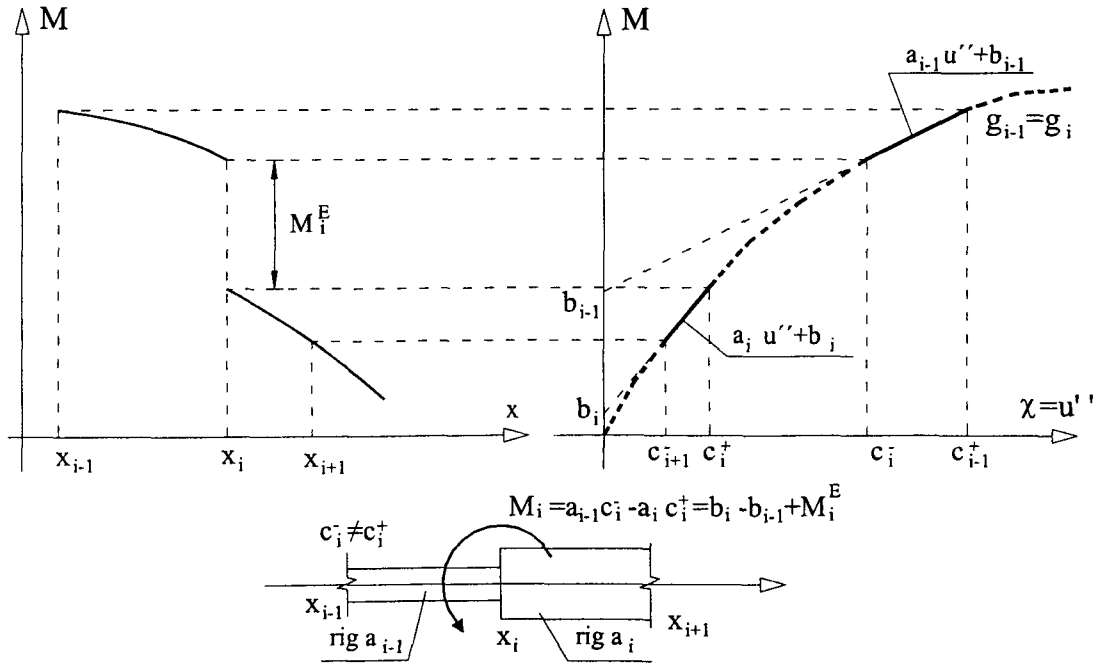


Figura 4.4.15

Finalmente consideramos un caso donde $M_i^E \neq 0$, con cambio en la relación momento curvatura, es decir $g_{i-1} \neq g_i$

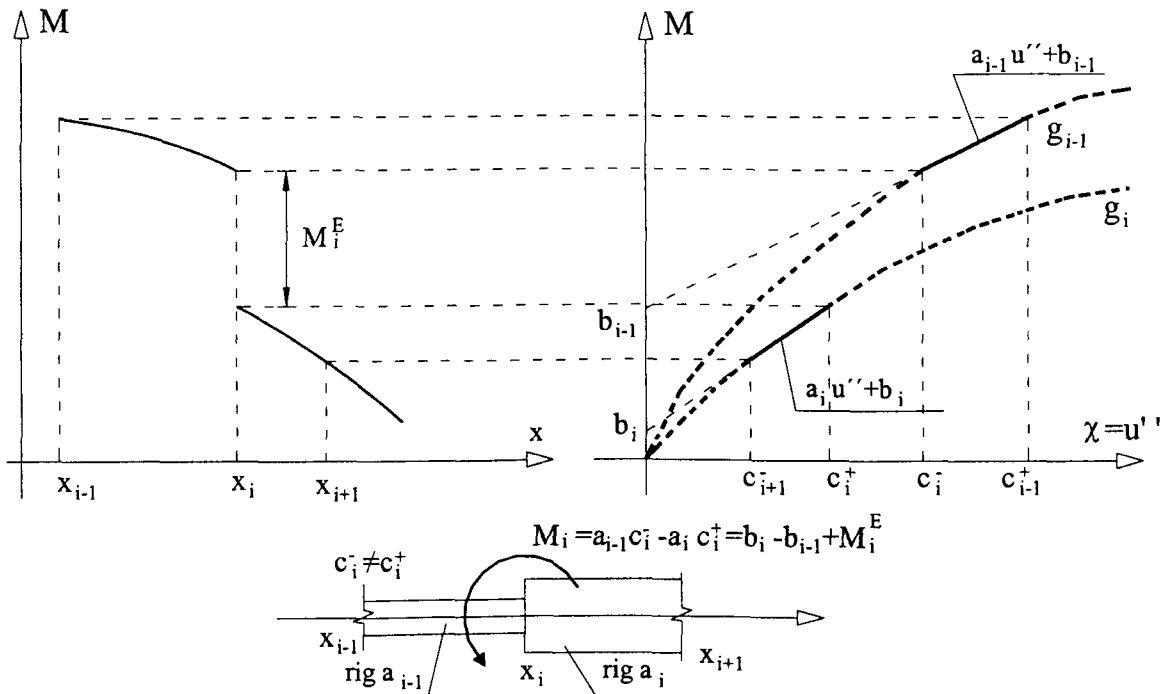


Figura 4.4.16

4.4.3 Comentarios

En el resultado anterior se partía de conocer la solución $u(x)$ del problema de la viga-columna en régimen no lineal y que en cada uno de los intervalos la ley momento curvatura venía dada por una expresión lineal. Esta segunda condición es sencilla de cumplir si las relaciones momento curvatura para los distintos tramos de la pieza vienen dadas por diferentes poligonales pues discretizando cada tramo convenientemente puede conseguirse para los intervalos resultantes que los flectores puedan ser expresados por una relación lineal de la forma indicada. De esta manera, dada la solución $u(x)$ es sencillo encontrar un problema lineal equivalente que tiene la misma solución. Esto es lo que se ha puesto además de manifiesto en los ejemplos de introducción al resultado de equivalencia anterior. En la práctica obviamente lo que nos interesa es conocer precisamente la solución del problema no lineal. La aplicación que se va a hacer del teorema de equivalencia en esta memoria de investigación es partir de soluciones de problemas lineales para obtener la o las soluciones del problema en régimen no lineal.

Se proponen dos métodos: el primero se basa en plantear la búsqueda de la solución o soluciones del problema no lineal mediante un método algebraico y en el segundo caso mediante una búsqueda iterativa resolviendo una sucesión de problemas lineales que convergen a las soluciones del problema no lineal. La aplicación del primer método se realizará para casos definidos por una única relación momento curvatura y para piezas con estados de carga sencillos y además para problemas isostáticos, en un sentido que se precisará después. El segundo método es de carácter general y se puede aplicar a cualquier caso de menor o mayor complejidad. Se basa en la utilización de elementos finitos para la resolución del problema empleando funciones de forma que son soluciones de la ecuación diferencial homogénea y por tanto son splines generalizados. Se combina lo anterior con un proceso de homotopía que permite pasar gradualmente de un problema con una relación momento curvatura lineal a la relación correspondiente del problema no lineal.

4.5 METODO ALGEBRAICO PROPUESTO

En los ejemplos comentados en el apartado anterior, la solución del problema en régimen no lineal, se componía de soluciones a trozos de problemas lineales, que resultan a partir del concepto de pilar lineal equivalente. Para los casos donde la acción repartida es nula dicha solución es exactamente un spline generalizado relativo al caso de la viga-columna (véase el punto 3.3.2) pero con nodos en posiciones desconocidas. El objetivo del método algebraico es precisamente determinar dichas posiciones estableciendo determinadas condiciones de equilibrio y continuidad.

En la terminología de los splines generalizados dichas condiciones darán lugar a un determinado grado de regularidad en la función resultante que define la solución del problema. Por otra parte cuando en la viga columna además de acciones puntuales hay acciones repartidas la solución aunque no es ya un spline generalizado, puede determinarse de manera exacta en los nodos de los elementos del correspondiente problema lineal, tal y como se ha demostrado en los apartados 3.4 y 3.5 pudiendo obtener una excelente aproximación a la solución en el interior de cada elemento e incluso en algunos casos la solución exacta a partir del concepto de acción repartida equivalente (véanse los puntos 3.5.2 y 3.5.3).

El desarrollo que se expone a continuación del método algebraico propuesto para la resolución del problema de la viga-columna en régimen no lineal, se va a basar en el establecimiento de un conjunto de ecuaciones algebraicas que permiten determinar la posición de los nodos desconocidos del pilar lineal equivalente. En cierto modo ello equivale a transformar el problema original en un caso especial de problema discreto de pandeo no lineal.

El procedimiento podría plantearse con toda la generalidad posible sin embargo nos limitamos a la exposición de la metodología para ciertos casos de problemas simplificados que por otra parte son los mas frecuentes en las aplicaciones. Nos centraremos en los casos habituales de problemas isostáticos, verificando además que la relación momento curvatura es la misma para todas las secciones de la pieza. Por otra parte cuando hay carga repartida, ésta se considerará uniforme para mayor simplicidad en el desarrollo. Los momentos por el mismo motivo se considerarán aplicados en los extremos de la pieza. En el apartado siguiente donde se emplea la metodología de elementos finitos con splines generalizados se indica la manera de abordar el problema en el caso general de la viga-columna en régimen no lineal.

En el punto que sigue a continuación exponemos el conjunto de relaciones que se van a utilizar de acuerdo con la simplificación mencionada. Después se indica, como aplicación de las expresiones obtenidas, una manera sencilla de determinar la ecuación para calcular la carga de pandeo en régimen lineal en el caso de una ménsula de varios tramos. Posteriormente se introducen las ideas del método, ilustrando con un ejemplo la construcción del sistema no lineal que permite determinar la posición de los nodos de la deformada que viene definida por una función a trozos. Después se sistematiza lo expuesto precisando las condiciones de aplicación y las ecuaciones a emplear dependiendo de las condiciones de contorno. Finalmente se realiza un análisis del comportamiento de una ménsula en los casos homogéneo y no homogéneo del correspondiente problema de pandeo en régimen no lineal.

4.5.1 Generalidades

Se determina a continuación la relación entre las derivadas primeras y segundas de la función que define la deformada de una pieza comprimida axialmente y sometida a una acción repartida, que por simplicidad se ha tomado, de valor constante.

Consideramos el problema de contorno $Au^{(4)} + Pu^{(2)} = f$ en el intervalo genérico (a, b) para el cual la solución verifica las condiciones de contorno

$$u(a) = u_a, \quad u''(a) = u''_a, \quad u(b) = u_b, \quad u''(b) = u''_b$$

La solución de este problema lineal es $u(x) = C \tilde{x} + u_p$ donde

$$\begin{aligned} C &= (C_1, C_2, C_3, C_4) = \\ &= \left(u_a + \frac{u''_a - \frac{f}{P}}{p^2}, \frac{u_b - u_a}{h} + \frac{u''_b - u''_a}{h p^2} - \frac{f h}{2P}, \frac{u''_a - \frac{f}{P}}{p^2} \frac{\cos(ph)}{\sin(ph)} - \frac{u''_b - \frac{f}{P}}{p^2 \sin(ph)}, -\frac{u''_a - \frac{f}{P}}{p^2} \right) \\ \tilde{x}^T &= (1, \quad z, \quad \sin(pz), \quad \cos(pz)), \quad u_p = \frac{z^2 f}{2P} \end{aligned}$$

con

$$p^2 = P/A, \quad z = x - a, \quad h = b - a \quad (4.5.1)$$

Resultado que se deduce de la resolución del sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & h & \sin(ph) & \cos(ph) \\ 0 & 0 & 0 & -p^2 \\ 0 & 0 & -p^2 \sin(ph) & -p^2 \cos(ph) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h^2 f}{2P} \\ \frac{f}{P} \\ \frac{f}{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u''_a \\ u''_b \end{bmatrix} \quad (4.5.2)$$

Para el desarrollo que sigue se podrían emplear también las correspondientes funciones de forma con la matriz de cambio de base indicada en la expresión (3.3.20), sin embargo como la curvatura linealizada (dada por la derivada segunda del desplazamiento) va a ser un elemento clave en el método, es preferible por simplicidad utilizar directamente la expresión dada más arriba para la solución $u(x)$. Llamando, de acuerdo con la notación indicada en la figura 4.5.1

$$\begin{aligned} H_a &= -V(a) = Au^{(3)} + Pu'(a) \\ H_b &= V(b) = -Au^{(3)}(b) - Pu'(b) \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

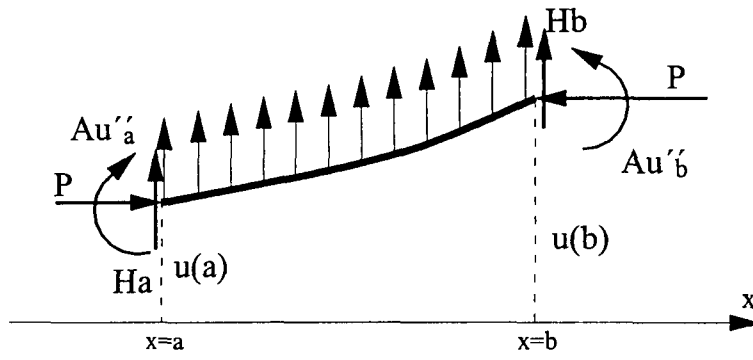


Figura 4.5.1

a las cargas nodales de equilibrio en los extremos a y b respectivamente, donde la carga nodal H_b es el pseudocortante en $x=b$ y H_a es el pseudocortante en $x=a$ cambiado de signo.

Integrando por partes después de multiplicar por v ambos miembros de la ecuación diferencial resulta la expresión

$$(Au^{(3)} + Pu')v \Big|_a^b - \int_a^b (Au^{(3)} + Pu')v' dx = \int_a^b f v dx \quad (4.5.4)$$

Haciendo $v = 1$ queda

$$H_a + H_b + f h = 0 \quad (4.5.5)$$

es decir el equilibrio de fuerzas verticales, resultado que se obtiene también directamente de la interpretación física.

De la misma manera integrando por partes de nuevo se tiene

$$(Au^{(3)} + Pu')v \Big|_a^b - (Au'' + Pu)v' \Big|_a^b + \int_a^b (Au'' + Pu)v'' dx = \int_a^b f v dx \quad (4.5.6)$$

Haciendo ahora $v = x - a$ resulta la expresión

$$H_b h + [Au''(b) - Au''(a)] + P[u(b) - u(a)] + f \frac{h^2}{2} = 0 \quad (4.5.7)$$

que corresponde al equilibrio de momentos, tomados respecto al extremo izquierdo de la pieza en la posición deformada. Dicha relación como antes se puede determinar directamente de la interpretación física.

Dividiendo por el producto hP en la última expresión y teniendo en cuenta el equilibrio de fuerzas verticales se tiene la relación

$$\frac{H_a}{P} = -\frac{H_b + fh}{P} = \frac{u_b - u_a}{h} + \frac{u_b'' - u_a''}{hp^2} - \frac{hf}{2P} \quad (4.5.8)$$

De esta manera la expresión de la solución $u(x)$ se puede poner también en función de H_a / P

Se tienen las siguientes relaciones que se pueden deducir de la expresión de $u(x)$. Las mismas son de utilidad para establecer las ecuaciones del método algebraico.

u''_a y u''_b en función de u'_a y u'_b

$$u''_a = \frac{f}{P} + \frac{-p \cos(ph)}{\text{sen}(ph)} \left[u'_a - \frac{H_a}{P} \right] + \frac{p}{\text{sen}(ph)} \left[u'_b + \frac{H_b}{P} \right] \quad (4.5.9)$$

$$u''_b = \frac{f}{P} + \frac{-p}{\text{sen}(ph)} \left[u'_a - \frac{H_a}{P} \right] + \frac{p \cos(ph)}{\text{sen}(ph)} \left[u'_b + \frac{H_b}{P} \right]$$

u'_a y u'_b en función de u''_a y u''_b

$$u'_a = \frac{H_a}{P} + \frac{\cos(ph)}{p \text{sen}(ph)} \left[u''_a - \frac{f}{P} \right] - \frac{1}{p \text{sen}(ph)} \left[u''_b - \frac{f}{P} \right] \quad (4.5.10)$$

$$u'_b = -\frac{H_b}{P} + \frac{1}{p \text{sen}(ph)} \left[u''_a - \frac{f}{P} \right] - \frac{\cos(ph)}{p \text{sen}(ph)} \left[u''_b - \frac{f}{P} \right]$$

u''_a y u'_b en función de u'_a y u''_b

$$u''_a = \frac{f}{P} + \frac{p \text{sen}(ph)}{\cos(ph)} \left[u'_a - \frac{H_a}{P} \right] + \frac{1}{\cos(ph)} \left[u''_b - \frac{f}{P} \right] \quad (4.5.11)$$

$$u'_b = -\frac{H_b}{P} + \frac{1}{\cos(ph)} \left[u'_a - \frac{H_a}{P} \right] + \frac{\text{sen}(ph)}{p \cos(ph)} \left[u''_b - \frac{f}{P} \right]$$

u'_a y u''_b en función de u''_a y u'_b

$$u'_a = \frac{H_a}{P} + \frac{1}{\cos(ph)} \left[u'_b + \frac{H_b}{P} \right] - \frac{\text{sen}(ph)}{p \cos(ph)} \left[u''_a - \frac{f}{P} \right] \quad (4.5.12)$$

$$u''_b = \frac{f}{P} - \frac{p \text{sen}(ph)}{\cos(ph)} \left[u'_b + \frac{H_b}{P} \right] + \frac{1}{\cos(ph)} \left[u''_a - \frac{f}{P} \right]$$

u'_b y u''_b en función de u'_a y u''_a

$$u'_b = -\frac{H_b}{P} + \cos(ph) \left[u'_a - \frac{H_a}{P} \right] - \frac{\sin(ph)}{p} \left[u''_a - \frac{f}{P} \right] \quad (4.5.13)$$

$$u''_b = \frac{f}{P} - p \sin(ph) \left[u'_a - \frac{H_a}{P} \right] + \cos(ph) \left[u''_a - \frac{f}{P} \right]$$

u'_a y u''_a en función de u'_b y u''_b

$$u'_a = \frac{H_a}{P} + \cos(ph) \left[u'_b + \frac{H_b}{P} \right] - \frac{\sin(ph)}{p} \left[u''_b - \frac{f}{P} \right] \quad (4.5.14)$$

$$u''_a = \frac{f}{P} + p \sin(ph) \left[u'_b + \frac{H_b}{P} \right] + \cos(ph) \left[u''_b - \frac{f}{P} \right]$$

4.5.2 Aplicación a algunos problemas de pandeo en régimen lineal

Las expresiones dadas en el punto anterior permiten obtener fácilmente las ecuaciones que determinan la carga de pandeo en diversos casos. Como aplicación se obtienen las ecuaciones para la ménsula con uno, dos y tres tramos respectivamente.

Supongamos el caso de una ménsula de rigidez A y longitud h como se indica en la figura 4.5.2

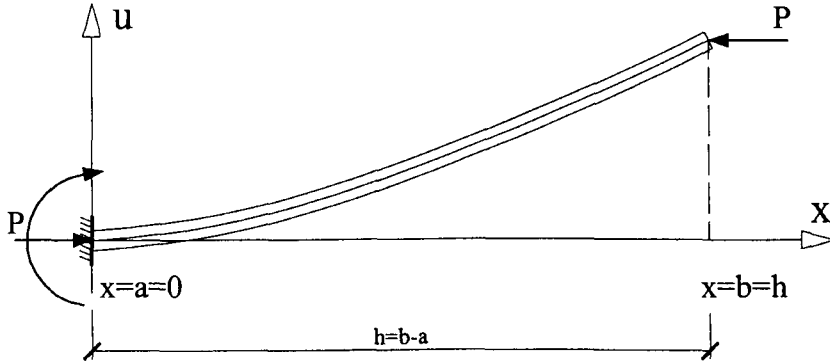


Figura 4.5.2

Para la carga crítica P la deformada es solución no trivial del problema de contorno homogéneo

$$\begin{aligned} Au^{(4)} + Pu^{(2)} &= 0 \\ u(0) = u'(0) = u''(h) = -Au'''(h) - Pu'(h) &= 0 \end{aligned} \quad (4.5.15)$$

que como es conocido queda indeterminada.

Podemos emplear las relaciones dadas en (4.5.13) para $f = 0$ y $H_a = H_b = 0$. Se tiene

$$\begin{bmatrix} u'_b \\ u''_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(ph) & \frac{\sin(ph)}{p} \\ -p\sin(ph) & \cos(ph) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} \quad (4.5.16)$$

siendo la curvatura en el empotramiento $c = u''_a$, la cual toma un valor arbitrario.

Como $u''_b = u''(h) = 0$ resulta

$$c \cos(ph) = 0 \quad (4.5.17)$$

y el valor más pequeño de ph que hace nulo el coseno es $ph = \pi/2$ luego $P_{cr} = \pi^2 A/(4h^2)$ ya que

$$p^2 = \frac{P}{A} = \frac{\pi^2}{4h^2} \quad (4.5.18)$$

Consideramos ahora una ménsula formada por dos tramos como se indica en la figura 4.5.3

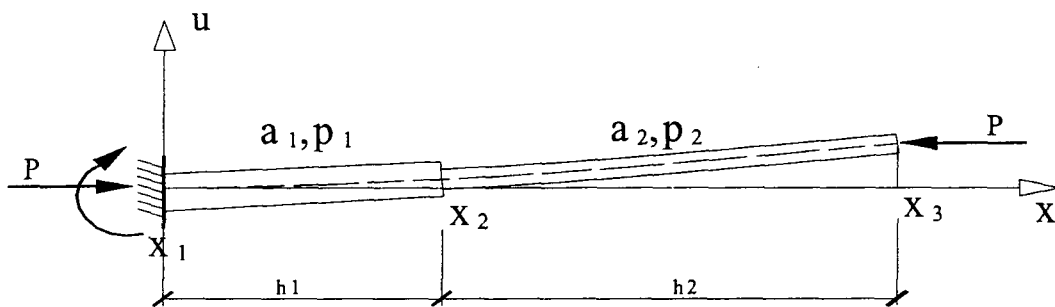


Figura 4.5.3

La pieza la situamos en el dominio $[x_1, x_2] \cup [x_2, x_3]$. Los valores de la rigidez y la longitud del primer tramo son a_1 y h_1 respectivamente y de manera análoga a_2 y h_2 para el segundo tramo, siendo además $p_i^2 = P/a_i, i = 1, 2$. La deformada en este caso está formada por un spline generalizado solución de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} a_1 u^{(4)} + P u^{(2)} &= 0, & x \in (x_1, x_2) \\ a_2 u^{(4)} + P u^{(2)} &= 0, & x \in (x_2, x_3) \end{aligned} \quad (4.5.19)$$

Las funciones solución verifican $u'(x_1) = 0$ y $u''(x_1) = c$ y asimismo $u''(x_3) = 0$

Se puede poner de acuerdo con las relaciones dadas en (4.5.13)

$$\begin{bmatrix} u'(x_2) \\ u''(x_2^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(p_1 h_1) & \frac{\text{sen}(p_1 h_1)}{p} \\ -p_1 \text{sen}(p_1 h_1) & \cos(p_1 h_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} \quad (4.5.20)$$

De la continuidad del momento en el nodo x_2 se tiene $a_1 u''(x_2^-) = a_2 u''(x_2^+)$ que puede expresarse en forma matricial del siguiente modo

$$\begin{bmatrix} u'(x_2) \\ u''(x_2^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_1 / a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u''(x_2^-) \end{bmatrix} \quad (4.5.21)$$

Como por otra parte

$$\begin{bmatrix} u'(x_3) \\ u''(x_3^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(p_2 h_2) & \frac{\text{sen}(p_2 h_2)}{p_2} \\ -p_2 \text{sen}(p_2 h_2) & \cos(p_2 h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(x_2) \\ u''(x_2^+) \end{bmatrix} \quad (4.5.22)$$

resulta

$$\begin{bmatrix} u'(x_3) \\ u''(x_3^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(p_2 h_2) & \frac{\text{sen}(p_2 h_2)}{p_2} \\ -p_2 \text{sen}(p_2 h_2) & \cos(p_2 h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_1 / a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(p_1 h_1) & \frac{\text{sen}(p_1 h_1)}{p_1} \\ -p_1 \text{sen}(p_1 h_1) & \cos(p_1 h_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} \quad (4.5.23)$$

Aplicamos ahora la condición $u''(x_3^-) = u''(x_3) = 0$ queda después de desarrollar la expresión anterior

$$u''(x_3) = 0 = c \left[-\frac{p_2}{p_1} \text{sen}(p_1 h_1) \text{sen}(p_2 h_2) + \frac{a_1}{a_2} \cos(p_1 h_1) \cos(p_2 h_2) \right] \quad (4.5.24)$$

resultando la ecuación siguiente que permite determinar la carga de pandeo para el pilar con dos tramos

$$\frac{p_1}{p_2} \text{tg}(p_1 h_1) \text{tg}(p_2 h_2) = 1 \quad (4.5.25)$$

En [TiG61,p.149] puede verse la deducción para este caso por métodos menos sistemáticos que el aquí desarrollado.

De la misma manera para el caso de tres tramos esquematizado en la figura 4.5.4

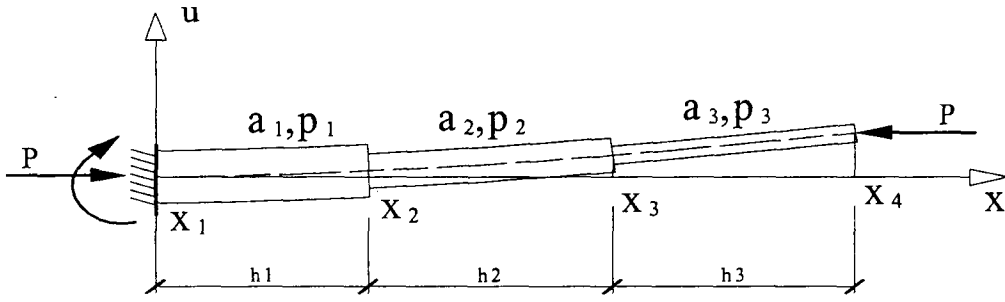


Figura 4.5.4

resulta de acuerdo con lo anterior y con la notación

$$U_i^+ = \begin{bmatrix} u'(x_i) \\ u''(x_i^+) \end{bmatrix}, U_i^- = \begin{bmatrix} u'(x_i) \\ u''(x_i^-) \end{bmatrix}, T_i = \begin{bmatrix} \cos(p_i h_i) & \frac{\text{sen}(p_i h_i)}{p_i} \\ -p_i \text{sen}(p_i h_i) & \cos(p_i h_i) \end{bmatrix}, E_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_i / a_{i+1} \end{bmatrix} \quad (4.5.26)$$

$$U_4^- = T_3 E_{23} T_2 E_{12} T_1 U_1^+ \quad (4.5.27)$$

Ahora $u''(x_4^-) = 0$, procediendo como antes, resulta, después de simplificar, la ecuación siguiente para el cálculo de la carga de pandeo

$$\frac{p_1}{p_2} \text{tg}(p_1 h_1) \text{tg}(p_2 h_2) + \frac{p_1}{p_3} \text{tg}(p_1 h_1) \text{tg}(p_3 h_3) + \frac{p_2}{p_3} \text{tg}(p_2 h_2) \text{tg}(p_3 h_3) = 1 \quad (4.5.28)$$

A partir de la estructura de la expresión anterior se puede generalizar el resultado a cualquier número de tramos.

4.5.3 Método algebraico para problemas en régimen no lineal

En el punto anterior se han aplicado las expresiones dadas en el punto de generalidades a problemas de pandeo en régimen lineal. En estos casos la posición de los nodos era conocida y lo que se determinaba era el valor de la carga que hacía que el problema tuviera soluciones no triviales. A continuación vamos a ver como se pueden aplicar dichas expresiones a problemas en régimen no lineal. Introducimos en primer lugar el método indicando como pueden resolverse algunos de los ejemplos ya comentados en puntos anteriores. En segundo lugar indicamos los pasos fundamentales del método para el caso genérico dando una cierta estructuración del mismo.

Consideremos el caso correspondiente a la figura 4.4.12 del apartado 4.4, figura que por comodidad reproducimos nuevamente aquí como 4.5.5

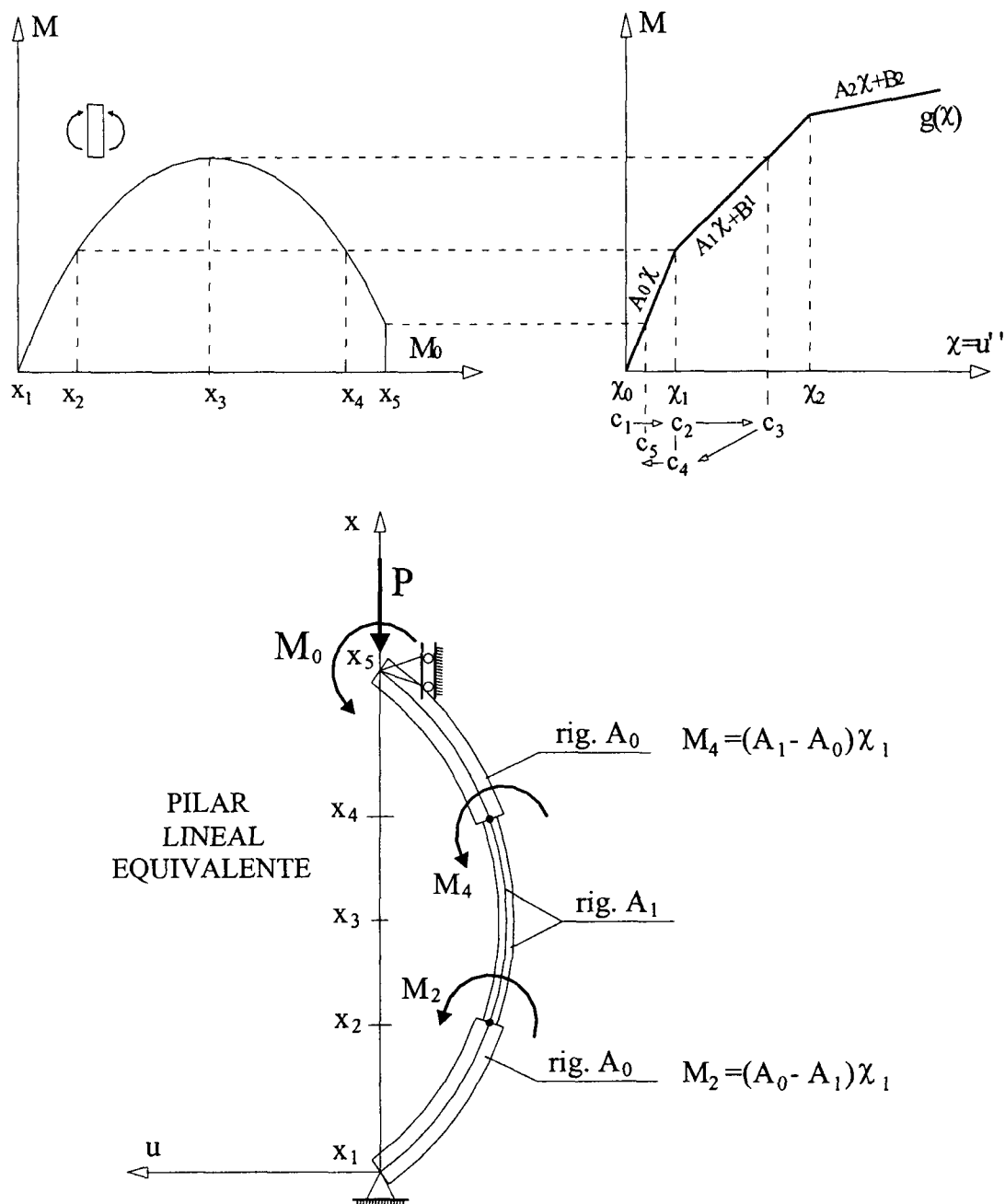


Figura 4.5.5

Teniendo en cuenta que los momentos flectores en cada subintervalo verifican que $M|_{(x_i, x_{i+1})} = a_i u'' + b_i, i = 1, \dots, 4$ la determinación de la deformada para este problema no lineal es equivalente a obtener la función que define al spline generalizado que es solución de la ecuación diferencial $a_i u^{(4)} + P u^{(2)} = 0, x \in (x_i, x_{i+1}), i = 1, \dots, 4$ pero $a_1 = a_4 = A_0$ y $a_2 = a_3 = A_1$ luego las ecuaciones diferenciales son en realidad

$$\begin{aligned} A_0 u^{(4)} + P u^{(2)} &= 0, x \in (x_1, x_2) \cup (x_4, x_5) \\ A_1 u^{(4)} + P u^{(2)} &= 0, x \in (x_2, x_4) \end{aligned} \quad (4.5.29)$$

verificando la deformada las siguientes condiciones en los extremos

$$\begin{aligned} u(x_1) = 0, \quad u''(x_1) = c_1 = \chi_0 = 0 \\ u(x_5) = 0, \quad u''(x_5) = c_5 = M_0 / A_0 \in [0, \chi_1] \end{aligned} \quad (4.5.30)$$

Por otra parte las posiciones de los nodos x_2 y x_4 es desconocida pero sabemos que la curvatura en dichos nodos es precisamente

$$c_2 = c_4 = \chi_1 \quad (4.5.31)$$

El problema se traduce por tanto a determinar una función a trozos definida en el dominio

$$[x_1, x_2] \cup [x_2, x_4] \cup [x_4, x_5] \quad (4.5.32)$$

Sabemos que la función es al menos de la clase C^1 luego hay continuidad de la función y de la primera derivada en los nodos intermedios x_2 y x_4 pero además las derivadas segundas en dichos nodos son conocidas verificándose también

$$\begin{aligned} u''(x_2^-) = u''(x_2^+) = \chi_1 \\ u''(x_4^-) = u''(x_4^+) = \chi_1 \end{aligned} \quad (4.5.33)$$

debido a la continuidad de la ley de momentos flectores (pues no hay momentos exteriores aplicados en dichos nodos ni tampoco en otros puntos intermedios de la directriz en el problema no lineal) y por ser la ley momento curvatura la misma para todas las secciones de la pieza. Por tanto en este caso la función es también de la clase C^2 . Esto como se ha visto en el apartado 4.4 sobre el pilar lineal equivalente equivale a decir que en el problema lineal asociado hay aplicados unos momentos ficticios de valor

$$\begin{aligned} M_2 = A_0 u''(x_2^-) - A_1 u''(x_2^+) = (A_0 - A_1) \chi_1 \\ M_4 = A_1 u''(x_4^-) - A_0 u''(x_4^+) = (A_1 - A_0) \chi_1 \end{aligned} \quad (4.5.34)$$

Se pueden establecer dos ecuaciones que consisten en igualar las derivadas primeras por la izquierda y por la derecha en los nodos intermedios x_2 y x_4 empleando en este caso las expresiones (4.5.10) que dan las derivadas primeras en los extremos de cada intervalo genérico (a, b) en función de las derivadas segundas y de las correspondientes cargas de equilibrio H_a y H_b , las cuales son conocidas por tratarse de un problema isostático.

Se tiene para este caso el sistema no lineal que resulta de igualar las primeras derivadas en los nodos

$$\begin{aligned} u'(x_2^-) = u'(x_2^+) \\ u'(x_4^-) = u'(x_4^+) \end{aligned} \quad (4.5.35)$$

donde

$$\begin{aligned}
 u'(x_2^-) &= -\frac{H_{x_2^-}}{P} + \frac{1}{p_1 \text{sen}(p_1 h_1)} \left[c_1 - \frac{f}{P} \right] - \frac{\cos(p_1 h_1)}{p_1 \text{sen}(p_1 h_1)} \left[c_2 - \frac{f}{P} \right] \\
 u'(x_2^+) &= \frac{H_{x_2^+}}{P} + \frac{\cos(p h_2)}{p \text{sen}(p h_2)} \left[c_2 - \frac{f}{P} \right] - \frac{1}{p \text{sen}(p h_2)} \left[c_4 - \frac{f}{P} \right] \\
 u'(x_4^-) &= -\frac{H_{x_4^-}}{P} + \frac{1}{p_2 \text{sen}(p_2 h_3)} \left[c_2 - \frac{f}{P} \right] - \frac{\cos(p_2 h_2)}{p_2 \text{sen}(p_2 h_2)} \left[c_4 - \frac{f}{P} \right] \\
 u'(x_4^+) &= \frac{H_{x_4^+}}{P} + \frac{\cos(p_3 h_3)}{p_3 \text{sen}(p_3 h_3)} \left[c_4 - \frac{f}{P} \right] - \frac{1}{p_3 \text{sen}(p_3 h_3)} \left[c_5 - \frac{f}{P} \right]
 \end{aligned} \tag{4.5.36}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
 h_1 &= x_2 - x_1, \quad h_2 = x_4 - x_2, \quad h_3 = x_5 - x_4 \\
 x_1 &= 0, \quad x_5 = L, \quad p_1^2 = P/A_0, \quad p_2^2 = P/A_1, \quad p_3^2 = P/A_0
 \end{aligned} \tag{4.5.37}$$

y que $f = 0$ al no haber carga repartida y que las curvaturas son los valores conocidos

$$c_1 = 0, c_2 = c_4 = \chi_1, c_5 = M_0 / A_0 \tag{4.5.38}$$

y asimismo que las cargas nodales de equilibrio para este caso son

$$\begin{aligned}
 H_{x_5} &= -M_0 / L, \quad H_{x_1} = M_0 / L \\
 H_{x_4^+} &= M_0 / L, \quad H_{x_4^-} = -M_0 / L \\
 H_{x_2^+} &= M_0 / L, \quad H_{x_2^-} = -M_0 / L
 \end{aligned} \tag{4.5.39}$$

tal y como se puede deducir del equilibrio de cada uno de los tramos (véase la figura 4.5.6).

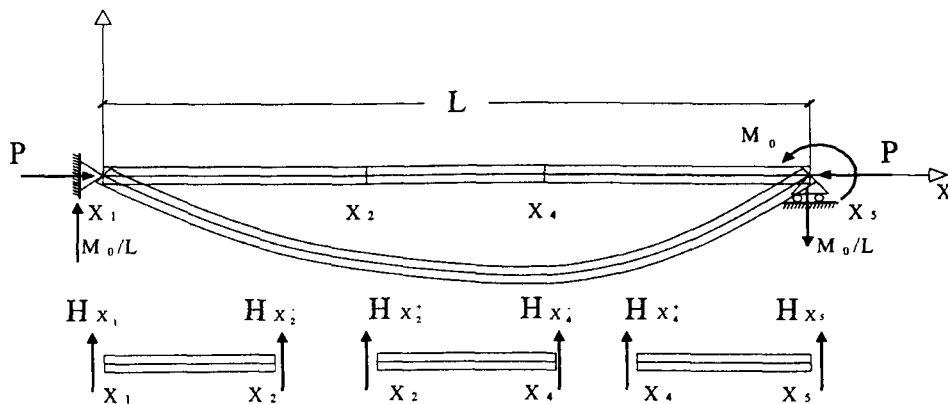


Figura 4.5.6

Queda por tanto el sistema no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{p_1 \text{sen}(p_1 h_1)} [0 - 0] - \frac{\cos(p_1 h_1)}{p_1 \text{sen}(p_1 h_1)} [\chi_1 - 0] &= \\
 &= \frac{\cos(p h_2)}{p \text{sen}(p h_2)} [\chi_1 - 0] - \frac{1}{p \text{sen}(p h_2)} [\chi_1 - 0] \\
 \frac{1}{p_2 \text{sen}(p_2 h_3)} [\chi_1 - 0] - \frac{\cos(p_2 h_2)}{p_2 \text{sen}(p_2 h_2)} [\chi_1 - 0] &= \\
 &= \frac{\cos(p_3 h_3)}{p_3 \text{sen}(p_3 h_3)} [\chi_1 - 0] - \frac{1}{p_3 \text{sen}(p_3 h_3)} \left[\frac{M_0}{A_0} - 0 \right]
 \end{aligned}
 \tag{4.5.40}$$

Las incógnitas del sistema son por ejemplo h_1 y h_2 ya que $h_3 = L - h_1 - h_2$.

Condiciones del método

A partir de las ideas aplicadas en el ejemplo expuesto se puede desarrollar una metodología de cálculo para la resolución de problemas de pandeo en régimen no lineal donde la no linealidad viene de suponer una relación momento curvatura no lineal. La función que define dicha relación viene dada por un spline de primer grado, o más coloquialmente por una función cuya gráfica es una poligonal. Dicha función es por hipótesis la misma para todas las secciones de la pieza.

El método se limita a la resolución de una clase de problemas que en cierto modo pueden considerarse isostáticos y que son muy habituales en el cálculo de estructuras. Las condiciones que suponemos para la aplicación del mismo son las siguientes:

- 1) La pieza además de estar sometida a la carga axial P , que da lugar a un axil constante en toda la pieza, puede tener una carga repartida f también de valor constante en toda su directriz y momentos en los extremos de la misma. Sin embargo no se considerará el caso de cargas puntuales o momentos en puntos intermedios de la pieza.
- 2) Los extremos de la pieza pueden estar libres o coaccionados, limitando el desplazamiento y/o el giro. Dicho conjunto de condiciones debe garantizar que el mismo problema en régimen lineal tenga solución única.
- 3) El pseudocortante debe ser conocido a lo largo de la directriz. Esto limita la aplicación del método a problemas que en cierto sentido pueden considerarse como isostáticos.

Ecuaciones del método

La idea del método, como se ha podido observar en el ejemplo de introducción, consiste en que las leyes de momentos flectores y de curvaturas se pueden determinar estableciendo un conjunto de ecuaciones para calcular la deformada, siendo las incógnitas del problema las longitudes de los distintos tramos en los que se divide la pieza o equivalentemente la posición de los nodos de separación de dichos tramos, y donde las ecuaciones resultan de imponer en los nodos intermedios condiciones de continuidad de la primera derivada, suponiendo para ello conocido el valor de la curvatura en dichos nodos. La deformada por tanto viene representada por una función de la clase C^2 . Para llevar a cabo el proceso se requiere un conocimiento cualitativo aproximado de la ley de flectores y de curvaturas en la pieza. No obstante esto no es un inconveniente pues puede procederse realizando tanteos respecto a los niveles de curvatura que se pueden alcanzar en los distintos tramos o elementos de la pieza y así hacer hipótesis sobre los valores de las curvaturas en los nodos intermedios.

Supongamos una pieza de longitud L dada, definida por los distintos elementos

$$[x_i, x_{i+1}], i = 1, \dots, n-1$$

donde la posición de los nodos intermedios x_2, \dots, x_{n-1} es desconocida o de manera equivalente son desconocidas las longitudes de los tramos

$$h_i = x_{i+1} - x_i, i = 1, \dots, n-1.$$

En los nodos extremos x_1 y x_n los valores de las cargas nodales de equilibrio H_1 y H_n son datos o son valores que pueden calcularse de manera inmediata e independiente de la deformada $u(x)$ (en este sentido indicamos que el problema es isostático). Se conocen también en dichos extremos los valores del giro o del momento aplicado o los desplazamientos.

Suponemos que los intervalos cumplen las hipótesis indicadas en el teorema de equivalencia dado en el punto 4.4.2, es decir los momentos flectores relativos a la deformada $u(x)$, solución del problema en régimen no lineal, verifican en cada uno de los tramos

$$M|_{(x_i, x_{i+1})} = a_i u''(x) + b_i, \quad x \in (x_i, x_{i+1}) \quad (4.5.41)$$

y correspondientemente la solución satisface las ecuaciones diferenciales lineales siguientes

$$\begin{aligned} a_i u^{(4)} + P u^{(2)} &= f, \quad x \in (x_i, x_{i+1}) \\ i &= 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (4.5.42)$$

donde f se ha supuesto, para este desarrollo del método algebraico, constante.

Llamando $p_i^2 = P/a_i, i = 1, \dots, n-1$ las ecuaciones del sistema no lineal para los nodos $x_i, i = 3, \dots, n-2$ son, de acuerdo con las expresiones (4.5.10) que dan las derivadas primeras en función de las segundas, las siguientes:

$$\begin{aligned} u'(x_i^-) &= u'(x_i^+) \\ i &= 3, \dots, n-2 \end{aligned} \quad (4.5.43)$$

es decir

$$\begin{aligned} -\frac{H_{x_i^-}}{P} + \frac{1}{p_{i-1}\text{sen}(p_{i-1}h_{i-1})} \left[c_{i-1} - \frac{f}{P} \right] - \frac{\cos(p_{i-1}h_{i-1})}{p_{i-1}\text{sen}(p_{i-1}h_{i-1})} \left[c_i - \frac{f}{P} \right] = \\ = \frac{H_{x_i^+}}{P} + \frac{\cos(p_i h_i)}{p_i \text{sen}(p_i h_i)} \left[c_i - \frac{f}{P} \right] - \frac{1}{p_i \text{sen}(p_i h_i)} \left[c_{i+1} - \frac{f}{P} \right] \\ i = 3, \dots, n-2 \end{aligned} \quad (4.5.44)$$

Como estamos suponiendo en este desarrollo que no hay cargas puntuales aplicadas en los nodos intermedios, se tiene que $H_{x_i^-} = -H_{x_i^+}$ por tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_{i-1}\text{sen}(p_{i-1}h_{i-1})} \left[c_{i-1} - \frac{f}{P} \right] - \frac{\cos(p_{i-1}h_{i-1})}{p_{i-1}\text{sen}(p_{i-1}h_{i-1})} \left[c_i - \frac{f}{P} \right] = \\ = \frac{\cos(p_i h_i)}{p_i \text{sen}(p_i h_i)} \left[c_i - \frac{f}{P} \right] - \frac{1}{p_i \text{sen}(p_i h_i)} \left[c_{i+1} - \frac{f}{P} \right] \\ i = 3, \dots, n-2 \end{aligned} \quad (4.5.45)$$

Por otra parte las ecuaciones que hay que establecer para los nodos x_2 y x_{n-1} dependen de las condiciones de contorno en los nodos extremos.

Por ejemplo si en el nodo x_1 hay aplicado un momento exterior M_1 de la relación momento curvatura se determinara el valor de la curvatura c_1 en dicho punto mediante

$$c_1 = g^{-1}(M_1) \quad (4.5.46)$$

La ecuación $u'(x_2^-) = u'(x_2^+)$ que se establecería en dicho caso es del mismo tipo que las anteriores expresando la derivada en función de la curvatura en los extremos, es decir

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_1 \text{sen}(p_1 h_1)} \left[c_1 - \frac{f}{P} \right] - \frac{\cos(p_1 h_1)}{p_1 \text{sen}(p_1 h_1)} \left[c_2 - \frac{f}{P} \right] = \\ = \frac{\cos(p_2 h_2)}{p_2 \text{sen}(p_2 h_2)} \left[c_2 - \frac{f}{P} \right] - \frac{1}{p_2 \text{sen}(p_2 h_2)} \left[c_3 - \frac{f}{P} \right] \end{aligned} \quad (4.5.47)$$

De manera análoga si se conoce el momento exterior M_n aplicado en el nodo x_n entonces $c_n = g^{-1}(M_n)$ y la ecuación $u'(x_{n-1}^-) = u'(x_{n-1}^+)$ sería

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_{n-2} \operatorname{sen}(p_{n-2} h_{n-2})} \left[c_{n-2} - \frac{f}{P} \right] - \frac{\cos(p_{n-2} h_{n-2})}{p_{n-2} \operatorname{sen}(p_{n-2} h_{n-2})} \left[c_{n-1} - \frac{f}{P} \right] = \\ = \frac{\cos(p_{n-1} h_{n-1})}{p_{n-1} \operatorname{sen}(p_{n-1} h_{n-1})} \left[c_{n-1} - \frac{f}{P} \right] - \frac{1}{p_{n-1} \operatorname{sen}(p_{n-1} h_{n-1})} \left[c_n - \frac{f}{P} \right] \end{aligned} \quad (4.5.48)$$

Asimismo si en lugar de fijarse el momento en el extremo x_1 se da el valor de la pendiente u'_1 hay que emplear la expresión que da el valor u'_b en función de u'_a y u''_b . La ecuación $u'(x_2^-) = u'(x_2^+)$ es ahora

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(p_1 h_1)} \left[u'_1 - \frac{H_1}{P} \right] + \frac{\operatorname{sen}(p_1 h_1)}{p_1 \cos(p_1 h_1)} \left[c_2 - \frac{f}{P} \right] = \\ = \frac{\cos(p_2 h_2)}{p_2 \operatorname{sen}(p_2 h_2)} \left[c_2 - \frac{f}{P} \right] - \frac{1}{p_2 \operatorname{sen}(p_2 h_2)} \left[c_3 - \frac{f}{P} \right] \end{aligned} \quad (4.5.49)$$

De la misma manera si se fija el valor de la pendiente u'_n en el nodo x_n hay que emplear la expresión que da el valor u'_a en función de u''_a y u'_b para $u'(x_{n-1}^+)$. De este modo la ecuación $u'(x_{n-1}^-) = u'(x_{n-1}^+)$ es

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_{n-2} \operatorname{sen}(p_{n-2} h_{n-2})} \left[c_{n-2} - \frac{f}{P} \right] - \frac{\cos(p_{n-2} h_{n-2})}{p_{n-2} \operatorname{sen}(p_{n-2} h_{n-2})} \left[c_{n-1} - \frac{f}{P} \right] = \\ = - \frac{\operatorname{sen}(p_{n-1} h_{n-1})}{p_{n-1} \cos(p_{n-1} h_{n-1})} \left[c_{n-1} - \frac{f}{P} \right] + \frac{1}{\cos(p_{n-1} h_{n-1})} \left[u'_n + \frac{H_n}{P} \right] \end{aligned} \quad (4.5.50)$$

En resumen se ha determinado un sistema de $n-2$ ecuaciones para determinar la posición de los nodos $x_i, i = 2, \dots, n-1$ o equivalentemente las longitudes $h_i, i = 1, \dots, n-1$ donde se sabe que la suma de dichos valores es la longitud L de la pieza es decir

$$h_1 + \dots + h_{n-1} = L \quad (4.5.51)$$

Ecuación que se puede emplear como ecuación adicional o para eliminar una de las incógnitas.

Una vez determinadas las longitudes de los tramos es inmediato a partir de la relación (4.5.8) determinar las flechas en los nodos mediante

$$u(b) - u(a) = - \frac{u''(b) - u''(a)}{p^2} + \frac{h H_a}{P} + \frac{h^2 f}{2P} \quad (4.5.52)$$

lo que requiere el conocimiento de las curvaturas y de los valores de las cargas nodales de equilibrio en los extremos de cada subintervalo. Las curvaturas en los nodos internos

$x_i, i = 2, \dots, n-1$ son conocidas por hipótesis del procedimiento y también son conocidas en los extremos x_1 y x_n cuando las condiciones de contorno en dichos extremos son dadas fijando los valores de los momentos aplicados. Sin embargo cuando en los extremos se fijan las pendientes entonces debe emplearse la expresión (4.5.11) que da u_a'' en función de u_a' y u_b'' cuando se refiere al nodo x_1 y análogamente la expresión (4.5.12) que da u_b'' en función de u_a'' y u_b' cuando se trata de x_n . Por otra parte también se ha indicado que el método se aplica cuando se pueden determinar los valores de las cargas nodales de equilibrio en los extremos de cada subintervalo luego dichos valores son también conocidos. De esta manera a partir del conocimiento de la flecha o desplazamiento en un extremo, o sea $u(x_1)$ o $u(x_n)$, pueden determinarse de manera inmediata los valores de la flecha en los restantes nodos.

Comentarios

La solución del sistema no lineal anterior se puede obtener por el método de Newton usual o cualquiera de sus variantes. Obsérvese que el problema se ha reducido a un problema no lineal de interpolación a trozos que es de splines generalizados cuando $f = 0$, con nodos intermedios en posiciones desconocidas o longitudes de subintervalos desconocidas. El planteamiento seguido es análogo al utilizado en la construcción de las ecuaciones de los splines generalizados en problemas lineales cuando se sigue el método algebraico, tal y como puede verse en el texto de Ahlberg et al. [ANW67]. Por dicha razón se ha denominado en esta memoria de investigación con el mismo nombre al procedimiento para el análisis del pandeo.

El método algebraico en teoría de splines, como ya se indicó en el punto 3.2.2, resulta ser una generalización de lo que ya se había hecho en análisis estructural en relación con la deducción de la ecuación de los tres momentos por Bertot en 1855 y Clapeyron en 1857. Aquí en definitiva lo que tenemos es un problema que es no lineal al ser las incógnitas las longitudes de los subintervalos, mientras que en los problemas lineales de splines generalizados dichas longitudes son datos y las incógnitas son precisamente las curvaturas. En nuestro caso se están fijando las curvaturas, que al ser las mismas en cada nodo por la izquierda y derecha, siendo al tiempo las rigideces diferentes, dan lugar desde el punto de vista físico a la introducción de unos momentos ficticios como ya se ha indicado en el apartado 4.4 sobre el pilar lineal equivalente. La función que define la deformada, al ser la curvatura la misma por la izquierda y por la derecha, es de la clase C^2 .

El problema al quedar expresado mediante la resolución de un sistema de ecuaciones algebraicas, guarda cierto paralelismo con los sistemas que se planteaban en los modelos discretos con n grados de libertad. El sistema como ocurría en los problemas citados dependiendo del rango de valores de la carga P puede tener una, dos o ninguna solución, al tratarse de un problema con linealidad geométrica y no linealidad del material. Esto se analizó en los modelos discretos y en este apartado se comentará de nuevo en el punto siguiente para el caso de la ménsula, no obstante en el capítulo de ejemplos también se aborda dicha cuestión de manera numérica, determinando las distintas configuraciones de equilibrio. En los problemas de no linealidad del material y no linealidad geométrica puede haber hasta tres soluciones como ya se vio en el apartado citado sobre modelos discretos.

Finalmente hay que indicar que el procedimiento aunque puede desarrollarse también para casos más generales, como los correspondientes a cambio de la ley constitutiva momento curvatura al pasar de unas secciones a otras a lo largo de la pieza, inclusión de cargas puntuales y momentos en puntos intermedios de la directriz y cargas repartidas definidas por una ley genérica, o problemas con cierto grado de hiperestatismo que no permita determinar las cargas nodales de equilibrio en los extremos de cada subintervalo previamente a la determinación de la solución. En todos estos casos la construcción del correspondiente sistema algebraico puede llegar a ser laboriosa. Como por otra parte el método general que proponemos en el apartado siguiente permite abordar estas situaciones más generales se ha preferido por dicho motivo plantear el método algebraico para la resolución de casos simplificados de ménsulas o piezas biarticuladas que por otra parte son los casos más frecuentes en las aplicaciones.

4.5.4 Aplicación al estudio de la ménsula en régimen no lineal

El comportamiento de una ménsula en régimen no lineal puede estudiarse de manera sencilla con el método algebraico. Se puede comprobar en este caso que el problema puede tener una, dos o ninguna configuración de equilibrio, dependiendo del rango de valores de la carga axial P . Se consideran dos casos: por un lado el problema homogéneo de la ménsula, donde la única acción es la carga axial, y por otro el problema no homogéneo, donde además de la carga axial hay una carga repartida uniforme de valor f a lo largo de la directriz, y asimismo una carga horizontal H y un momento M_0 actuando en el extremo libre.

Por simplicidad se supondrá para el desarrollo que sigue que la ley momento curvatura es bilineal y que es la misma para todas las secciones de la pieza. La extensión a casos más generales de leyes trilineales o con mayor número de lados no introduce ninguna complicación conceptual adicional, por lo que es en el capítulo de ejemplos donde se tratan estos problemas que requieren cierto volumen de cálculo.

Caso homogéneo

Sea el caso que se indica en la figura 4.5.7 donde el pilar de longitud L está empotrado por su extremo inferior y libre por el superior y sometido únicamente a la carga axial P . La relación momento curvatura es la bilineal que se muestra en la figura donde la definición analítica de g en la región de curvatura positiva, es decir $\chi = u'' \geq 0$, es

$$g(\chi) = \begin{cases} A_0 \chi, & \chi \in [0, \chi_1] \\ A_1 \chi + B_1, & \chi > \chi_1 \end{cases} \quad (4.5.53)$$

Se supondrá por el momento que g no depende de la carga axial, posteriormente se comentará el caso donde dicha función es de la forma $g(P, \chi)$.

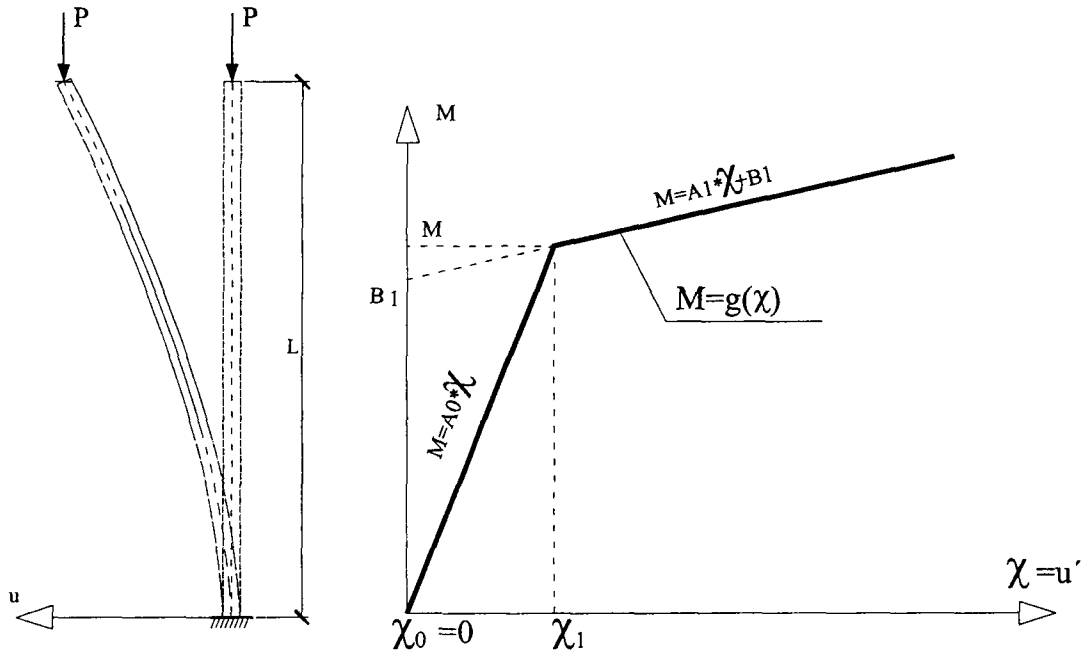


Figura 4.5.7

La cuestión fundamental es dependiendo de los valores de la carga P , determinar las posibles configuraciones de equilibrio o equivalentemente las soluciones de problema de contorno no lineal de autovalores siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} [g(u'')]'' + Pu'' = 0 \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \\ u''(L) = 0 \\ -A_0 u'''(L) - Pu'(L) = 0 \end{array} \right. \quad (4.5.54)$$

Este problema como en el caso lineal homogéneo tiene siempre la solución nula para cualquier valor de la carga P . Supongamos que hay una configuración deformada de tal manera que una porción del pilar tiene momentos flectores superiores a $g(\chi_1)$ o de manera análoga con curvaturas superiores a χ_1 , tal y como se indica en la figura 4.5.8

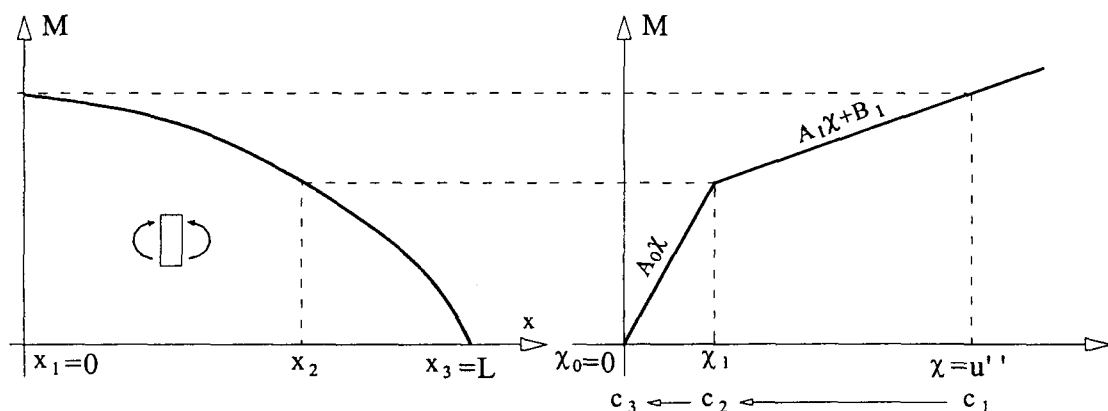


Figura 4.5.8

El pilar queda descompuesto en la unión de intervalos $[x_1, x_2] \cup [x_2, x_3]$ verificando los momentos flectores $M|_{(x_1, x_2)} = a_1 u'' + b_1 = A_1 u'' + B_1$ y $M|_{(x_2, x_3)} = a_2 u'' + b_2 = A_0 u''$. Por otro lado la deformada verifica $a_i u^{(4)} + P u^{(2)} = 0$, $x \in (x_i, x_{i+1})$, $i = 1, 2$, es decir es un spline generalizado que satisface (4.5.49)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(p_1 h_1)} \left[u'_1 - \frac{H_1}{P} \right] + \frac{\text{sen}(p_1 h_1)}{p_1 \cos(p_1 h_1)} \left[c_2 - \frac{f}{P} \right] = \\ = \frac{\cos(p_2 h_2)}{p_2 \text{sen}(p_2 h_2)} \left[c_2 - \frac{f}{P} \right] - \frac{1}{p_2 \text{sen}(p_2 h_2)} \left[c_3 - \frac{f}{P} \right] \end{aligned} \quad (4.5.55)$$

Pero en este caso $u'_1 = 0$, $H_1 = 0$, $f = 0$, $c_2 = \chi_1$ y $c_3 = 0$ luego la ecuación que resulta es

$$\frac{\text{sen}(p_1 h_1)}{p_1 \cos(p_1 h_1)} \chi_1 = \frac{\cos(p_2 h_2)}{p_2 \text{sen}(p_2 h_2)} \chi_1$$

o sea

$$\text{tg}(p_1 h_1) \text{tg}(p_2 h_2) = \frac{p_1}{p_2} \quad (4.5.56)$$

La ecuación anterior guarda gran relación con la correspondiente al pandeo de una ménsula en régimen lineal con dos tramos de distinta rigidez es decir la (4.5.25) donde

$$\text{tg}(p_1 h_1) \text{tg}(p_2 h_2) = \frac{p_2}{p_1}$$

De hecho (4.5.56) se puede deducir de forma inmediata con el mismo procedimiento seguido para obtener (4.5.25). Obsérvese que en el problema de pandeo en régimen

lineal la continuidad del momento flector al pasar en el nodo de la rigidez a_1 a la a_2 se imponía en la forma

$$a_1 u''(x_2^-) = a_2 u''(x_2^+)$$

sin embargo para este caso de pilar en régimen no lineal, la continuidad de la curvatura en x_2 hace que para el pilar lineal equivalente se tenga un momento ficticio de valor

$$M_2 = (a_1 - a_2) u''(x_2) = (a_1 - a_2) \chi_1$$

pues ahora $u''(x_2^-) = u''(x_2^+)$. Véase la figura 4.5.9 donde el momento M_2 es negativo dado que $a_1 < a_2$ y la curvatura es positiva $u''(x_2) = \chi_1 > 0$ luego el sentido en el que actúa dicho momento es en realidad contrario al dibujado.

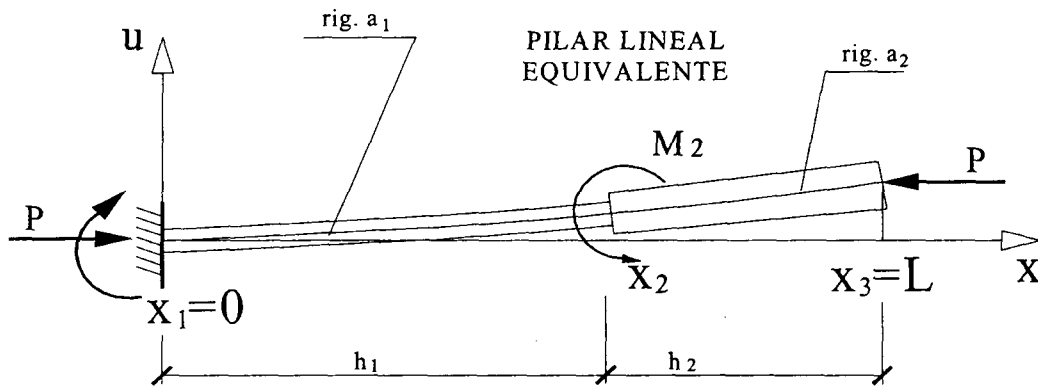


Figura 4.5.9

La deducción, de acuerdo con la notación introducida en las expresiones (4.5.26) y (4.5.27) y teniendo en cuenta la continuidad de las derivadas primeras y segundas en el nodo x_2 es decir $U_2^- = U_2^+ = U_2$, se puede llevar a cabo en la forma

$$U_3 = T_2 U_2 = T_2 T_1 U_1 \quad (4.5.57)$$

o explícitamente

$$\begin{bmatrix} u'(x_3) \\ u''(x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(p_2 h_2) & \frac{\text{sen}(p_2 h_2)}{p_2} \\ -p_2 \text{sen}(p_2 h_2) & \cos(p_2 h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(p_1 h_1) & \frac{\text{sen}(p_1 h_1)}{p} \\ -p_1 \text{sen}(p_1 h_1) & \cos(p_1 h_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(x_1) \\ u''(x_1) \end{bmatrix}$$

Pero $u'(x_1) = 0$, $c_3 = u''(x_3) = 0$, $c_1 = u''(x_1)$ siendo desconocida en principio la curvatura en el nodo x_1

$$\begin{bmatrix} u'(x_3) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(p_2 h_2) & \frac{\text{sen}(p_2 h_2)}{p_2} \\ -p_2 \text{sen}(p_2 h_2) & \cos(p_2 h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \frac{\text{sen}(p_1 h_1)}{p} \\ c_1 \cos(p_1 h_1) \end{bmatrix}$$

de donde

$$0 = c_1 \left[-\frac{p_2}{p_1} \sin(p_1 h_1) \sin(p_2 h_2) + \cos(p_2 h_2) \cos(p_1 h_1) \right] \quad (4.5.58)$$

De la anterior se deduce ya la expresión (4.5.56).

La relación entre las ecuaciones (4.5.56) y (4.5.25) permite enunciar el siguiente resultado

La carga P que curva el pilar en régimen no lineal produciendo un tramo de rigidez $a_1 = A_1$ y longitud h_1 (adyacente al empotramiento) y otro de rigidez $a_2 = A_0$ y longitud $h_2 = L - h_1$ (adyacente al extremo libre) en el pilar lineal equivalente, es la misma carga que la que produce el pandeo en un pilar en régimen lineal (con deformada en equilibrio indiferente) que tiene los dos tramos con las mismas rigideces y longitudes indicadas pero en posiciones permutadas.

Lo anterior se esquematiza en la figura 4.5.10 adjunta

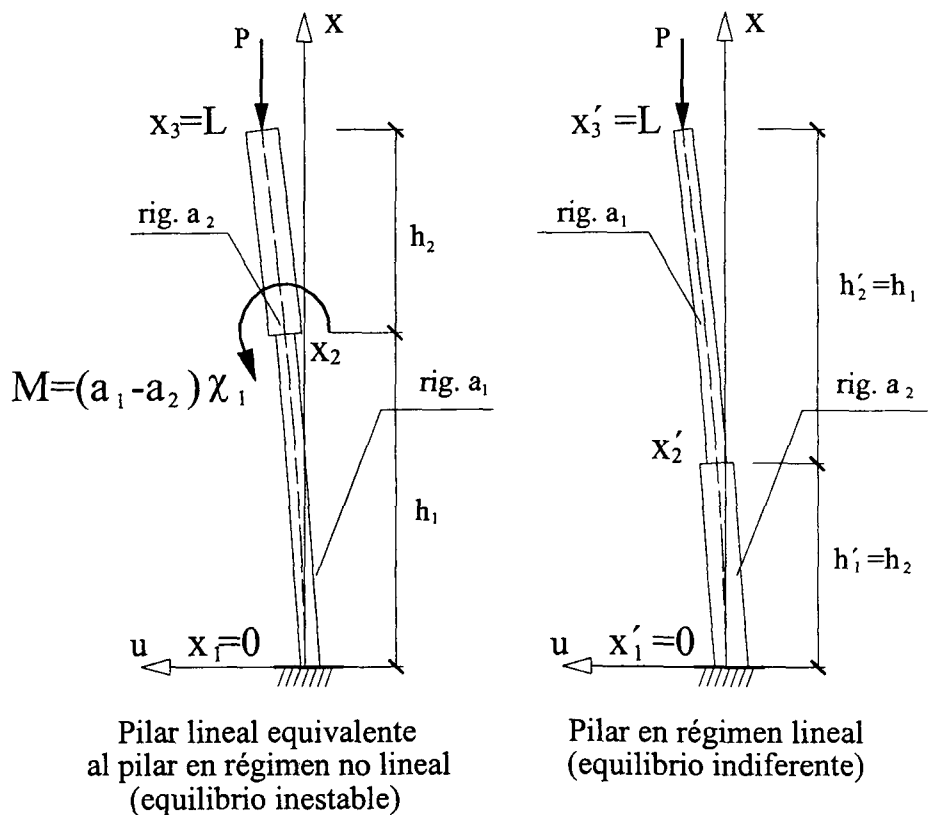


Figura 4.5.10

Se deduce fácilmente de la ecuación (4.5.25) que cuando $h'_1 = h_2$ es próxima a cero y $h'_2 = h_1$ próxima a L la carga P que origina el pandeo del pilar en régimen lineal llevándolo al equilibrio indiferente es próxima a P_{cr1} donde

$$P_{cr1} = \frac{\pi^2 a_1}{4L^2} \quad (4.5.59)$$

De la misma manera cuando $h'_1 = h_2$ es próxima a L y $h'_2 = h_1$ próxima a cero la carga P que pone al pilar en régimen lineal en equilibrio indiferente es próxima a P_{cr2} donde

$$P_{cr2} = \frac{\pi^2 a_2}{4L^2} \quad (4.5.60)$$

El anterior razonamiento nos indica que para valores de P tales que

$$P_{cr1} < P < P_{cr2} \quad (4.5.61)$$

hay configuraciones de equilibrio para el problema en régimen no lineal (4.5.54) distintas de la trivial. Dichas configuraciones son además de equilibrio inestable pues como vamos a ver la flecha en el extremo superior del pilar disminuye monótonamente cuando la carga P crece desde P_{cr1} a P_{cr2} . En efecto de la expresión (4.5.52) se tiene para el pilar en régimen no lineal

$$u(x_2) - u(x_1) = \frac{u''(x_1) - \chi_1}{p_1^2}, \quad u(x_3) - u(x_2) = \frac{\chi_1 - 0}{p_2^2}$$

y asimismo teniendo en cuenta que de la primera de las expresiones de (4.5.11) se puede poner $u''(x_1) = \frac{\chi_1}{\cos(p_1 h_1)}$ y que $u(x_1) = 0$, resulta entonces para la flecha en el extremo la expresión

$$u(x_3) = \left(\frac{1}{p_1^2 \cos(p_1 h_1)} - \frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} \right) \chi_1 \quad (4.5.62)$$

De la misma se deduce que la flecha crece sin límite cuando la carga P decrece y tiende a P_{cr1} , pues en dicho caso $\cos(p_1 h_1)$ tiende a ser cero. Por otra parte cuando P crece y se aproxima a P_{cr2} la flecha disminuye tendiendo al valor $u_3 = \chi_1 / p_2^2$ siendo entonces $p_2^2 = \pi^2 / (4L^2)$ y $u_3 = 4L^2 \chi_1 / \pi^2$. Obsérvese que el momento producido por dicha carga con la flecha indicada es $g(\chi_1) = A_0 \chi_1$.

Lo anterior lo podemos esquematizar como se indica en la figura 4.5.11 donde se representa la trayectoria carga-flecha y donde se puede apreciar que para cada carga P que verifica $P_{cr1} < P < P_{cr2}$ hay dos configuraciones de equilibrio: una vertical (sin deformación) que es estable y una deformada inestable (pues la flecha disminuye al aumentar la carga)

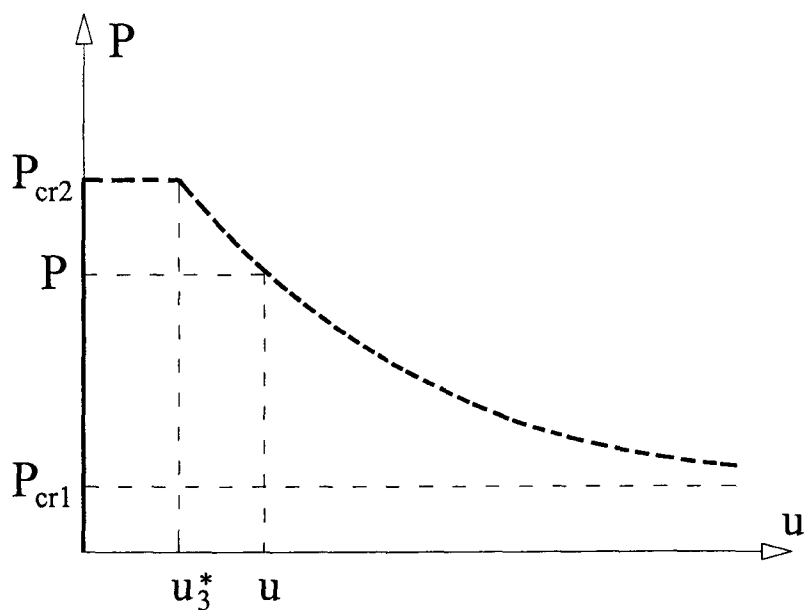


Figura 4.5.11

Asimismo se representa en la figura 4.5.12 las distintas configuraciones de equilibrio del pilar para $P_{cr1} < P \leq P_{cr2}$. Para la carga $P = P_{cr2}$ hay infinitas configuraciones de equilibrio indiferente con flechas en el extremo libre comprendidas entre 0 y u_3^* pues en ellas el pilar se encuentra en régimen lineal y la máxima curvatura en la pieza que se tiene en el empotramiento no ha alcanzado el valor χ_1 . En la misma figura se representa también la pieza para las configuraciones inestables indicadas anteriormente.

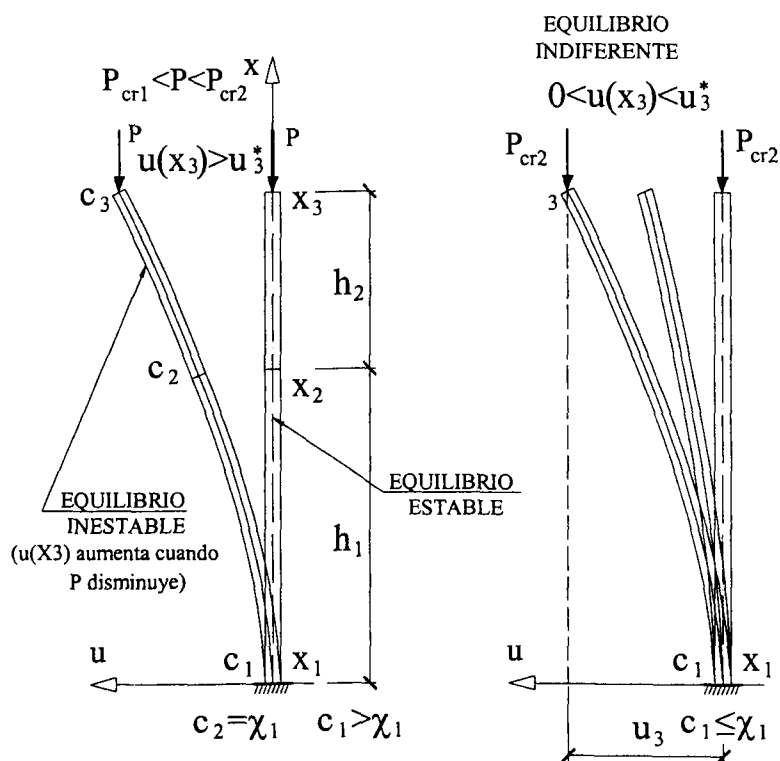


Figura 4.5.12

La ecuación (4.5.46) se puede poner empleando variables adimensionales en la forma

$$\operatorname{tg}(k\lambda\gamma)\operatorname{tg}((1-\lambda)\gamma) = k \quad (4.5.63)$$

donde

$$k^2 = \frac{a_2}{a_1}, \quad \lambda = \frac{h_1}{L}, \quad 0 < \lambda < 1$$

Fijado el valor de k^2 para cada λ , la solución γ de la ecuación anterior permite obtener la carga P que curva el pilar mediante $P = F \times P_{cr2}$ donde el factor F viene dado por

$$F = \frac{4\gamma^2}{\pi^2} \quad (4.5.64)$$

Dicho factor verifica $1/k^2 < F < 1$. En la tabla 4.5.1 adjunta se dan los valores de F en función de k^2 y λ

FACTOR F

$k^2 \mid \lambda$	0.01	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.99
1.1	0.9999	0.9998	0.9957	0.9820	0.9574	0.9257	0.9107
1.5	0.9999	0.9991	0.9787	0.9141	0.8157	0.7132	0.6711
2.0	0.9999	0.9984	0.9573	0.8378	0.6858	0.5539	0.5050
5.0	0.9999	0.9933	0.8305	0.5380	0.3451	0.2363	0.2032
10	0.9999	0.9843	0.6497	0.3267	0.1874	0.1208	0.1018

Tabla 4.5.1

La expresión de la deformada del pilar para cada λ se obtiene a partir de la solución γ de la ecuación (4.5.63) teniendo en cuenta que la misma se compone de dos soluciones a trozos en $[x_1, x_2] \cup (x_2, x_3]$ con $x_1 = 0, x_2 = h_1, x_3 = h_1 + h_2 = L$ dadas en cada intervalo mediante la expresión (4.5.1) quedando esta en forma analítica

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(p_1 x)}{p_1^2 \cos(p_1 h_1)} \chi_1, & x \in [x_1, x_2] \\ \left[\frac{1}{p_1^2 \cos(p_1 h_1)} - \frac{1}{p_1^2} \right] \chi_1 + \frac{1 - \cos(p_2(x - x_2))}{p_2^2} \chi_1 + \frac{\cos(p_2 h_2) \operatorname{sen}(p_2(x - x_2))}{p_2^2 \operatorname{sen}(p_2 h_2)} \chi_1, & x \in (x_2, x_3] \end{cases} \quad (4.5.65)$$

donde $p_1 = \gamma k / L$ y $p_2 = \gamma / L$

Comentarios

Se ha puesto de manifiesto con la aplicación a este caso del método algebraico, que el problema homogéneo de pandeo en régimen no lineal con no linealidad del material tiene soluciones no triviales para cualquier valor de la carga axial cuando ésta cumple que $P_{cr1} < P < P_{cr2}$ y que las mismas son inestables. En el capítulo siguiente de ejemplos y aplicaciones se abordan casos prácticos con leyes trilineales donde se determinan también por el método algebraico las soluciones del problema homogéneo para distintos valores de la carga axial. Por otra parte se ha considerado que la ley momento-curvatura no cambia al modificarse el valor de la carga. En la práctica conviene tener esto en cuenta especialmente cuando la modificación de la ley momento curvatura es significativa. En dicho caso habría que determinar la carga de Engesser que haría las veces de P_{cr2} . Si por ejemplo la superficie mecánica para cada sección por un plano que pasa por el punto correspondiente al valor P , viene dada por una ley momento curvatura bilineal de la forma

$$g(P, \chi) = \begin{cases} A_0(P)\chi, & \chi \in [0, \chi_1] \\ A_1(P)\chi + B_1(P), & \chi > \chi_1 \end{cases} \quad (4.5.66)$$

la determinación de la carga crítica requeriría resolver la ecuación no lineal en la variable P siguiente

$$P = \frac{\pi^2 A_0(P)}{4L^2} \quad (4.5.67)$$

de manera análoga a como se indicó para el caso de los modelos discretos en el punto 4.2.1 de este capítulo. La formulación del problema no lineal de autovalores consistiría en introducir dicha $g(P, \chi)$ en el problema de contorno (4.5.54).

Se desea destacar que el análisis efectuado por el método algebraico propuesto ha permitido con cierta sencillez verificar que cuando se alcanza para este caso de pandeo el valor de la carga crítica P_{cr2} el pilar queda en situación de equilibrio inestable y no indiferente como sucede para el caso de linealidad geométrica y linealidad del material. Cuando se tenía sin embargo linealidad del material y no linealidad geométrica todavía el pilar podía soportar cargas superiores a la crítica en situación estable pero con grandes desplazamientos como se vio en el apartado 2.2.

Caso no homogéneo

Este problema del mismo modo que el homogéneo es de resolución inmediata por el método algebraico. Consideremos una ménsula sometida a las siguientes acciones: una carga axial P , una carga repartida uniforme de valor f , una carga horizontal H y un momento M_0 actuando en el extremo superior. El signo de las acciones f, H y M_0 es positivo. La pieza se encuentra empotrada en la base y libre en el extremo superior como se indica en la figura 4.5.13 y las acciones producen todas en todas las secciones de la pieza un momento flector positivo.

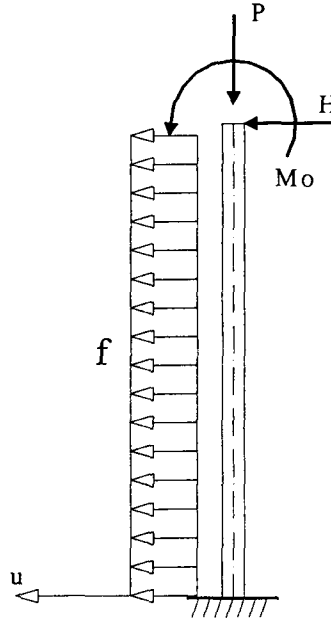


Figura 4.5.13

Todas las secciones tienen la misma relación momento-curvatura, siendo esta la bilineal de la figura 4.5.7 dada por la expresión (4.5.53), o sea

$$g(\chi) = \begin{cases} A_0 \chi, & \chi \in [0, \chi_1] \\ A_1 \chi + B_1, & \chi > \chi_1 \end{cases}$$

El problema de contorno no lineal para este caso es

$$\begin{cases} [g(u'')]'' + Pu'' = f \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \\ g(u'')|_{x=L} = M_0 \\ -[g(u'')]'|_{x=L} - Pu'(L) = H \end{cases} \quad (4.5.68)$$

Se distinguen dos casos dependiendo de que la curvatura producida en el extremo libre del pilar, por el momento M_0 , sea mayor o menor que χ_1 .

Caso 1

Supongamos que el momento en el extremo es $M_0 \geq g(\chi_1)$ entonces la curvatura en todos los puntos del pilar verifica $\chi(u) = u'' \geq \chi_1$ por tanto el problema de contorno no lineal anterior se reduce al problema lineal siguiente

$$\begin{cases} A_1 u^{(4)} + Pu^{(2)} = f \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \\ A_1 u''(L) + B_1 = M_0 \\ -A_1 u'''(L) - Pu'(L) = H \end{cases} \quad (4.5.69)$$

que corresponde al caso de una viga-columna de rigidez A_1 sometida a las mismas cargas que para el problema no lineal, exceptuando el momento, pues para este caso lineal, en lugar de ser M_0 en realidad es $M_0 - B_1$ tal y como se deduce de la tercera condición de contorno.

La curvatura en el extremo superior del pilar es $c_2 = u''(L) = (M_0 - B_1) / A_1 \geq \chi_1$ y la solución puede expresarse directamente teniendo en cuenta, que de la expresión (4.5.11) se deduce la curvatura en el extremo inferior

$$\begin{aligned} c_1 = u''(x_1) &= \frac{f}{P} + \frac{p \operatorname{sen}(pL)}{\cos(pL)} \left[u'(x_1) - \frac{H_{x_1}}{P} \right] + \frac{1}{\cos(pL)} \left[u''(x_2) - \frac{f}{P} \right] = \\ &= \frac{f}{P} + \frac{p \operatorname{sen}(pL)}{\cos(pL)} \left[0 + \frac{H + fL}{P} \right] + \frac{1}{\cos(pL)} \left[c_2 - \frac{f}{P} \right] \end{aligned} \quad (4.5.70)$$

y la deformada viene dada por (4.5.1)

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{c_1 - \frac{f}{P}}{p^2} - \frac{H + fL}{P} x + \left[\frac{c_1 - \frac{f}{P}}{p^2} \frac{\cos(pL)}{\operatorname{sen}(pL)} - \frac{c_2 - \frac{f}{P}}{p^2 \operatorname{sen}(pL)} \right] \operatorname{sen}(px) \\ &\quad - \frac{c_1 - \frac{f}{P}}{p^2} \cos(px) + \frac{x^2 f}{2P} \end{aligned} \quad (4.5.71)$$

siendo $p^2 = P / A_1$.

El desplazamiento del extremo libre es

$$u(L) = \frac{c_1 - c_2}{p^2} - \frac{fL^2}{2P} - \frac{HL}{P} \quad (4.5.72)$$

Como se puede comprobar la gráfica $P - u(L)$, o sea, la relación carga-desplazamiento en el extremo libre, es obviamente de la forma que se indica en la figura 4.5.14 donde la asíntota horizontal corresponde al valor de la carga crítica $P_{cr1} = \pi^2 A_1 / (4L^2)$. Dicha trayectoria es de equilibrio estable como es bien conocido por el estudio de los problemas lineales de pandeo.

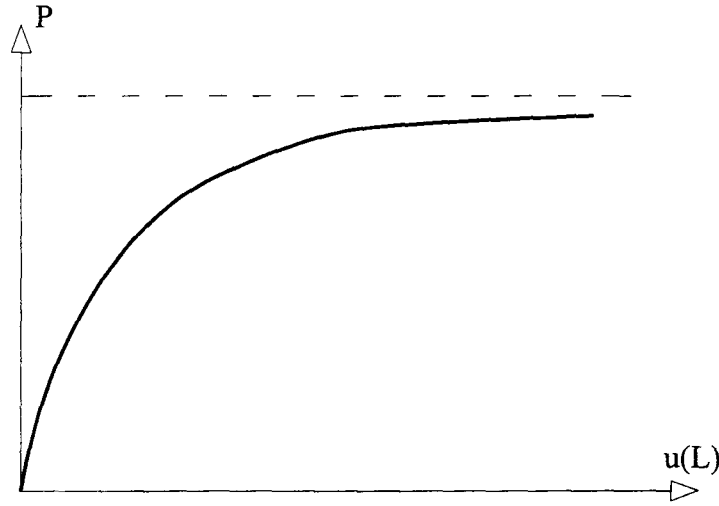


Figura 4.5.14

Caso 2

Ahora supongamos que el momento en el extremo es $0 \leq M_0 < g(\chi_1)$ y que además independientemente del valor de la carga P el momento en el extremo inferior es superior a $g(\chi_1)$. De esta manera hay puntos de la pieza con curvatura inferior a χ_1 y otros con curvatura superior. Como en este caso la ley de flectores es monótona, creciendo desde el extremo superior hasta el inferior. Se tiene de acuerdo con lo expuesto en puntos anteriores que la pieza se puede descomponer en dos subintervalos de longitudes h_1 y h_2 con $h_1 + h_2 = L$ siendo la descomposición $[x_1, x_2] \cup [x_2, x_3]$ donde los momentos flectores verifican de manera análoga al caso anterior

$$M|_{(x_1, x_2)} = a_1 u'' + b_1 = A_1 u'' + B_1$$

$$M|_{(x_2, x_3)} = a_2 u'' + b_2 = A_0 u''$$

y la deformada verifica $a_i u^{(4)} + P u^{(2)} = f$, $x \in (x_i, x_{i+1})$, $i = 1, 2$, Ahora la deformada no es exactamente un spline generalizado debido a la presencia de la acción repartida f . Las curvaturas en los nodos x_i , $i = 1, 2, 3$ vienen dadas por $\chi(u(x_i)) = c_i$ donde c_2 y c_3 son los valores conocidos

$$\begin{aligned} c_2 &= \chi_1 \\ c_3 &= M_0 / a_2 = M / A_0 \end{aligned} \quad (4.5.73)$$

La continuidad de la curvatura en el nodo x_2 obliga, como indica el teorema de equivalencia, a la presencia en dicho de nodo de un momento exterior ficticio de valor

$$M_2 = (a_1 - a_2) u''(x_2) = (A_1 - A_0) \chi_1$$

para el pilar lineal equivalente. Por otra parte la curvatura c_1 es desconocida pero por hipótesis sabemos que es superior a χ_1 . A cambio se tiene el conocimiento de las

condiciones de contorno esenciales en el nodo x_1 , es decir $u(x_1) = u'(x_1) = 0$. Para cada carga P se puede determinar la o las configuraciones de equilibrio correspondientes mediante la ecuación (4.5.49)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(p_1 h_1)} \left[u'_1 - \frac{H_1}{P} \right] + \frac{\sin(p_1 h_1)}{p_1 \cos(p_1 h_1)} \left[c_2 - \frac{f}{P} \right] = \\ = \frac{\cos(p_2 h_2)}{p_2 \sin(p_2 h_2)} \left[c_2 - \frac{f}{P} \right] - \frac{1}{p_2 \sin(p_2 h_2)} \left[c_3 - \frac{f}{P} \right] \end{aligned}$$

En este caso $u'_1 = 0$, $H_1 = -H - fL$, f , $c_2 = \chi_1$, $c_3 = M_0 / A_0$ luego la ecuación que resulta después de eliminar los denominadores $\cos(p_1 h_1)$ y $\sin(p_2 h_2)$ y llamar $x = h_1$ y $L - x = h_2$ es

$$\begin{aligned} \frac{H + fL}{P} \sin[p_2(L - x)] + \frac{\chi_1 - \frac{f}{P}}{p_1} \sin(p_1 x) \sin[p_2(L - x)] \\ - \frac{\chi_1 - \frac{f}{P}}{p_2} \cos(p_1 x) \cos[p_2(L - x)] + \frac{\frac{M_0}{A_0} - \frac{f}{P}}{p_2} \cos(p_1 x) = 0 \end{aligned} \quad (4.5.74)$$

Dicha ecuación establece, fijados los valores de f, H y M_0 una relación entre la carga P y las longitudes h_1 y $h_2 = L - h_1$. De una manera más general, fijada la ley bilineal, la ecuación relaciona realmente las cinco variables siguientes f, H, M_0, P y h_1 . En condiciones adecuadas de regularidad (de acuerdo con el teorema de la función implícita) fijadas tres de las variables se podrá establecer una relación funcional entre las dos restantes. La deformada puede obtenerse de manera inmediata a partir de la expresión (4.5.1) pero teniendo en cuenta que ahora tiene dos leyes. En el intervalo $[x_1, x_2]$ la expresión depende de a_1, p_1, h_1 y las curvaturas c_1 y c_2 y en $[x_2, x_3]$ depende de a_2, p_2, h_2 y las curvaturas c_2 y c_3 . La curvatura c_1 se obtiene como en la expresión (4.5.70) de la (4.5.11)

$$c_1 = u''(x_1) = \frac{f}{P} + \frac{H + fL}{P} \frac{p_1 \sin(p_1 h_1)}{\cos(p_1 h_1)} + \left[\chi_1 - \frac{f}{P} \right] \frac{1}{\cos(p_1 h_1)} \quad (4.5.75)$$

La ecuación anterior (4.5.74) se puede expresar con términos adimensionales poniendo

$$\lambda = \frac{h_1}{L} = \frac{x}{L}, \quad k^2 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{A_0}{A_1}, \quad P = F \times P_{cr2}, \quad F = \frac{4\gamma^2}{\pi^2} \quad (4.5.76)$$

y denominando

$$e_1 = \frac{H + fL}{P}, \quad e_2 = \frac{\chi_1 - \frac{f}{P}}{p_1}, \quad e_3 = -\frac{\chi_1 - \frac{f}{P}}{p_2}, \quad e_4 = \frac{\frac{M_0}{A_0} - \frac{f}{P}}{p_2} \quad (4.5.77)$$

donde p_1 y p_2 se pueden poner en la forma $p_1 = \gamma k / L$ y $p_2 = \gamma / L$. La ecuación (4.5.74) se expresa ahora como

$$e_1 \operatorname{sen}((1 - \lambda)\gamma) + e_2 \operatorname{sen}(k\lambda\gamma) \operatorname{sen}((1 - \lambda)\gamma) + e_3 \cos(k\lambda\gamma) \cos((1 - \lambda)\gamma) + e_4 \cos(k\lambda\gamma) = 0 \quad (4.5.78)$$

A continuación se desarrolla a partir de la resolución de la ecuación anterior un ejemplo que permite analizar el comportamiento de la viga-columna al variar el valor de la carga axial P . En particular se observa como se modifican los valores de la longitud h_1 la curvatura c_1 en el empotramiento y la flecha en el extremo libre.

Ejemplo

Supongamos para un pilar de longitud $L = 8\text{ m}$ como el de la figura 4.5.13, empotrado en la base y libre en el extremo superior, que los parámetros de la ley bilineal son $A_0 = 40000$, $A_1 = 10000$ y $\chi_1 = 0.003$ y los valores de las acciones $f = 2\text{ kN/m}$, $H = 7\text{ kN}$ y $M_0 = 5\text{ kNm}$. Las cargas críticas correspondientes a las rigideces $a_1 = A_1$ y $a_2 = A_0$ son

$$P_{cr2} = 1542.1257\text{ kN}, \quad P_{cr1} = 385.5314\text{ kN}.$$

En la tabla 4.5.2 se indican para cada valor de la carga P la longitud h_1 del tramo $[x_1, x_2]$ de rigidez a_1 del pilar lineal equivalente, la curvatura $c_1 = u''(x_1)$ de la sección situada en la base del pilar, el desplazamiento $u_2 = u(x_2)$ del nodo donde la curvatura es $c_2 = \chi_1$ y el desplazamiento $u_3 = u(x_3)$ del extremo superior. Por otra parte el momento exterior ficticio del pilar lineal equivalente aplicado en el nodo x_2 que hace que, a pesar del cambio de rigideces, la deformada sea de la clase C^2 es

$$M_2 = (a_1 - a_2)\chi_1 = -90\text{ kNm}$$

Dicho momento al ser negativo actúa realmente en el sentido de las agujas del reloj oponiéndose al aumento de curvatura.

Como se puede ver en la tabla, el problema tiene una solución para aquellos valores de la carga axial comprendidos entre 0 y el valor de la carga crítica $P_{cr1} = 385.53\text{ kN}$. Dos soluciones para los valores de P comprendidos entre P_{cr1} y la carga límite $P_{lim} = 443.3263\text{ kN}$ y ninguna solución para cargas superiores a esta última. En este caso la carga límite está muy por debajo de la carga crítica superior P_{cr2} y ligeramente por encima de la inferior P_{cr1} . La flecha en el extremo del pilar para el valor de la carga límite es del orden de 24 cm .

En la figura 4.5.15 se representa la gráfica del desplazamiento en el extremo $u_3(m)$ del pilar en función de la carga $P(kN)$ y el pilar lineal equivalente, correspondiente al pilar en régimen no lineal, para el valor de la carga límite.

$P(kN)$	$h_1(m)$	$c_1(m^{-1})$	$u_2(m)$	$u_3(m)$
0	0.219485	0.00350	0.000078	0.05977
25	0.287110	0.00365	0.000140	0.06098
50	0.357880	0.00381	0.000227	0.06229
100	0.510577	0.00415	0.000491	0.06532
150	0.681746	0.00453	0.000934	0.06904
200	0.877572	0.00497	0.001659	0.07373
250	1.107874	0.00549	0.002856	0.07987
300	1.389991	0.00615	0.004918	0.08838
350	1.760160	0.00705	0.008819	0.10135
385	2.120022	0.00797	0.014208	0.11619
386	2.132368	0.00801	0.014425	0.11675
	7.971710	2.0740*	53.3500*	53.640*
400	2.323627	0.00853	0.018095	0.12570
	7.153757	0.07225	1.447876	1.71878
410	2.488447	0.00899	0.021750	0.13405
	6.587300	0.04391	0.734157	0.98566
420	2.691074	0.00959	0.026954	0.14517
	6.014982	0.03177	0.432230	0.66357
430	2.962570	0.01045	0.035306	0.16173
	5.401544	0.02378	0.262200	0.47164
440	3.431043	0.01210	0.054255	0.19548
	4.615606	0.01776	0.142519	0.32401
442	3.620975	0.01284	0.063932	0.21138
	4.364872	0.01631	0.117174	0.28989
443	3.793892	0.01356	0.073941	0.22714
	4.161876	0.01525	0.099765	0.26546
443.3	3.921173	0.01421	0.082127	0.23961
	4.025612	0.01460	0.089413	0.25044
443.32	3.947492	0.01424	0.083913	0.24228
	3.998695	0.01448	0.087484	0.24759
443.326	3.967165	0.01433	0.085270	0.24431
	3.978842	0.01438	0.086084	0.24552
443.3263	3.971259	0.01435	0.085554	0.24473
	3.974739	0.01436	0.085797	0.24509

Tabla 4.5.2

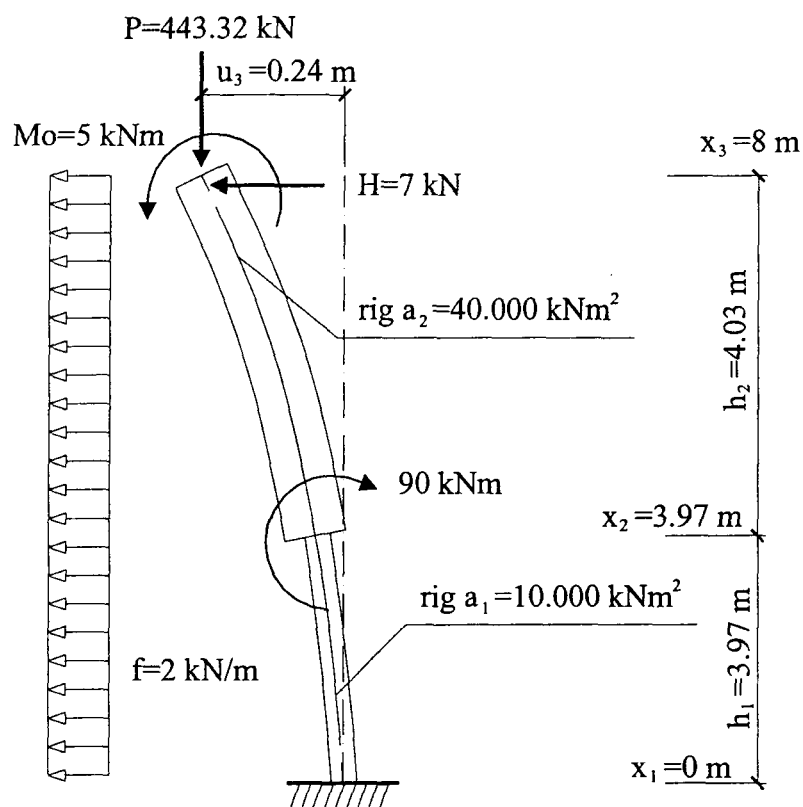
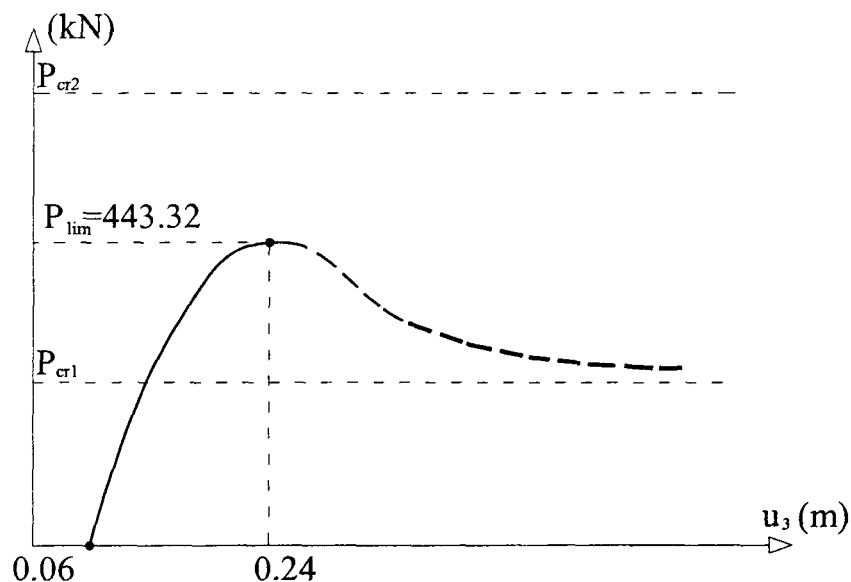


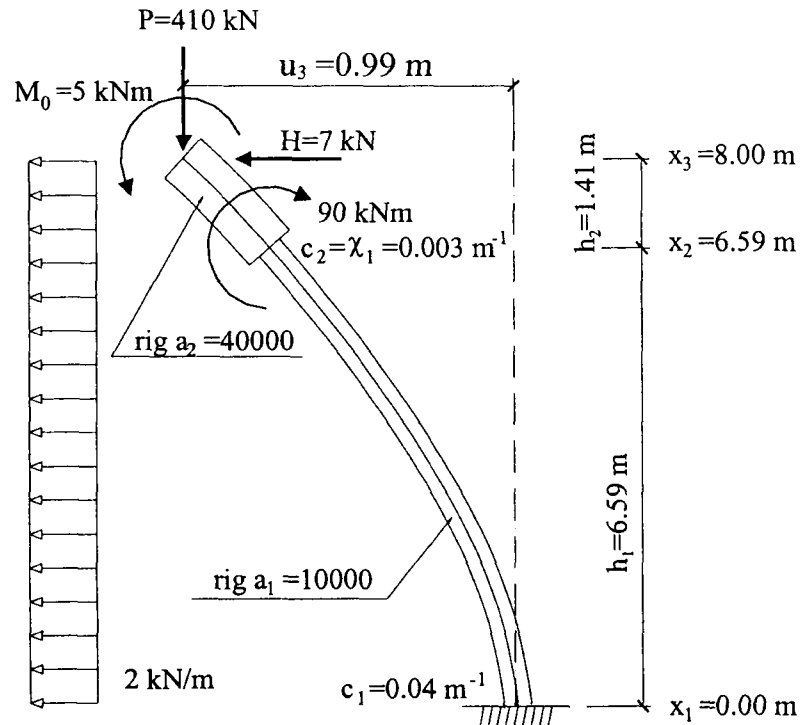
Figura 4.5.15

Es interesante destacar como para una de las soluciones la longitud h_1 del tramo $[x_1, x_2]$ de rigidez pequeña $a_1 = A_1$, la curvatura c_1 en el arranque de la ménsula y la flecha en el extremo crecen a medida que aumenta la carga. Se trata de la solución estable. Sin embargo para la otra solución los hechos suceden a la inversa, al aumentar la carga (siempre por encima del valor P_{cr1}) la longitud h_1 , la curvatura c_1 y la flecha en el extremo disminuyen (valores en cursiva). La carga para la que se igualan los

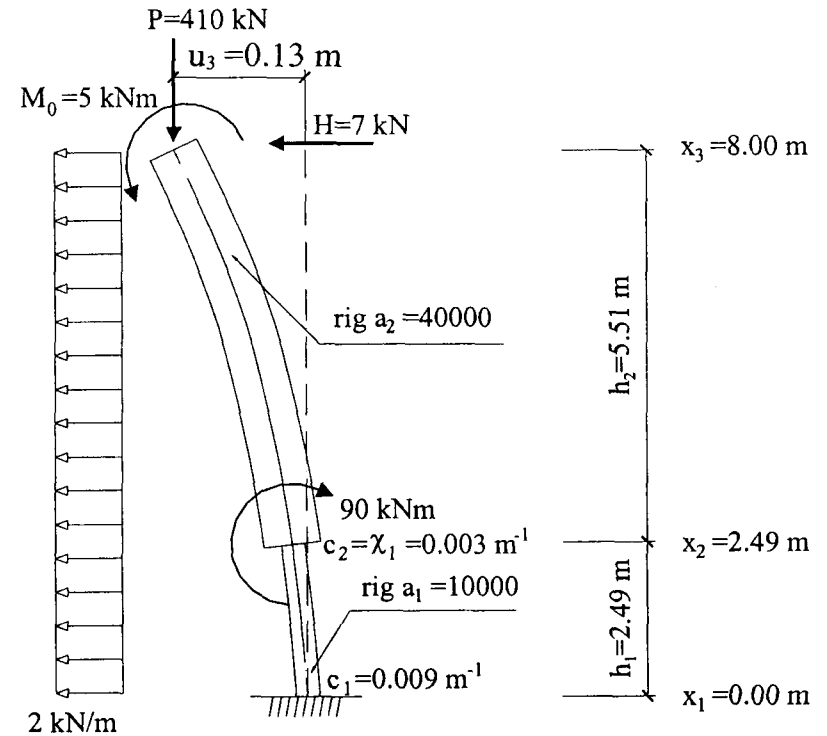
valores indicados de longitud del tramo de rigidez A_1 , curvatura en el empotramiento y flecha en el extremo, de ambas soluciones es P_{lim} . Dicha carga límite representa la capacidad portante del pilar, pues para valores inferiores a dicha carga el pilar se encuentra en situación estable. Por otra parte los valores indicados con (*) para P ligeramente superior a P_{cr1} no tienen sentido físico obviamente. Como se puede ver en este caso de problema de pandeo continuo en régimen no lineal los resultados, sobre la relación carga desplazamiento en el extremo, son análogos en sentido cualitativo a los de la ménsula en los problemas discretos de linealidad geométrica y no linealidad del material, tal y como se ha expuesto en el punto 4.2.1 de esta memoria.

En la figura 4.5.16 se representan las dos situaciones posibles del pilar para una carga P comprendida entre P_{cr1} y P_{lim} que corresponden a las configuraciones de equilibrio estable e inestable del pilar en régimen no lineal. En la figura se ha representado el caso particular relativo a la carga $P = 410 \text{ kN}$ indicando para ambas configuraciones la curvatura en la base del pilar, las longitudes de los dos tramos de la pieza correspondientes a las rigideces $a_1 = 10000$ y $a_2 = 40000$ y el desplazamiento del extremo libre del pilar.

$$P_{cr1}=385.53 \text{ kN} < P=410 \text{ kN} < P_{lim}=443.33 \text{ kN}$$



CONFIGURACIÓN INESTABLE



CONFIGURACIÓN ESTABLE

Figura 4.5.16

4.6 METODO GENERAL PROPUESTO

A lo largo de la memoria se han ido desarrollando los fundamentos que finalmente sirven para justificar el método general de resolución de los problemas de pandeo en régimen no lineal regidos por la ecuación (1.1.1)

$$\left[g(x, P, \chi(u)) \right]'' + Pu'' = f(x)$$

que ha sido el hilo conductor de la presente tesis doctoral.

La singularidad de esta ecuación deriva del término $g(x, P, \chi(u))$ donde $\chi(u) = u''$ ya que se considera la aproximación lineal de la curvatura. El citado término determina en gran medida el comportamiento de la solución de los problemas de contornos relativos a dicha ecuación. Para la aplicación al ámbito de las estructuras y particularmente para el caso de la viga-columna el término citado representa la relación constitutiva momento-curvatura que como se ha indicado depende también de la posición de la sección de la pieza y del valor del esfuerzo axial en dicha sección. La relación una vez fijada la sección y el valor del esfuerzo axial viene representada en el dominio de las curvaturas positivas, por una función creciente con derivada primera decreciente.

El método general que se propone para la resolución de problemas de pandeo en régimen no lineal consiste esencialmente en una utilización combinada de los splines generalizados dentro de la metodología de cálculo con elementos finitos, el concepto de pilar lineal equivalente y simultáneamente el empleo de una homotopía que transforma relaciones constitutivas lineales momento-curvatura para los diferentes tramos de la pieza en las relaciones constitutivas definitivas. Esta combinación permite a través de un proceso de avance y corrección obtener la solución del problema no lineal para el caso de una ley curva momento-curvatura, con tanta aproximación como se desee empleando un número adecuado de elementos.

4.6.1 Generalidades

Los instrumentos necesarios para abordar la solución numérica que se obtiene con el método que se desarrolla en este apartado son:

- La teoría de splines generalizados expuesta en el capítulo tercero. En esencia la aplicación que se hace de la teoría se basa en la utilización del método de los elementos finitos empleando en cada elemento funciones de forma que satisfacen la ecuación diferencial homogénea de la viga-columna relativa al elemento $L(u) = 0$, esto es teniendo en cuenta los valores de la rigidez A y del esfuerzo axial P dentro del elemento. Procediendo de esta forma se garantiza que las soluciones nodales son exactas para los problemas en régimen lineal. Esto es mediante la aplicación del método de los elementos finitos obtenemos los valores exactos de los desplazamientos y giros en los nodos donde se han fijado las condiciones de contorno naturales. Introduciendo dichos valores en las ecuaciones de equilibrio de cada elementos se determinan los valores exactos de los esfuerzos en los nodos. Además a partir del concepto de acción repartida equivalente se obtiene una excelente aproximación a la deformada y a los

valores de los esfuerzos en el interior de cada elemento interpolando con las soluciones de la ecuación diferencial $L^2(u) = 0$ los ocho valores dados u, u', u'' y u''' en los extremos de cada elemento, incluso empleando pocos elementos.

- El concepto de pilar lineal equivalente que permite relacionar dos problemas distintos: uno en régimen no lineal con otro en régimen lineal. Obsérvese que este enfoque permite tratar un problema con rigidez variable y dependiente de la solución con otro con rigidez constante a trozos donde la rigidez en cada tramo también depende de la solución. Esta relación que se establece obliga a la introducción de unos momentos en los nodos de separación de los distintos tramos. Todo ello se concreta en el teorema que hemos denominado de equivalencia.
- El concepto de homotopía que va a permitir pasar gradualmente de un problema en régimen lineal inicial a un problema final en régimen no lineal mediante problemas en régimen lineal sucesivos que resultan a partir del concepto de pilar lineal equivalente. La homotopía se establece para cada uno de los elementos en los que se descompone la pieza, entre una cierta relación lineal momento-curvatura inicial y la relación final no lineal que en realidad tiene el elemento.

Lo anterior se diferencia del método algebraico en que con dicho método planteábamos directamente la equivalencia imponiendo el conocimiento de la curvatura en los nodos pero desconociendo las longitudes de los tramos que eran las incógnitas del método.

En el método que se propone ahora se fijan a priori las longitudes de los distintos elementos en los que se descompone la pieza (aunque estas longitudes pueden corregirse después e incluso introducir nuevos elementos). Además no se limita como en el caso anterior a situaciones de aplicación simplificadas, sino que la metodología se puede aplicar a cualquier problema con estados de carga arbitrario, secciones cuyas características pueden variar de unos elementos a otros y con cualquier número y tipo de restricciones.

La idea del procedimiento consiste en resolver una serie de problemas lineales cuyas soluciones se vayan pareciendo cada vez más, en etapas sucesivas, a la del problema no lineal planteado. En teoría para el caso de relaciones constitutivas momento-curvatura dadas por una poligonal, el método permitiría obtener incluso la solución exacta si los nodos de los elementos se fijan en ciertas posiciones adecuadas. No obstante el método se desarrolla con el propósito de poderse aplicar a cualquier ley momento-curvatura dada por una curva genérica no necesariamente poligonal.

La discretización en elementos finitos de la pieza debe cumplir ciertas condiciones para que la solución obtenida por el procedimiento sea una buena aproximación a la solución exacta del problema. Dichas condiciones se refieren a que el número de elementos y las longitudes de los mismos deben ser adecuadas para recoger los cambios de curvaturas de la pieza en régimen no lineal. Por ello puede ser interesante un análisis cualitativo previo que permita intuir las variaciones de curvatura y los rangos de valores de ésta en la pieza. Además de esto hay una serie

de condicionantes que hay que tener en cuenta para realizar la discretización de la pieza en estudio, como son:

- Variación de la dimensiones de las secciones. Ya que es necesario para el método, que las características de la sección sean constantes en cada elemento.
- La presencia de cargas axiales concentradas que originan la variación del esfuerzo axial. Como en el caso anterior el axial debe ser constante en cada elemento.
- Presencia de momentos en puntos intermedios de la pieza. Para el correcto funcionamiento del método no debe haber momentos concentrados en puntos intermedios de los elementos como se indicó en el apartado del pilar lineal equivalente.
- Puntos donde se imponen condiciones de contorno. Estos puntos se tomarán también como nodos de subdivisión de la pieza en elementos.

Uno de los pasos en la creación de un modelo para el cálculo con elementos finitos consiste en la asignación de la ecuación constitutiva del elemento. En el presente caso en un problema general con condiciones de carga y de contorno genéricas al tratarse de piezas con rigidez variable función de la curvatura, ésta no se conoce a priori.

La distribución de rigideces en la aproximación final va a quedar definida en los elementos por tramos de rigidez constante. Al no conocerse la distribución de rigideces no es posible su resolución directa como en un cálculo lineal por elementos finitos. Por tanto el proceso de determinación de la distribución de rigideces en la pieza requiere llevar a cabo un proceso iterativo en el que en cada paso se resuelve un problema lineal de elementos finitos a partir del concepto de pilar lineal equivalente.

En los algoritmos iterativos usuales de los elementos finitos se utilizan criterios que permiten corregir esfuerzos desequilibrados para lo que se establece un nuevo cálculo. En el método propuesto se modifican las rigideces en dos situaciones una al avanzar en la homotopía y otra dentro del mismo paso de homotopía. En la primera situación la ley momento curvatura se modifica pudiendo llamar a dicha etapa “de avance o predicción” en la segunda sin embargo la ley momento curvatura no se modifica y el proceso que se realiza se puede denominar “de corrección”.

4.6.2 Pasos para la aplicación del método

- 1) Discretización de la pieza en elementos finitos. Se realizará de acuerdo con lo indicado en el punto anterior. Para ello se fijarán los nodos o de manera equivalente las longitudes de los elementos.
- 2) Asignación de una rigidez inicial a cada elemento. Por ejemplo la que corresponde al caso de curvatura nula es decir la dada por el módulo tangente de la ley momento curvatura de cada elemento. Esta es la situación que corresponde en la homotopía para $\lambda = 0$.

- 3) Resolución de un problema lineal con las condiciones de contorno del problema no lineal y las rigideces indicadas en el paso anterior. En este caso no es necesario realizar correcciones.
- 4) Se avanza en la homotopía y por tanto la ley momento-curvatura ya no es lineal. Con las curvaturas del paso anterior se entra ya en la relación constitutiva generada por este paso de la homotopía y se obtienen las nuevas rigideces de cada elemento y asimismo los momentos ficticios calculados con estas rigideces y las curvaturas conocidas.
- 5) Se resuelve con estas rigideces y estos momentos el problema correspondiente al pilar lineal equivalente. Sin avanzar en la homotopía se realizan correcciones sucesivas hasta conseguir la condición de compatibilidad de curvaturas. Cuando se ha llegado a esta situación se da el siguiente paso de homotopía que da lugar a una nueva relación momento-curvatura en cada elemento.
- 6) Con la nueva ley momento-curvatura se lleva a cabo un proceso de correcciones análogo al indicado anteriormente. Y así sucesivamente hasta llegar al último paso de la homotopía para el cual la ley momento-curvatura es la dada inicialmente en cada elemento. Realizando las correcciones correspondientes se llega a una solución aproximada del problema no lineal inicial. Dicha solución puede mejorarse aproximando la solución en el interior de los elementos mediante la aplicación del concepto de acción repartida equivalente.

En todo el proceso de cálculo anterior se ha supuesto constante el axil en cada elemento pero una vez agotado este proceso de homotopía principal en torno a la relación momento curvatura el estado final indicado en el paso 6) puede servir como punto de partida para establecer otros procesos de cálculo en base a otras variables como por ejemplo el axil para el caso en el que se quiera determinar la carga límite. Se puede incluso considerar la modificación de la ley momento curvatura a medida que varía el axil. En esta memoria por simplicidad se ha supuesto que la citada ley no se modifica al variar el axil.

4.6.3 Ejemplo de aplicación.

En este apartado se lleva a cabo el cálculo del ejemplo del apartado 4.5 mediante la aplicación del método general con el que se trata de poner de manifiesto el proceso de cálculo dejando ciertos detalles de la mecánica concreta del método para los primeros ejemplos de dicho método que se desarrollan en el capítulo siguiente.

En la figura 4.6.1 se recogen los datos del problema. La carga axil se considera constante en toda la pieza no existiendo cargas concentradas en puntos intermedios. Por otra parte la ley momentos curvaturas es bilineal.

Se pretende igual que en el caso algebraico determinar la carga límite haciendo crecer gradualmente la carga P por la rama estable hasta llegar al valor P_{lim} para el cual la matriz de rigidez es singular.

Como la ley momentos curvaturas es bilineal en principio se lleva a cabo una discretización con dos elementos. A partir de los resultados obtenidos en esta

discretización se trataría de ajustar la solución aumentando el número de elementos o llevando a cabo una adaptación de las longitudes.

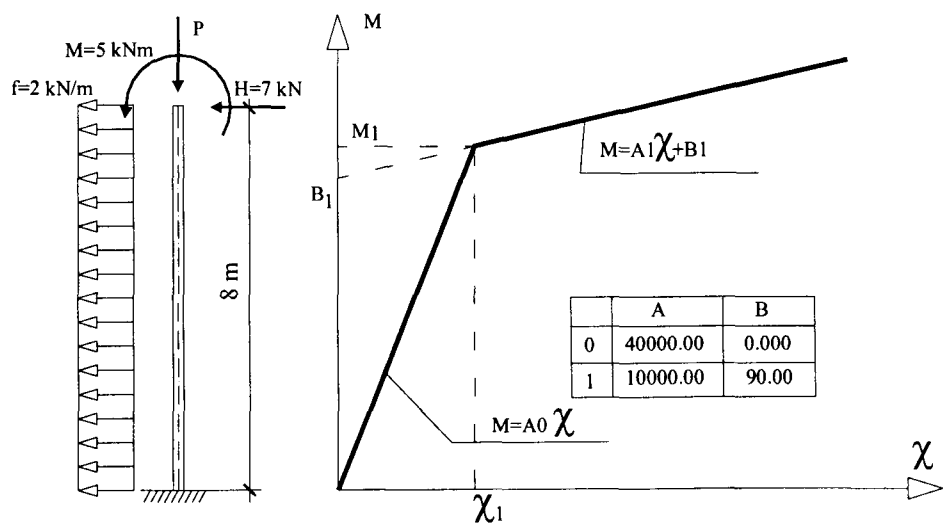


Figura 4.6.1

Desde el punto de vista práctico, en cada cálculo, se determina una primera solución para un caso elástico que permite determinar unas curvaturas iniciales utilizando la rigidez más elevada. A partir de este primer cálculo el proceso sigue con el paso correspondiente al paso de homotopía con $\lambda=0.40$. Los valores de λ para avanzar en la homotopía que se han considerado son 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90 y 1.

NOTA: Para valores inferiores a $\lambda = 0.4$ los cambios respecto a la solución lineal son poco significativos.

En cada paso de homotopía se consideran un cierto número de correcciones fijado excepto en el paso final en el que se aumenta dicho número de modo que los resultado se estabilicen prácticamente para la precisión utilizada.

Con la resolución de los casos siguientes se pone de manifiesto el proceso y los valores que miden la evolución de la solución.

En principio por tratarse de una ley bilineal para la resolución se podría discretizar el pilar con dos elementos. $h_1 = h_2 = 4\text{ m}$.

1.1) Carga $P = 386\text{ kN}$ y dos elementos de la misma longitud.

Homo	itera	u3	c1	a1	a2	M2
1($\lambda=.4$)	1	0.084241	0.004249	35037.07	40000.00	- 8.653
	11	0.085847	0.004362	33656.66	40000.00	- 11.325
2($\lambda=.5$)	1	0.085847	0.004362	33656.66	40000.00	- 11.325
	11	0.088959	0.004574	31477.38	40000.00	- 15.376
3($\lambda=.6$)	1	0.088959	0.004574	31477.38	40000.00	- 15.376
	11	0.093230	0.004863	28944.50	40000.00	- 20.229
4($\lambda=.7$)	1	0.093230	0.004863	28944.49	40000.00	- 20.229
	11	0.099463	0.005284	25962.83	40000.00	- 26.210
5($\lambda=.8$)	1	0.099463	0.005284	25962.79	40000.00	- 26.210
	11	0.109421	0.005952	22397.69	40000.00	- 33.920
6($\lambda=.9$)	1	0.171102	0.008530	22397.55	40000.00	- 33.920
	11	0.128016	0.007186	18053.28	40000.00	- 44.688

7($\lambda=1.0$)	1	0.127943	0.007184	18041.89	40000.00	- 44.770
	11	0.175116	0.010259	12560.77	40000.00	- 63.728
	12	0.175117	0.010259	12560.67	40000.00	- 63.729
	22	0.175117	0.010260	12560.61	40000.00	- 63.729
	23	0.175117	0.010260	12560.61	40000.00	- 63.729
	33	0.175117	0.010260	12560.61	40000.00	- 63.729

Tabla 4.6.1

Como puede verse en el paso de homotopía 7 en el que la relación $M-\chi$ es la final correspondiente a $\lambda = 1.0$ la deformada del extremo libre se estabiliza. La deformación es superior a la exacta, determinada por el método algebraico, debido a la elección de longitudes. En particular dado que el tramo de rigidez débil tiene 4 m. frente a 2.13 m en la solución la pieza se comporta de forma flexible dando lugar a desplazamientos mayores.

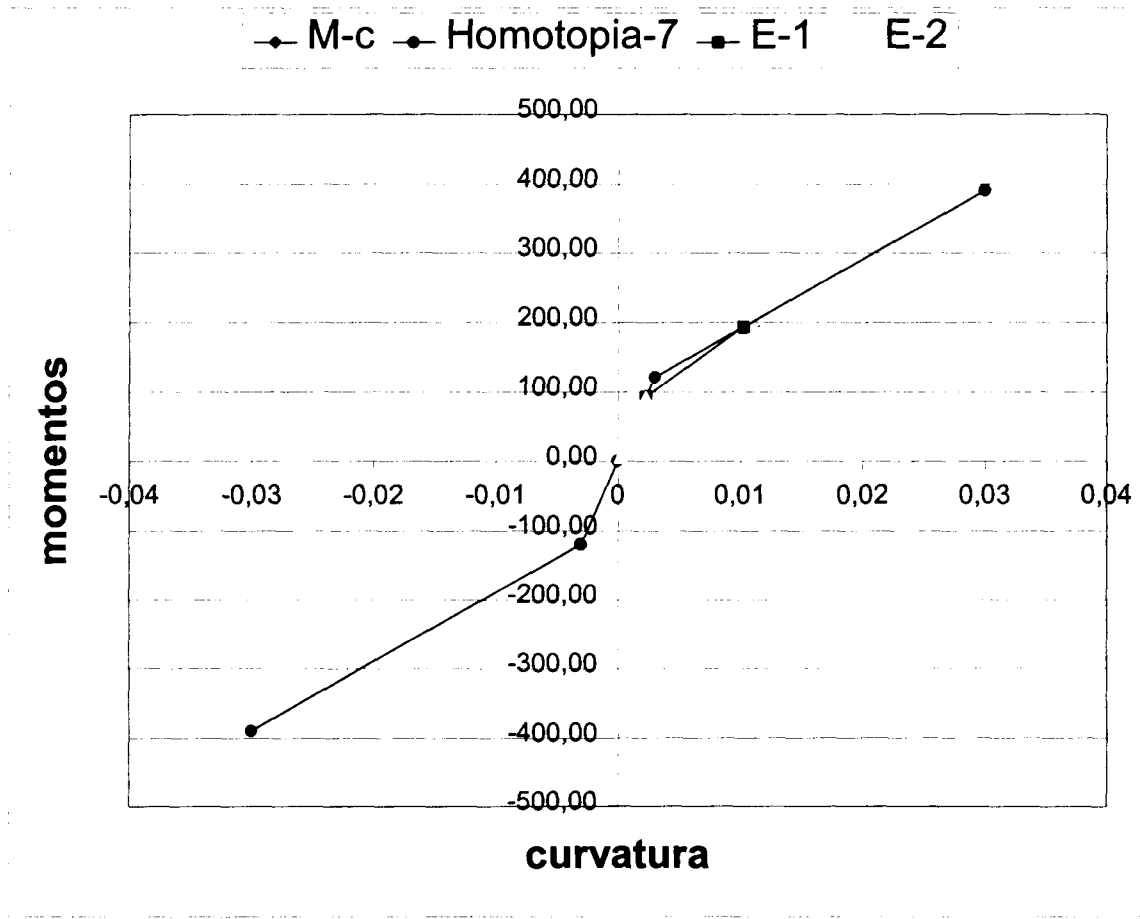


Figura 4.6.2

La distribución de rigideces para el caso de dos elementos se recoge en la figura 4.6.2.

Una forma de mejorar la exactitud como se ha indicado anteriormente sería crear más elementos o variar la longitud estableciendo una adaptabilidad.

A continuación se analizan los resultados correspondientes al caso de emplear cuatro elementos de 2 m. cada uno.

1.2) Carga $P = 386 \text{ kN}$ y cuatro elementos de la misma longitud.

Homo	itera	u3	c ₁	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	M ₂	M ₃	M ₄
1($\lambda=0.4$)	2	0.082328	0.004279	30486.387	40000.000	40000.000	40000.000	- 26.338	0.000	0.000
	11	0.082588	0.004317	29647.643	40000.000	40000.000	40000.000	- 28.950	0.000	0.000
2($\lambda=0.5$)	1	0.082588	0.004317	29591.826	40000.000	40000.000	40000.000	- 29.128	0.000	0.000
	11	0.084164	0.004499	26695.704	40000.000	40000.000	40000.000	- 37.395	0.000	0.000
3($\lambda=0.6$)	1	0.084164	0.004499	26676.329	40000.000	40000.000	40000.000	- 37.457	0.000	0.000
	11	0.086249	0.004741	23641.915	40000.000	40000.000	40000.000	- 46.252	0.000	0.000
4($\lambda=0.7$)	1	0.086249	0.004741	23616.626	40000.000	40000.000	40000.000	- 46.336	0.000	0.000
	11	0.089138	0.005074	20390.131	40000.000	40000.000	40000.000	- 55.961	0.000	0.000
5($\lambda=0.8$)	1	0.089138	0.005074	20401.443	40000.000	40000.000	40000.000	- 55.889	0.000	0.000
	11	0.093409	0.005566	16921.284	40000.000	40000.000	40000.000	- 66.843	0.000	0.000
6($\lambda=0.9$)	1	0.093409	0.005566	17018.299	40000.000	40000.000	40000.000	- 66.332	0.000	0.000
	11	0.100282	0.006363	13170.888	40000.000	40000.000	40000.000	- 79.881	0.000	0.000
7($\lambda=1.0$)	1	0.100604	0.006371	13522.392	40000.000	40000.000	40000.000	- 77.676	0.000	0.000
	33	0.121922	0.008206	10000.000	30201.262	40000.000	40000.000	- 70.507	- 19.493	0.000

Tabla 4.6.2

Nuevamente a partir del paso de homotopía 7 ($\lambda=1.0$). La deformada es superior a la exacta debido a que el segundo elemento tiene una rigidez menor (30201.262 kNm^2) que la real (40000 kNm^2) como puede comprobarse en la figura 4.6.3 de la relación $M-\chi$.

En cualquier caso una discretización con más elementos permite ajustarse mejor a la distribución real de rigideces con una mejora de la solución.

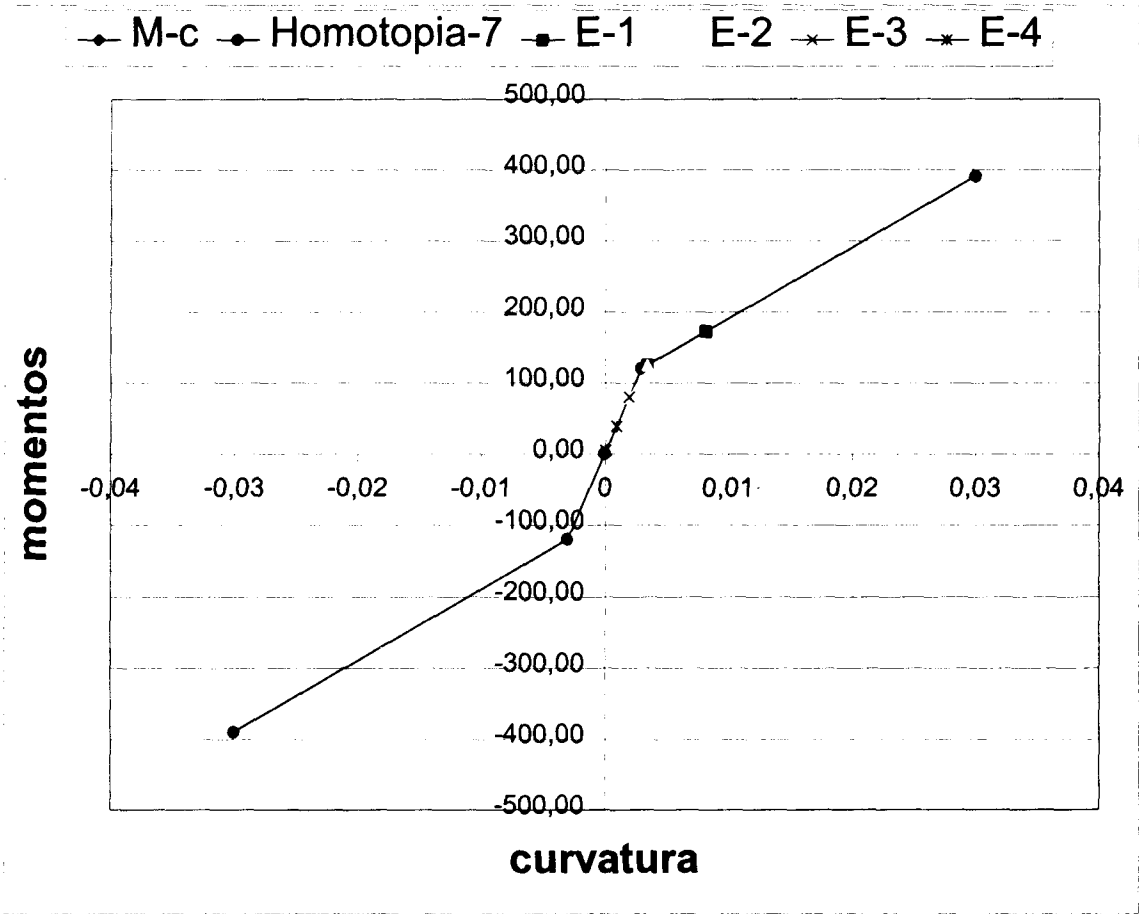


Figura 4.6.3

2.1) Para una carga de $P=410 \text{ kN}$ y dos elementos de la misma longitud

Homo	itera	u3	c ₁	a ₁	a ₂	M ₂
1($\lambda=.4$)	1	0.086496	0.004349	34727.059	40000.000	- 9.426
	11	0.088221	0.004470	33299.866	40000.000	- 12.308
2($\lambda=.5$)	1	0.088221	0.004470	33299.865	40000.000	- 12.308
	11	0.091694	0.004704	31015.848	40000.000	- 16.703
3($\lambda=.6$)	1	0.091694	0.004704	31015.847	40000.000	- 16.703
	11	0.096501	0.005026	28372.301	40000.000	- 21.975
4($\lambda=.7$)	1	0.096501	0.005026	28372.295	40000.000	- 21.975
	11	0.103592	0.005499	25275.078	40000.000	- 28.496

5($\lambda=.8$)	1	0.103592	0.005499	25275.050	40000.000	- 28.496
	11	0.115127	0.006263	21591.231	40000.000	- 36.985
6($\lambda=.9$)	1	0.190035	0.009398	21591.149	40000.000	- 36.985
	11	0.137709	0.007726	17162.167	40000.000	- 48.868
7($\lambda=1.0$)	1	0.137278	0.007717	17099.138	40000.000	- 49.331
	33	0.199557	0.011678	11508.765	40000.000	- 72.420

Tabla 4.6.3

Como se ve en la tabla anterior la solución obtenida se estabiliza en los últimos pasos de la homotopía con una deformación en el extremo libre de 0.199557 m. que es superior a la real.

La distribución de rigideces se recoge en la siguiente figura.

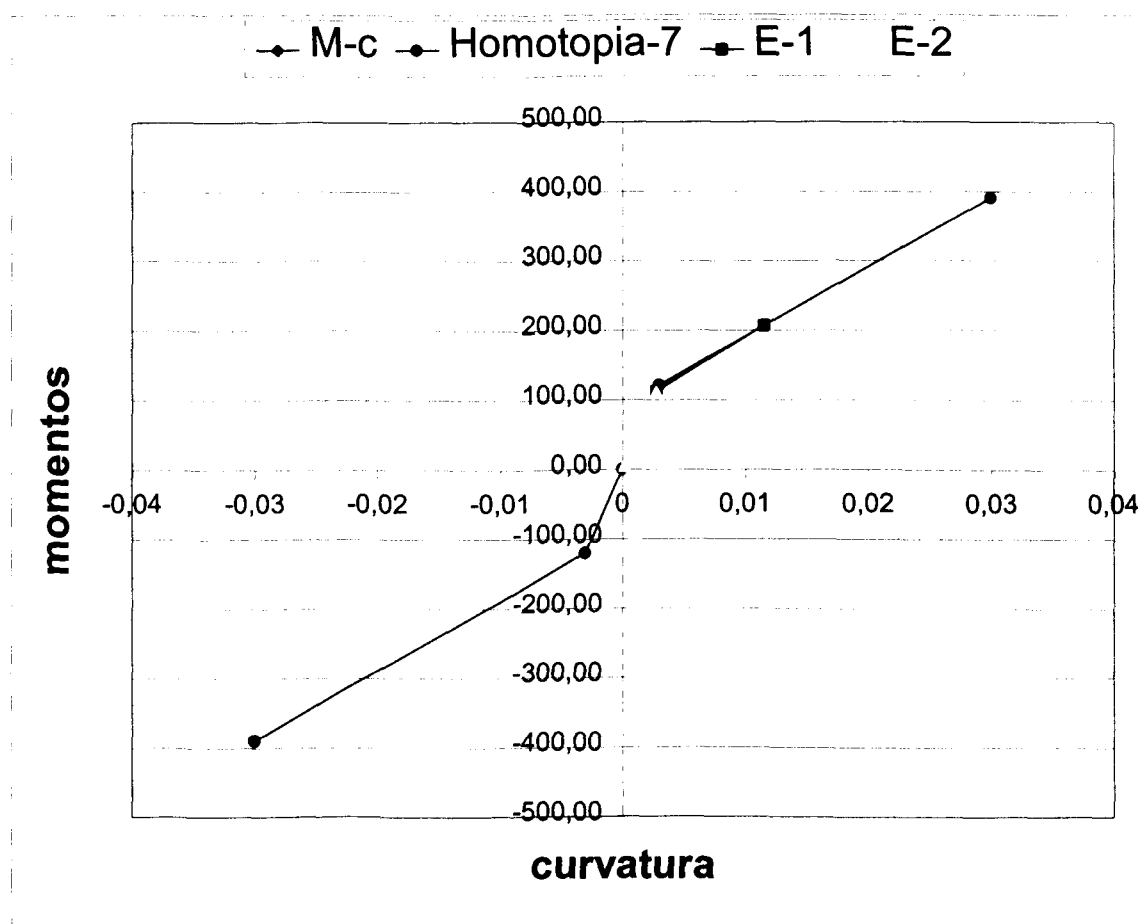


Figura 4.6.4

Si igual que antes se toman cuatro elementos se tiene:

2.2) Carga $P = 410 \text{ kN}$ y cuatro elementos de la misma longitud.

Homo	itera	u3	χ^1	a_1	a_2	a_3	a_4	M_2	M_3	M_4
1($\lambda=0.4$)	2	0.084418	0.004386	29847.537	40000.000	40000.000	40000.000	28.702	0.000	0.000
	11	0.084598	0.004417	29062.509	40000.000	40000.000	40000.000	31.307	0.000	0.000
2($\lambda=0.5$)	1	0.084598	0.004417	29062.509	40000.000	40000.000	40000.000	31.307	0.000	0.000
	11	0.086338	0.004616	26058.311	40000.000	40000.000	40000.000	40.115	0.000	0.000
3($\lambda=0.6$)	1	0.086338	0.004616	26058.311	40000.000	40000.000	40000.000	40.115	0.000	0.000
	11	0.088649	0.004879	22932.828	40000.000	40000.000	40000.000	49.448	0.000	0.000
4($\lambda=0.7$)	1	0.088649	0.004879	22932.828	40000.000	40000.000	40000.000	49.448	0.000	0.000
	11	0.091867	0.005246	19678.163	40000.000	40000.000	40000.000	59.443	0.000	0.000
5($\lambda=0.8$)	1	0.091867	0.005246	19678.190	40000.000	40000.000	40000.000	59.443	0.000	0.000
	11	0.096656	0.005789	16284.103	40000.000	40000.000	40000.000	70.355	0.000	0.000
6($\lambda=0.9$)	1	0.096664	0.005790	16287.700	40000.000	40000.000	40000.000	70.334	0.000	0.000
	11	0.106980	0.006759	13000.000	36214.091	40000.000	40000.000	73.629	7.371	0.000
7($\lambda=1.0$)	1	0.106993	0.006759	13000.000	36179.975	40000.000	40000.000	73.562	7.438	0.000
	11	0.153448	0.009791	10000.000	18717.204	40000.000	40000.000	42.296	47.704	0.000
	22	0.154309	0.009827	10000.000	18327.084	40000.000	40000.000	41.225	48.775	0.000
	33	0.154314	0.009827	10000.000	18324.664	40000.000	40000.000	41.218	48.782	0.000

Tabla 4.6.4

Los resultados se estabilizan a partir del paso 7 de la homotopía aproximándose a la solución exacta. La nueva distribución de rigideces para los cuatro elementos es:

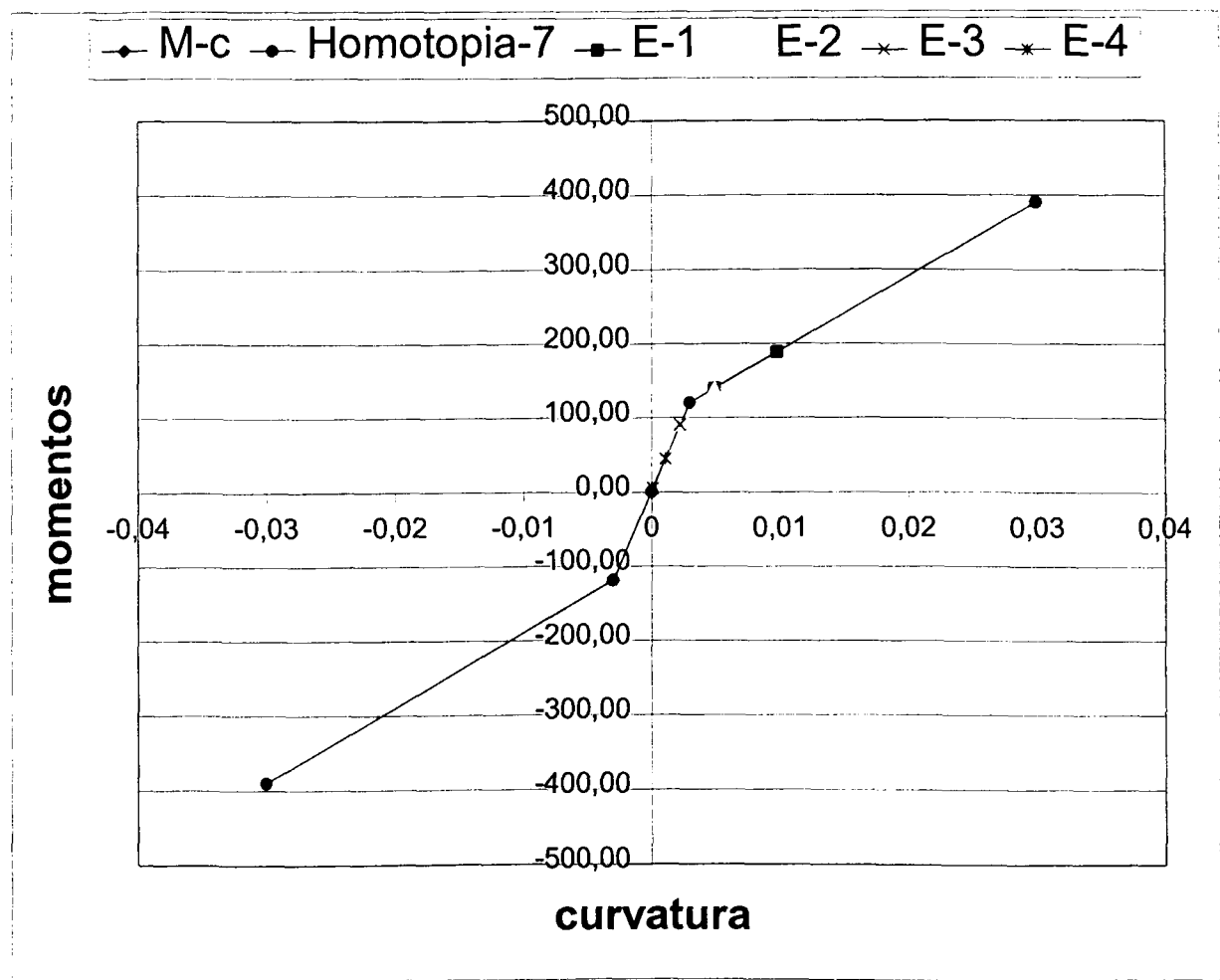


Figura 4.6.5

3.1) Para una carga $P = 440 \text{ kN}$ y dos elementos de la misma longitud

Homot.	Iterac.	u3	c ₁	a ₁	a ₂	M ₂
1($\lambda=.4$)	1	0.089513	0.004484	34329.220	40000.000	-10.466
	11	0.091386	0.004615	32847.927	40000.000	-13.629
2($\lambda=.5$)	1	0.091386	0.004615	32847.927	40000.000	-13.629
	11	0.095371	0.004879	30433.738	40000.000	-18.491
3($\lambda=.6$)	1	0.095371	0.004879	30433.737	40000.000	-18.491
	11	0.100942	0.005246	27654.058	40000.000	-24.338
4($\lambda=.7$)	1	0.100942	0.005246	27654.054	40000.000	-24.338
	11	0.109291	0.005794	24416.270	40000.000	-31.618
5($\lambda=.8$)	1	0.109291	0.005794	24416.256	40000.000	-31.618
	11	0.123220	0.006701	20589.505	40000.000	-41.246
6($\lambda=.9$)	1	0.220507	0.010783	20589.474	40000.000	-41.246

	11	0.154471	0.008591	16257.221	40000.000	-53.305
7($\lambda=1.0$)	1	0.150747	0.008505	15838.123	40000.000	-56.618
	5	0.298024	0.014880	15345.083	40000.000	-27.790

Tabla 4.6.5

Debido a la proximidad del valor de la carga empleado 440 kN con la carga límite que para este caso es de 443.32 kN se observa inestabilidad en el cálculo al ser la matriz de rigidez muy próxima a una matriz singular. En particular después de la iteración 5ª del paso de homotopía 7, la deformada toma valores elevados que rompen con la tendencia anterior (5.24 m), admitiéndose que el sistema se ha vuelto inestable, lo que nos indica la potencia del método empleado, pues únicamente se han utilizado dos elementos y se ha conseguido determinar una carga muy próxima a la límite.

La distribución de rigideces se indica en la figura siguiente.

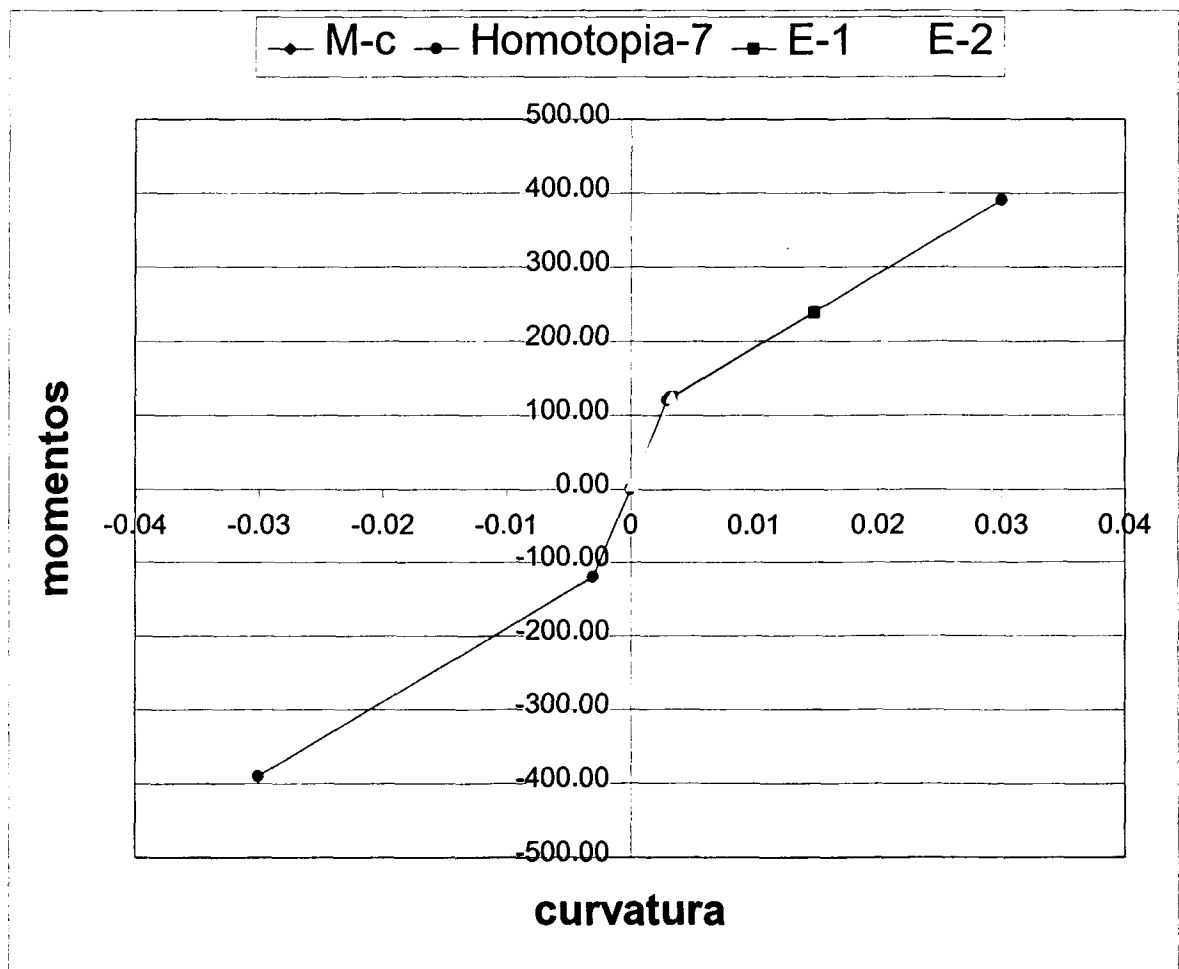


Figura 4.6.6

Si igual que antes se toman cuatro elementos resulta:

3.2) Para una carga $P = 440 \text{ kN}$ y cuatro elementos de la misma longitud

Homo	itera	u3	c ₁	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	M ₂	M ₃	M ₄
1($\lambda=0.4$)	2	0.087222	0.004531	29019.447	40000.000	40000.000	40000.000	-31.887	0.000	0.000
	11	0.087254	0.004550	28400.135	40000.000	40000.000	40000.000	-34.180	0.000	0.000
2($\lambda=0.5$)	1	0.087254	0.004550	28400.135	40000.000	40000.000	40000.000	-34.180	0.000	0.000
	11	0.089221	0.004770	25292.363	40000.000	40000.000	40000.000	-43.605	0.000	0.000
3($\lambda=0.6$)	1	0.089221	0.004770	25292.363	40000.000	40000.000	40000.000	-43.605	0.000	0.000
	11	0.091847	0.005064	22093.796	40000.000	40000.000	40000.000	-53.525	0.000	0.000
4($\lambda=0.7$)	1	0.091847	0.005064	22093.798	40000.000	40000.000	40000.000	-53.525	0.000	0.000
	11	0.096151	0.005490	19000.000	38841.996	40000.000	40000.000	-60.762	-2.238	0.000
5($\lambda=0.8$)	1	0.096151	0.005490	19000.000	38839.655	40000.000	40000.000	-60.757	-2.243	0.000
	11	0.104277	0.006180	16000.000	34997.516	40000.000	40000.000	-62.060	-9.940	0.000
6($\lambda=0.9$)	1	0.104282	0.006180	16000.000	34985.638	40000.000	40000.000	-62.036	-9.964	0.000
	11	0.123587	0.007568	13000.000	26344.732	40000.000	40000.000	-52.069	-28.931	0.000
7($\lambda=1.0$)	1	0.123601	0.007568	13000.000	26327.597	40000.000	40000.000	-52.030	-28.970	0.000
	6	0.215040	0.012962	10000.000	10453.683	40000.000	40000.000	-3.896	-86.104	0.000

Tabla 4.6.6

A partir de la iteración 6ª del paso de homotopía 7 aparece de nuevo la inestabilidad en los resultados como en el caso anterior.

La distribución de rigideces se recoge en la figura siguiente.

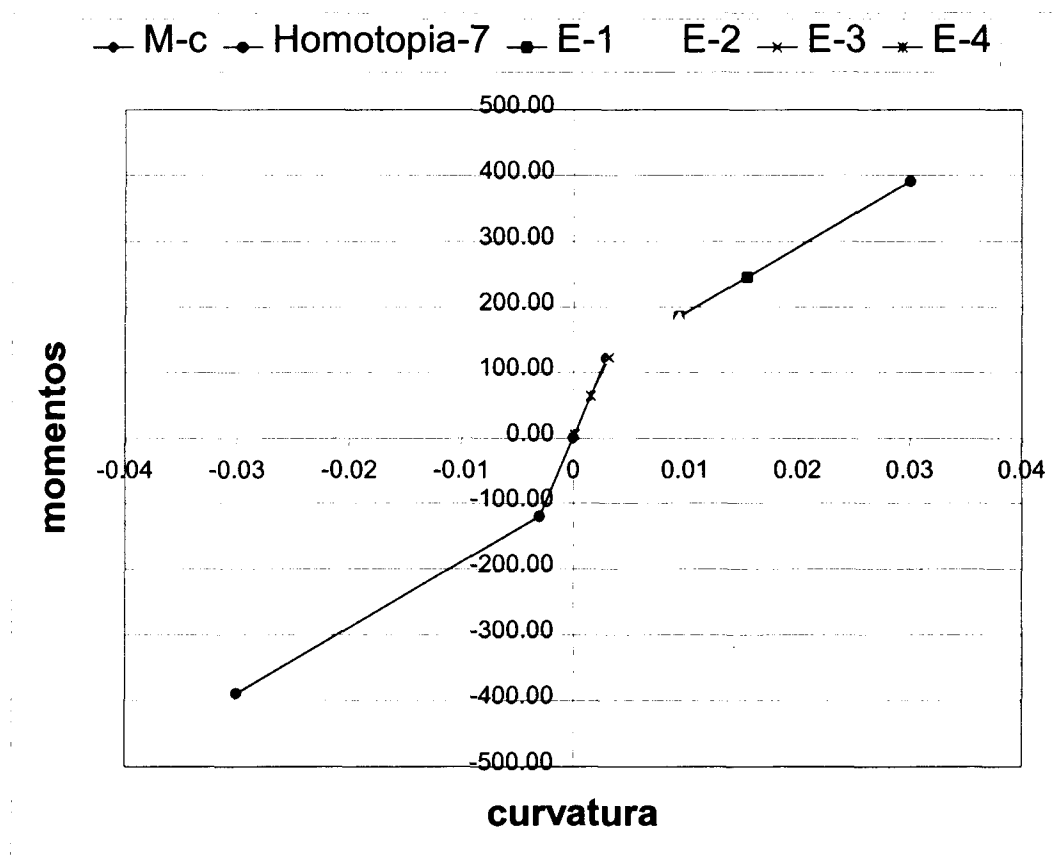


Figura 4.6.7

De acuerdo con estos resultados se puede tomar como carga límite de pandeo $P = 440$ kN próxima a la exacta (443.32 kN). La carga obtenida es menor que la real debido a la asignación de longitudes: la longitud con rigidez próxima o igual a 10000 kNm^2 , es de 4.00 m frente a la longitud de 3.43 m. ello hace que el sistema adoptado es algo más flexible que el que corresponde a la solución exacta para esta carga de 440 kN.

Como puede verse la adaptación de distribución de rigideces resultante respecto de la relación momento curvatura final es un criterio para decidir sobre la bondad de los resultados.

Junto a la posibilidad de discretizar en más elementos para intentar conseguir un mejor ajuste en la relación $M-\chi$, se tiene también otra vía alternativa como es mantener el número de elementos variando su longitud como se hacía en el caso algebraico.

Aplicando esta idea junto con la iteración de Newton se ha conseguido una buena aproximación a la solución exacta como se puede observar en la tabla 4.6.7 donde los valores de la curvatura en el empotramiento c_1 y los desplazamientos u_2 y u_3

correspondientes a los nodos intermedio y final respectivamente y asimismo la longitud de los tramos, pueden compararse con los de la tabla 4.5.2 obtenida con la aplicación del método algebraico.

P	h_1	c_1	u_2	u_3
386	2.1343872	0.00803414	0.014510859	0.117396081
410	2.74876179	0.00930119	0.027228407	0.142043217
440	3.30544714	0.01205748	0.050736783	0.194488267
443	3.40436583	0.0129939	0.058490025	0.214309318

Tabla 4.6.7

4.6.4 Conclusiones.

En relación con la aplicación del método general se pueden destacar los siguientes aspectos:

1. Utilización de la técnica de los elementos finitos.

El método general se basa en la utilización de la técnica habitual de los elementos finitos para resolver una serie de problemas lineales. Esto supone la modelización del problema y su discretización.

2. Asignación de rigideces mediante el uso de una homotopía.

Como se ha indicado anteriormente en un problema con no linealidad del material las rigideces de los elementos están indeterminadas. La asignación de rigideces mediante el uso de la homotopía conlleva un doble proceso tal y como se indica en el ejemplo: avance en los pasos de la homotopía y corrección mediante iteraciones en cada paso de homotopía, que tiene la ventaja sobre los métodos habituales en el método de los elementos finitos de que consigue soluciones exactas en cada cálculo de la iteración de forma que los vértices de la poligonal que linealiza la relación $M-\chi$ se sitúan sobre la curva correspondiente momento curvatura relativa al paso de homotopía.

3. Mejora de la solución mediante un sistema adaptativo:

El ajuste de la distribución de rigideces obtenida con la ley momento curvatura real permite ajustar la solución:

- Aumentando el número de elementos: localizando las zonas en las que se debe aumentar el número de dichos elementos, para aquellos elementos en los que se ha obtenido una rigidez secante a la relación $M-\chi$ real.
- Manteniendo el número de elementos y modificando su longitud: determinando qué elementos deben variar su longitud de forma que la rigidez de los nuevos elementos se ajuste mejor a la real.

4. Variantes.

El método se basa en la utilización de distintas variantes de las técnicas de homotopía que de acuerdo con el problema que se trate de resolver permite ir ajustando la variable que se trata de determinar.

- Homotopía en la rigidez: cuando se trata de determinar la distribución de rigideces que mejor se adapte a la relación $M-\chi$.

- Modificación progresiva de los valores en las cargas: una vez fijada la distribución de rigideces se puede modificar la carga de forma que una ligera modificación de la misma va a dar lugar a una nueva distribución de rigideces que también se adaptará de forma aceptable a la relación $M-\chi$ real. Solo cuando vuelvan a existir diferencias entre una y otra, puede ser conveniente proceder a un nuevo ajuste en la modelización de la pieza de acuerdo con lo indicado en el punto anterior.

CAPÍTULO 5
EJEMPLOS Y APLICACIONES

5.1 MÉTODO ALGEBRAÍCO.

5.1.1 Introducción.

En el presente apartado se desarrollan distintos ejemplos que se resuelven aplicando el método algebraico, mediante los cuales se estudia el comportamiento del pilar en ménsula con carga axial sometido a las siguientes acciones:

- Momento y carga perpendicular a la directriz en el extremo libre.
- Sobrecarga uniforme.

Estas acciones dan lugar a un estado con monotonía creciente en la curvatura desde el extremo libre al empotramiento.

Para su resolución se utiliza un diagrama trilineal momento curvatura. En el que por tanto existe un tramo elástico lineal (Tramo-0) y dos tramos elásticos no lineales (tramo-1 y tramo-2).

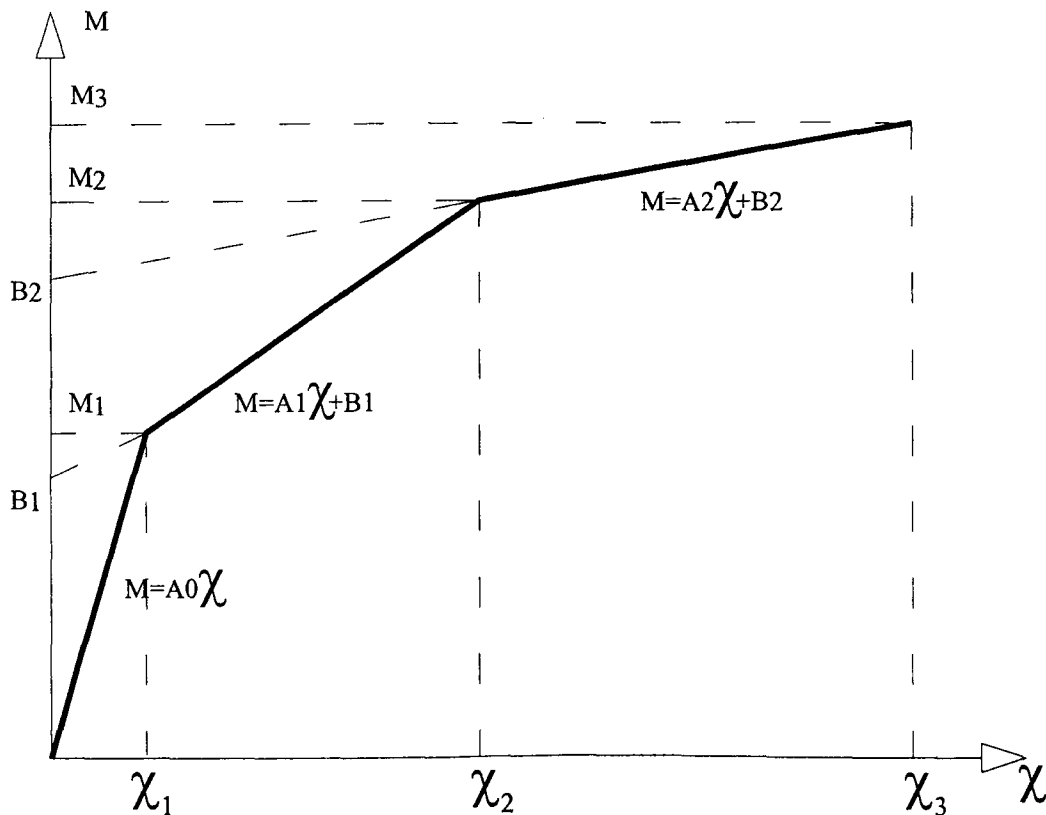


Figura 5.1.1

Los diagramas $M-\chi$ formados por segmentos se pueden considerar como aproximaciones a diagramas $M-\chi$ genéricos. En particular el diagrama trilineal se puede obtener a partir del diagrama $M-\chi$ general. Sobre este diagrama se eligen tres puntos (χ_1, M_1) , (χ_2, M_2) , (χ_3, M_3) que con el origen definen tres segmentos que se adaptan a dicho diagrama. Con estos tres puntos se determinan las ecuaciones de las rectas cuyas pendientes (A_0, A_1, A_2) son las rigideces del pilar lineal equivalente que representan

cada porción de pilar cuando los momentos flectores en la pieza o equivalentemente la curvatura supera en algún punto el valor χ_1 .

Las rigideces mayor y menor permiten conocer las cargas de pandeo del pilar suponiendo que este se comportase de manera elástica y lineal para cada una de ellas. Dichas cargas contribuyen a la descripción del comportamiento de dicho pilar.

En el caso de la ménsula se pueden distinguir dos situaciones que suponen un comportamiento diferente:

a) Ménsula sin momento en el extremo.

En este caso existe un tramo elástico lineal en el extremo libre y dependiendo del valor de las cargas puede dar lugar a que existan: uno (elástico lineal), dos tramos (tramos 0 y 1) o tres tramos (tramos 0-1-2).

Como el análisis del pilar se lleva a cabo haciendo variar las distintas acciones, interesa conocer como evoluciona la transición de los distintos tramos que aparecen en el pilar. Esta evolución viene determinada por la posición de las curvaturas χ_1 y χ_2 en el pilar.

Si el pilar parte de un estado elástico lineal y se va cargando llegará un momento en el que en el empotramiento aparece la curvatura χ_1 dando lugar al agotamiento del tramo elástico apareciendo el tramo-1 de curvaturas en parte del pilar. Cuando las cargas siguen aumentando el punto con curvatura χ_1 , se mueve desde el empotramiento al extremo libre disminuyendo la longitud del tramo elástico y aumentando la del tramo-1. Si continúa este proceso llegará un momento en el que el empotramiento alcanza la curvatura χ_2 , dando lugar a la aparición del tramo-2 de curvaturas en alguna porción del pilar adyacente al empotramiento. A partir de aquí en el pilar existen tres tramos de distinta rigidez de acuerdo con la teoría del pilar lineal equivalente y dos puntos en el pilar con curvaturas χ_1 y χ_2 que se desplazan hacia el extremo libre a medida que aumentan las cargas, reduciéndose la longitud del tramo elástico-lineal y aumentando la longitud del tramo-2.

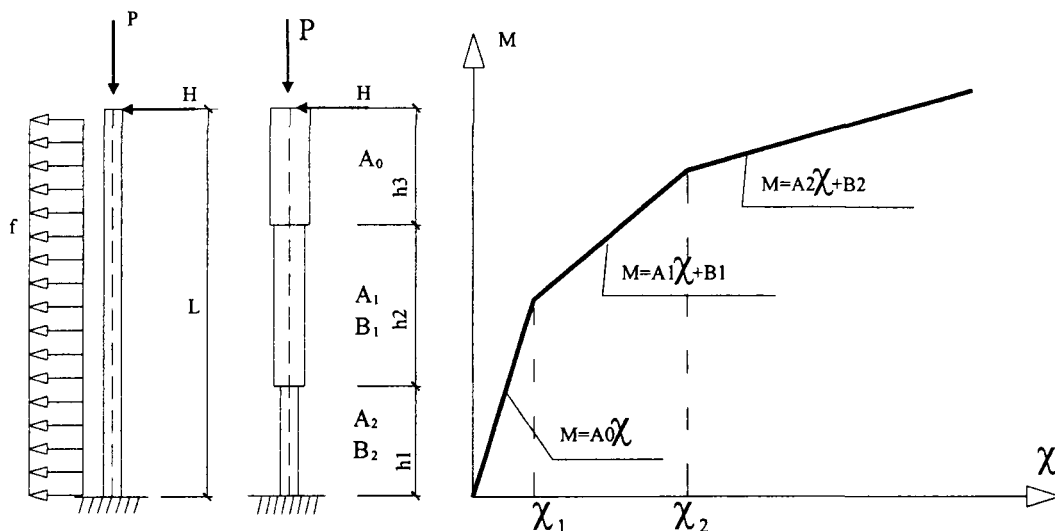


Figura 5.1.2

b) Ménsula con momento variable en el extremo.

La existencia de un momento variable M en el extremo modifica sustancialmente el comportamiento visto en el caso anterior a). En principio el valor del momento puede determinar los tramos sobre el pilar:

- Si $M < A_0\chi_1$ existe un tramo elástico lineal en el extremo libre de forma que la variación de las cargas puede dar lugar a una evolución análoga a la del caso a).

Para el momento fijo M , si se sigue el proceso anterior de aumento de cargas el pilar puede pasar un estado elástico-lineal a tener los tres tramos de curvatura.

- Si $A_0\chi_1 < M < A_1\chi_2 + B_1$, véase figura 5.1.3 el extremo libre se encuentra en el tramo-1 de forma que un aumento de cargas da lugar a que el pilar pase de tener un solo tramo, tramo-1, a dos tramos, tramos 1-2.

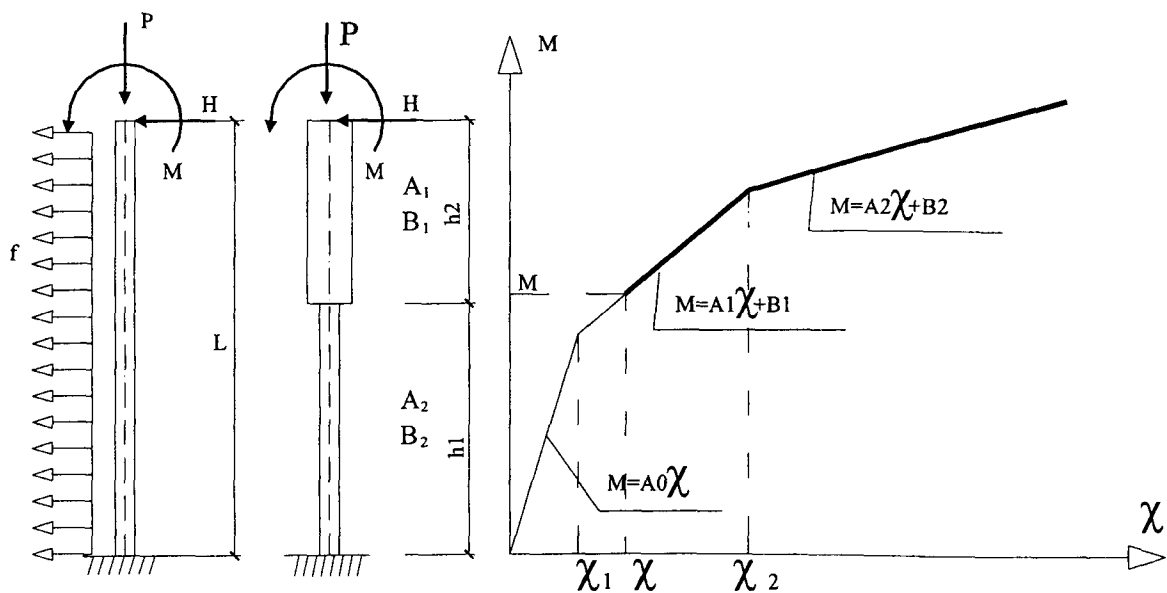


Figura 5.1.3

- Si $A_1\chi_2 + B_1 < M$, solo existe un tramo que está situado en el tramo-2.

El paso de un estado a otro supone a su vez la adaptación de las ecuaciones que representan cada uno de los estados. En los ejemplos siguientes se trata de desarrollar numéricamente estas situaciones.

5.1.2 Ejemplo 1.

Dado un pilar de longitud L , con sección constante en toda su longitud cuya relación constitutiva momento curvatura se caracterizada por un diagrama trilineal, se trata de analizar el caso homogéneo cuando se encuentra sometido a un axil P .

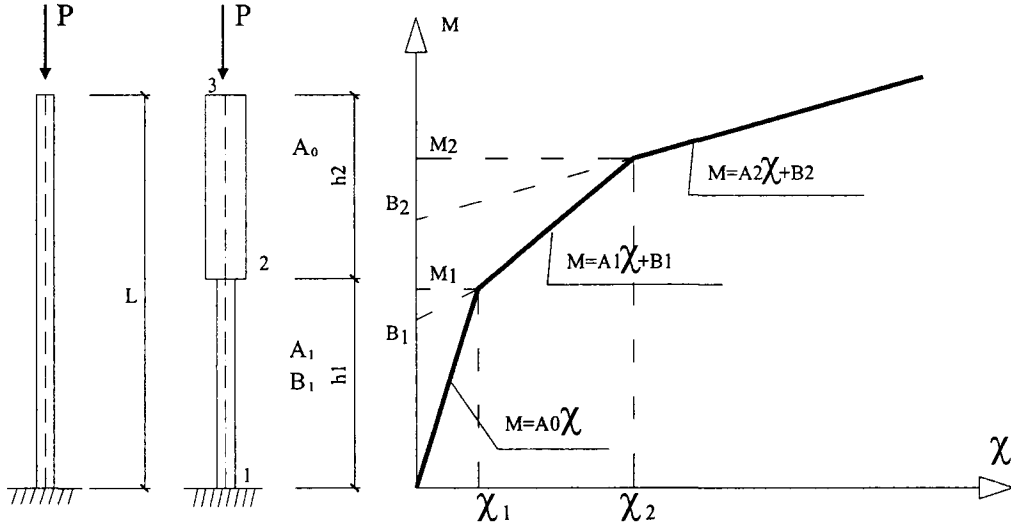


Figura 5.1.4

Se va a determinar el valor de la carga axil P'_2 mediante la que se agota el segundo tramo de forma que el pilar quede con un tramo elástico de longitud h_2 con curvaturas $\chi \in [0, \chi_1]$ y otro de longitud h_1 con curvaturas $\chi \in [\chi_1, \chi_2]$ (véase figura 5.1.4) para lo cual interesa analizar la deformada del elemento 1 (tramo-1) cuyos resultados se utilizan posteriormente.

Como se ha indicado en el punto 4.5.4, para una ménsula con carga axil el tramo del empotramiento satisface la ecuación:

$$a_i u^{(4)} + P u^{(2)} = 0 \quad (5.1.1)$$

Con $a_i \in \{A_0, A_1, A_2\}$, $x_1 = 0$, $x_2 = h_1$, $x_3 = h_1 + h_2 = L$ y $H = 0$ y $M = 0$ ya que el problema es homogéneo.

Teniendo en cuenta las condiciones:

$$\begin{aligned} u(x_1) &= u'(x_1) = 0 \\ u''(x_1) &= c_1 = \chi_2 \\ u''(x_2) &= c_2 = \chi_1 \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

y las expresiones de (4.5.65) se obtienen las relaciones

$$u(x) = \frac{\chi_2}{p_1^2} [1 - \cos(p_1 x)] \quad (5.1.3)$$

como en el extremo final del tramo-1 la curvatura es χ_1 , queda

$$u(x) = \frac{\chi_1}{p_1^2 \cos(p_1 h_1)} [1 - \cos(p_1 x)] \quad (5.1.4)$$

El comportamiento de un pilar con sección constante con relación momento curvatura viene dado por un diagrama trilineal $M-\chi$, véase la figura 5.1.5, para un problema homogéneo como el indicado tiene una relación carga desplazamiento como la recogida en la gráfica de la parte derecha de la figura.

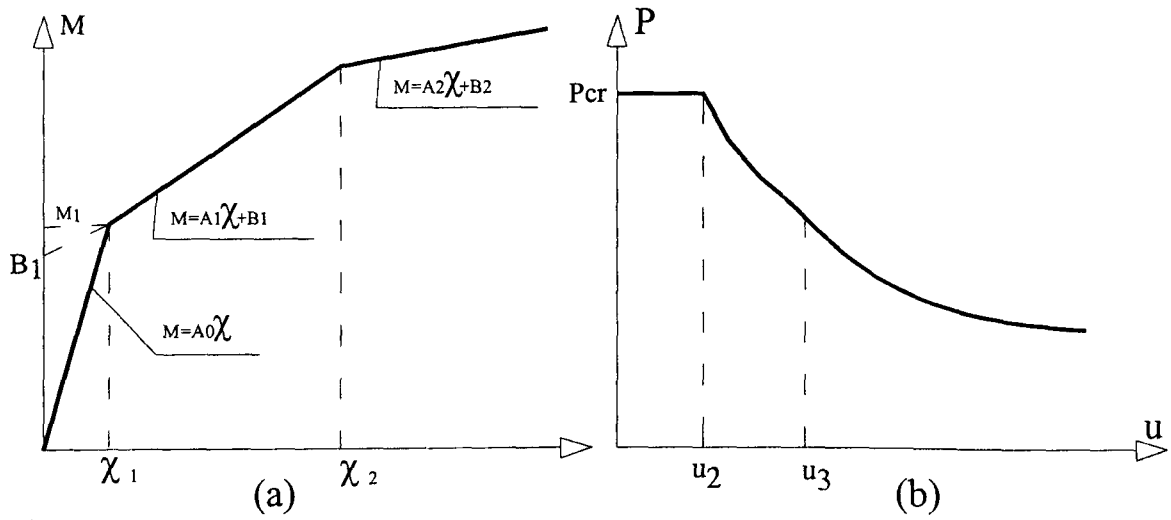


Figura 5.1.5

Para el pilar en estado elástico con un solo tramo de rigidez A_0 , la carga de bifurcación es:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 A_0}{4L^2} \quad (5.1.5)$$

Para esta carga se produce una situación de equilibrio indiferente. De forma que si u_2 es el desplazamiento en el extremo para el cual la curvatura en el empotramiento es $c_1 = \chi_1$ para desplazamientos u en el extremo menores que u_2 el equilibrio es indiferente (figura 5.1.5) ya que el pilar se encuentra en régimen elástico en toda su longitud. Para el desplazamiento u_2 , el momento en el empotramiento es:

$$M_1 = A_0 \chi_1 = P_{cr} u_2$$

Por tanto:

$$u_2 = \frac{A_0 \chi_1}{P_{cr}} \quad (5.1.6)$$

Para desplazamientos mayores $u_2 < u$, en la parte inferior del pilar existe un tramo de longitud h_1 con curvaturas en el tramo $[\chi_1, \chi_2]$.

Interesa conocer la carga P'_2 que da lugar a que en el empotramiento la curvatura sea χ_2 y por tanto

$$M_1 = A_1 \chi_2 + B_1$$

Para un pilar con dos tramos uno de ellos en régimen elástico lineal, la solución es:

Para el tramo-1, próximo al empotramiento:

$$u(x) = \frac{A_1 \chi_2}{P'_2} [1 - \cos(p_1 x)] = \frac{\chi_1}{p_1^2 \cos(p_1 h_1)} [1 - \cos(p_1 x)] \quad (5.1.7)$$

con

$$p_1 = \sqrt{\frac{P'_2}{a_1}}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{P'_2}{a_2}},$$

donde $a_1 = A_1, a_2 = A_0$

Si $u''(0) = \chi_2$, cuando en el empotramiento se alcanza la curvatura χ_2 :

$$h_1 = \arccos\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right) \sqrt{\frac{A_1}{P'_2}} \quad (5.1.8)$$

Para el caso homogéneo (4.5.56), se tiene la relación:

$$\frac{p_1}{p_2} = \operatorname{tg}(p_1 h_1) \operatorname{tg}(p_2 (L - h_1))$$

Sustituyendo las relaciones anteriores, se tiene la ecuación en función de P'_2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_2} \sqrt{\frac{P'_2}{A_1}} &= \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{P'_2}{A_1}} \arccos\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right) \sqrt{\frac{A_1}{P'_2}}\right) \operatorname{tg}\left[p_2 \left(L - \arccos\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right) \sqrt{\frac{A_1}{P'_2}}\right)\right] \\ \sqrt{\frac{A_0}{A_1}} &= \operatorname{tg}\left(\arccos\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right)\right) \operatorname{tg}\left[\sqrt{\frac{P'_2}{A_0}} L - \sqrt{\frac{A_1}{A_0}} \arccos\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right)\right] \end{aligned}$$

Operando queda finalmente:

$$P'_2 = A_2 \left[\frac{1 + \sqrt{\frac{A_1}{A_0}} \operatorname{tg} \left(\arccos \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right) \right) \operatorname{tg} \left[\sqrt{\frac{A_1}{A_2}} \arccos \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right) \right]}{L \left(\sqrt{\frac{A_1}{A_0}} \operatorname{tg} \left(\arccos \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right) \right) - \operatorname{tg} \left[\sqrt{\frac{A_1}{A_2}} \arccos \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right) \right] \right)} \right]^2 \quad (5.1.9)$$

que permite hallar P'_2 .

Sustituyendo en (5.1.8), (5.1.7) se tiene finalmente u_3 :

$$u_3 = \frac{A_1 \chi_2}{P'_2}$$

Al representar el diagrama P-u, la bifurcación aparece en el punto $(0, P_{cr})$, para desplazamientos $u \in [0, u_2]$ la carga se mantiene constante en $P = P_{cr}$. Para cargas $P \in [P_{cr}, P'_2]$, el pilar se comporta con dos tramos de longitudes h_1 y h_2 .

Se considera el pilar siguiente cargado axialmente.

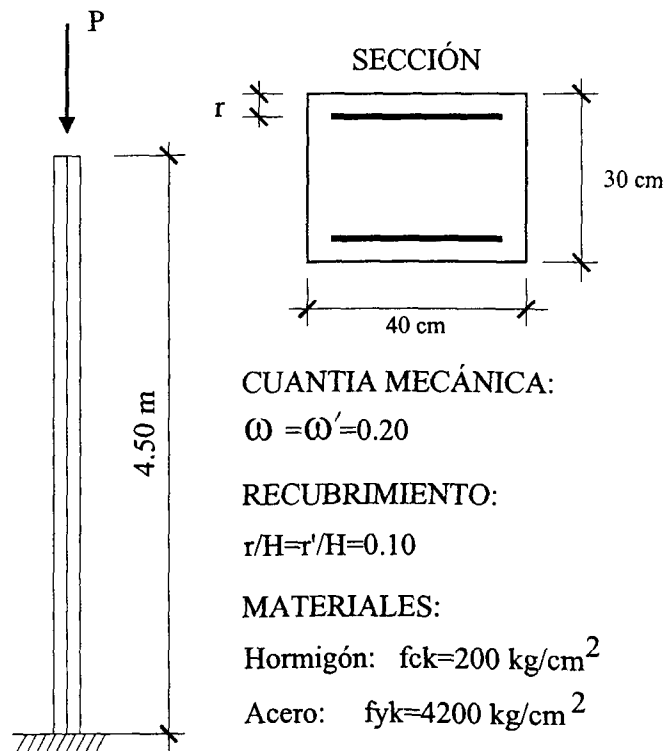


Figura 5.1.6

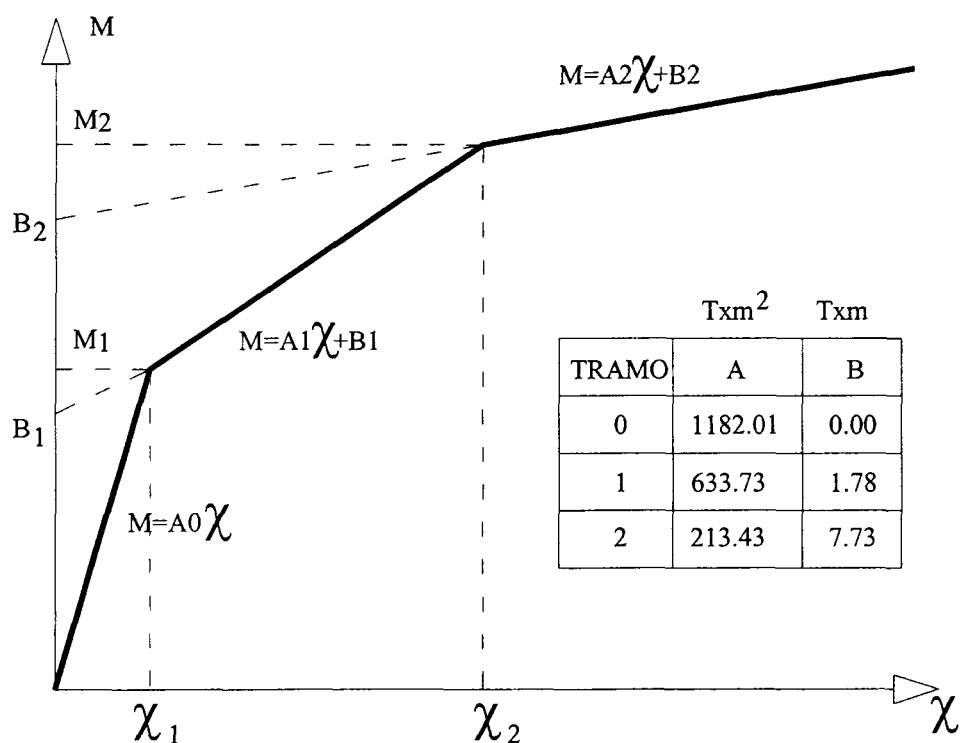


Figura 5.1.7

PUNTO	χ	M
1	0.003257	3.850
2	0.014142	10.748

Carga de bifurcación:

$$P_{cr0} = \frac{\pi^2 A_0}{4L^2} = \frac{3.1416^2 * 1182.01}{4 * 4.50^2} = 144.02 \text{ t.}$$

Carga P'_2 :

$$P'_2 = A_0 \left[\frac{1 + \sqrt{\frac{A_1}{A_0}} \operatorname{tg} \left(\arccos \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right) \right) \operatorname{tg} \left[\sqrt{\frac{A_1}{A_2}} \arccos \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right) \right]}{L \left(\sqrt{\frac{A_1}{A_0}} \operatorname{tg} \left(\arccos \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right) \right) - \operatorname{tg} \left[\sqrt{\frac{A_1}{A_2}} \arccos \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right) \right] \right)} \right]^2 =$$

$$1182.01 \left[\frac{1 + \sqrt{\frac{633.73}{1182.01}} \operatorname{tg} \left(\arccos \left(\frac{0.003257}{0.01412} \right) \right) \operatorname{tg} \left[\sqrt{\frac{633.73}{1182.01}} \arccos \left(\frac{0.003257}{0.01412} \right) \right]}{4.50 \left(\sqrt{\frac{633.73}{1182.01}} \operatorname{tg} \left(\arccos \left(\frac{0.003257}{0.01412} \right) \right) - \operatorname{tg} \left[\sqrt{\frac{633.73}{1182.01}} \arccos \left(\frac{0.003257}{0.01412} \right) \right] \right)} \right]^2 = 97.53 \text{ t.}$$

Carga de paso del tramo 2 al 1:

$$P'_2=97.53 \text{ t.}$$

Las Cargas críticas para los distintos tramos son:

$$P_{cr0} = 144.02 \text{ t.}$$

$$P_{cr2} = \frac{\pi^2 A_2}{4L^2} = \frac{3.1416^2 * 213.43}{4 * 4.50^2} = 26.00 \text{ t}$$

Deformada en el extremo en la que se produce el paso del tramo 0 al 1.

$$u_2 = \frac{A_0 \chi_1}{P_{cr}} = \frac{1182.01 * 0.003257}{144.02} = 0.0268 \text{ m}$$

Tabla de valores representativos de la ménsula al variar la carga P

P	L ₀	L ₁	L ₂	u	c ₁	M ₁
144	4.278	0.221	0.000	0.0268	0.00327	3.861
140	3.275	1.224	0.000	0.0303	0.00388	4.247
135	2.869	1.630	0.000	0.0341	0.00446	4.614
130	2.573	1.962	0.000	0.0384	0.00506	4.996
125	2.321	2.178	0.000	0.0434	0.00574	5.425
120	2.089	2.410	0.000	0.0493	0.00653	5.926
115	1.867	2.632	0.000	0.0568	0.00749	6.536
110	1.649	2.850	0.000	0.0664	0.00871	7.309
105	1.428	3.071	0.000	0.0793	0.01031	8.335
100	1.202	3.297	0.000	0.0978	0.01263	9.782
97.53	1.088	3.411	0.000	0.1102	0.014142	10.749
97	1.077	3.023	0.398	0.1119	0.01466	10.860
90	1.016	2.394	1.089	0.1300	0.01860	11.701
85	0.982	2.188	1.331	0.1441	0.021196	12.253
80	0.943	2.021	1.534	0.1605	0.02394	12.844
75	0.903	1.873	1.722	0.1800	0.02706	13.505
70	0.860	1.734	1.905	0.2038	0.03064	14.271
65	0.811	1.597	2.091	0.2336	0.03493	15.186
60	0.756	1.457	2.285	0.2720	0.04025	16.322
55	0.693	1.312	2.494	0.3235	0.04715	17.794
50	0.620	1.155	2.723	0.3962	0.05661	19.813
45	0.535	0.982	2.981	0.5068	0.07064	22.808
40	0.432	0.786	3.280	0.6955	0.09414	27.822
35	0.308	0.557	3.633	1.0915	0.14278	38.204
30	0.154	0.277	4.068	2.4687	0.31079	74.063
26.5	0.020	0.037	4.441	19.927	2.43804	528.08

Tabla5.1.1

P= Carga axil.

L₀=Longitud en el tramo 0.

L₁= Longitud en el tramo 1.

L₂= Longitud en el tramo 2.

u= deformada en el extremo.

c₁=curvatura en el empotramiento.

M₁=momento en el empotramiento.

Como se ve en la figura 5.1.8 la carga P_{cr2} es una carga límite a la que tiende de forma asintótica superiormente.

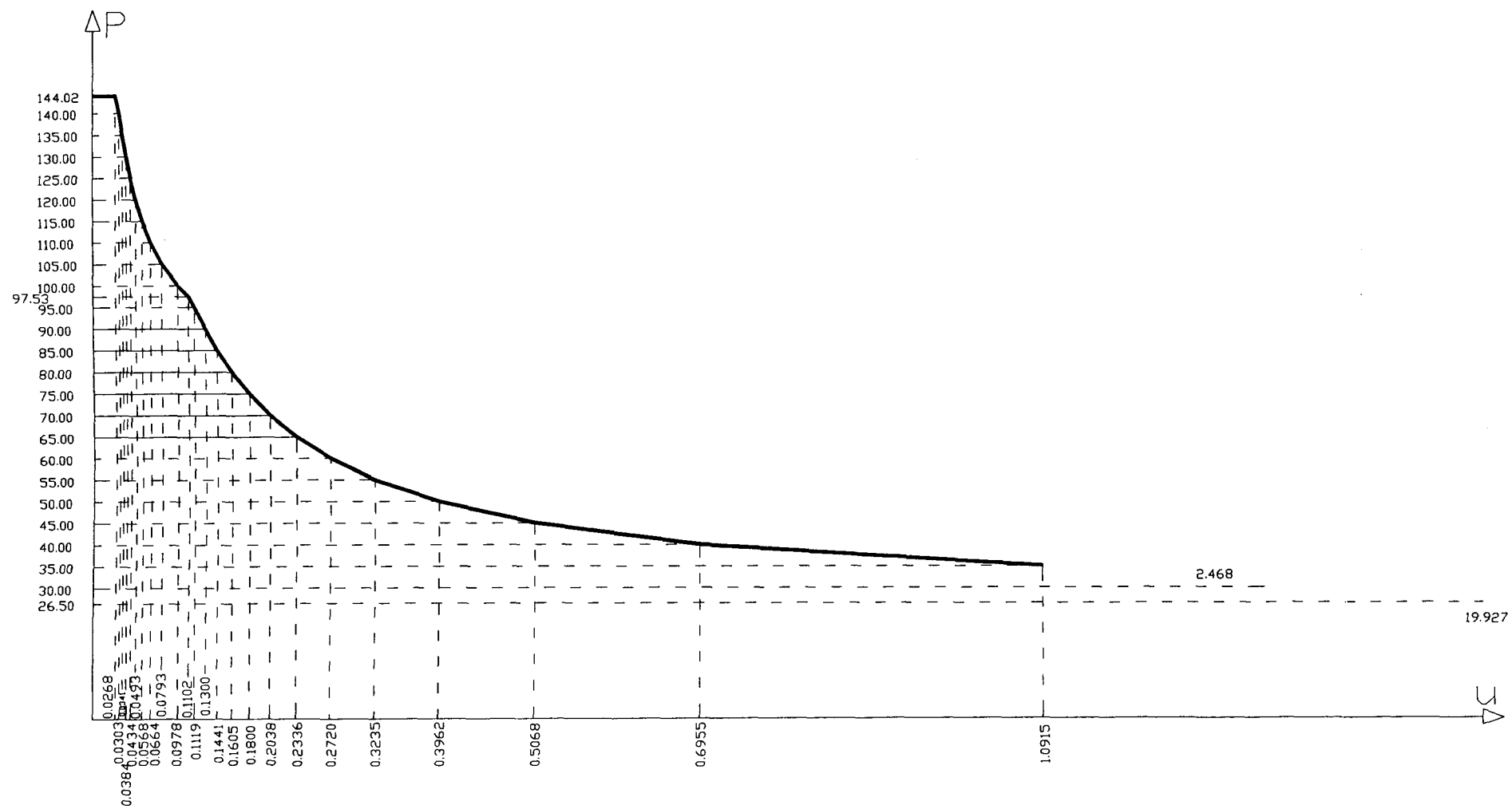


Figura 5.1.8

5.1.3 Ejemplo 2.

Se trata de estudiar el comportamiento de un pilar con carga axil $P=1280$ kN sometido a una carga horizontal H variando esta última. Este caso corresponde al ejemplo 2.3 del documento [CEB78].

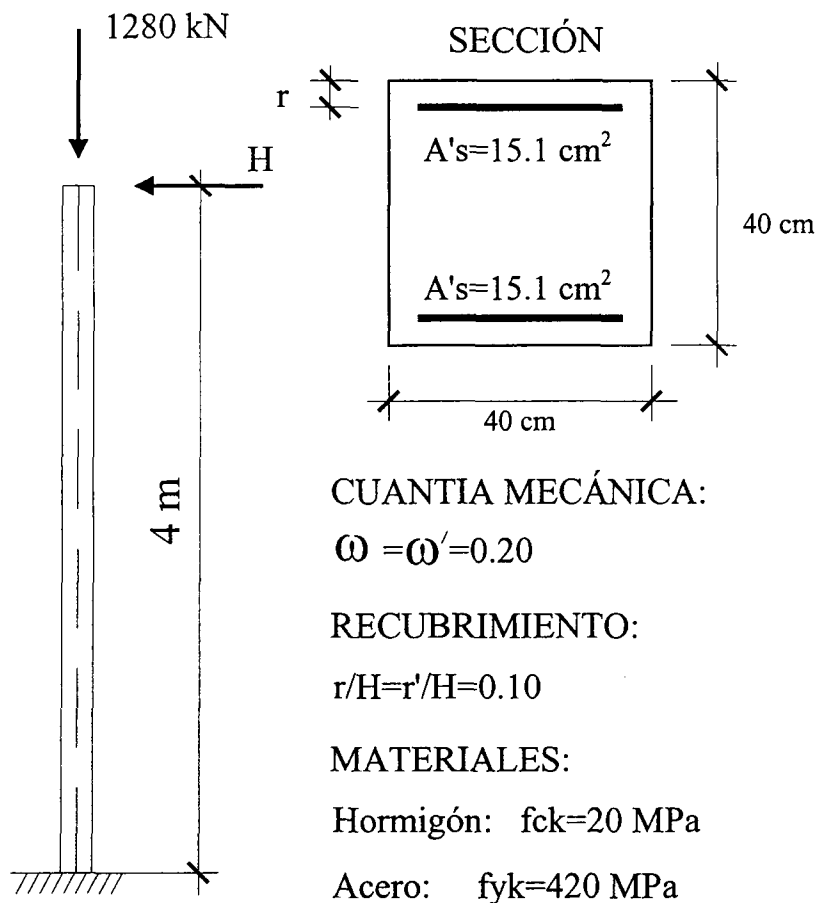


Figura 5.1.9

Con los datos de la sección se determina la relación momento curvatura que se aproxima mediante un diagrama trilineal definido por los valores:

PUNTO	χ	M
1	0.0025	113.11
2	0.0108	30.83
3	0.01504	331.38

Tabla 5.1.2

Que da lugar a los siguientes valores de rigidez:

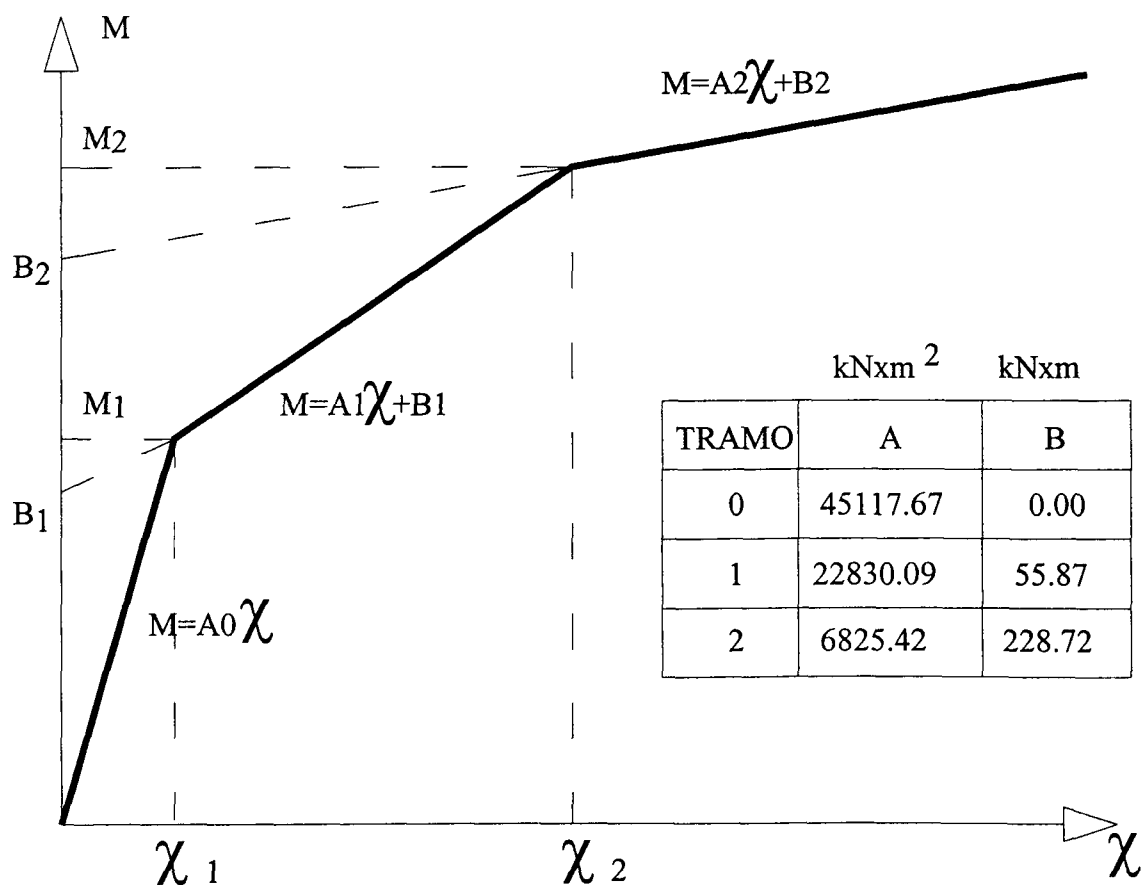


Figura 5.1.10

$$\chi_1 = 0.002506 \text{ m}^{-1}.$$

$$\chi_2 = 0.010799 \text{ m}^{-1}.$$

Las cargas críticas para cada uno de los tramos son:

$$P_{cr0} = 6957.71 \text{ kN}$$

$$P_{cr2} = 1052.56 \text{ kN}$$

La carga horizontal H que agota el tramo elástico con $P = 1280 \text{ kN}$ es $H_1 = 23.86 \text{ kN}$ dando lugar a un desplazamiento en el extremo de $u_2 = 0.01379 \text{ m}.$

La carga horizontal que da lugar a una curvatura en el empotramiento $c_1 = \chi_2 = 0.010799$ es $H_2 = 58.90 \text{ kN}.$

Por tanto para $P \in [0, 23.86]$ la relación momento curvatura se encuentre en el tramo 0.

Para $P \in (23.86, 58.906]$ la relación momento curvatura se encuentre en el tramo 1.

Para $P > 58.906 \text{ kN}$ el momento y la curvatura en el empotramiento se mueven en el tramo 2.

Por otra parte para el axil $P = 1280 \text{ kN}$, el momento último de la sección es :

$$M_u = 338.40 \text{ kNm}.$$

Tabla de valores representativos de la ménsula al variar la carga H manteniendo constante el axil P=1280 kN.

H	L ₀	L ₁	L ₂	u	c ₁	M ₁
2.50	4.000	0.000	0.000	0.00144	0.00026	11.849
5.00	4.000	0.000	0.000	0.00289	0.00052	23.699
7.50	4.000	0.000	0.000	0.00433	0.00078	35.548
10.00	4.000	0.000	0.000	0.00578	0.00105	47.399
<i>10.00</i>	<i>0.204</i>	<i>0.343</i>	<i>3.451</i>	<i>1.13871</i>	<i>0.18589</i>	<i>1497.556</i>
12.50	4.000	0.000	0.000	0.0072	0.00131	59.248
15.00	4.000	0.000	0.000	0.0086	0.00157	71.097
17.50	4.000	0.000	0.000	0.01011	0.00183	82.947
20.00	4.000	0.000	0.000	0.01156	0.00210	94.797
<i>20.00</i>	<i>0.231</i>	<i>0.388</i>	<i>3.380</i>	<i>0.99402</i>	<i>0.16462</i>	<i>1325.359</i>
22.50	4.000	0.000	0.000	0.01300	0.00236	106.647
<i>22.50</i>	<i>0.238</i>	<i>0.400</i>	<i>3.360</i>	<i>0.95768</i>	<i>0.15927</i>	<i>1315.843</i>
23.87	3.998	0.001	0.000	0.01379	0.00250	113.140
30.00	3.036	0.963	0.000	0.01879	0.00386	144.053
<i>30.00</i>	<i>0.264</i>	<i>0.445</i>	<i>3.289</i>	<i>0.84808</i>	<i>0.14311</i>	<i>1205.55</i>
40.00	2.136	1.863	0.000	0.03044	0.00626	198.966
<i>40.00</i>	<i>0.310</i>	<i>0.523</i>	<i>3.165</i>	<i>0.69989</i>	<i>0.12118</i>	<i>1055.887</i>
50.00	1.631	2.368	0.000	0.04378	0.00876	256.048
<i>50.00</i>	<i>0.377</i>	<i>0.638</i>	<i>2.983</i>	<i>0.54714</i>	<i>0.98408</i>	<i>900.396</i>
58.80	1.347	2.652	0.000	0.05606	0.01099	306.969
<i>58.80</i>	<i>0.472</i>	<i>0.802</i>	<i>2.724</i>	<i>0.40349</i>	<i>0.07663</i>	<i>751.789</i>
59.90	1.340	2.560	0.099	0.05438	0.01166	308.354
<i>59.90</i>	<i>0.475</i>	<i>0.807</i>	<i>2.716</i>	<i>0.40002</i>	<i>0.07610</i>	<i>748.153</i>
64.00	1.176	2.167	0.656	0.07084	0.01757	348.681
<i>64.00</i>	<i>0.567</i>	<i>0.969</i>	<i>2.462</i>	<i>0.30690</i>	<i>0.06158</i>	<i>949.062</i>
68.791	0.838	1.467	1.694	0.15251	0.035520	471.161
68.791	0.836	1.463	1.700	0.15334	0.03567	472.211

Tabla 5.1.3

P= Carga axil.

L₀=Longitud en el tramo 0.

L₁= Longitud en el tramo 1.

L₂= Longitud en el tramo 2.

u= desplazamiento en el extremo.

c₁=curvatura en el empotramiento.

M₁=momento en el empotramiento.

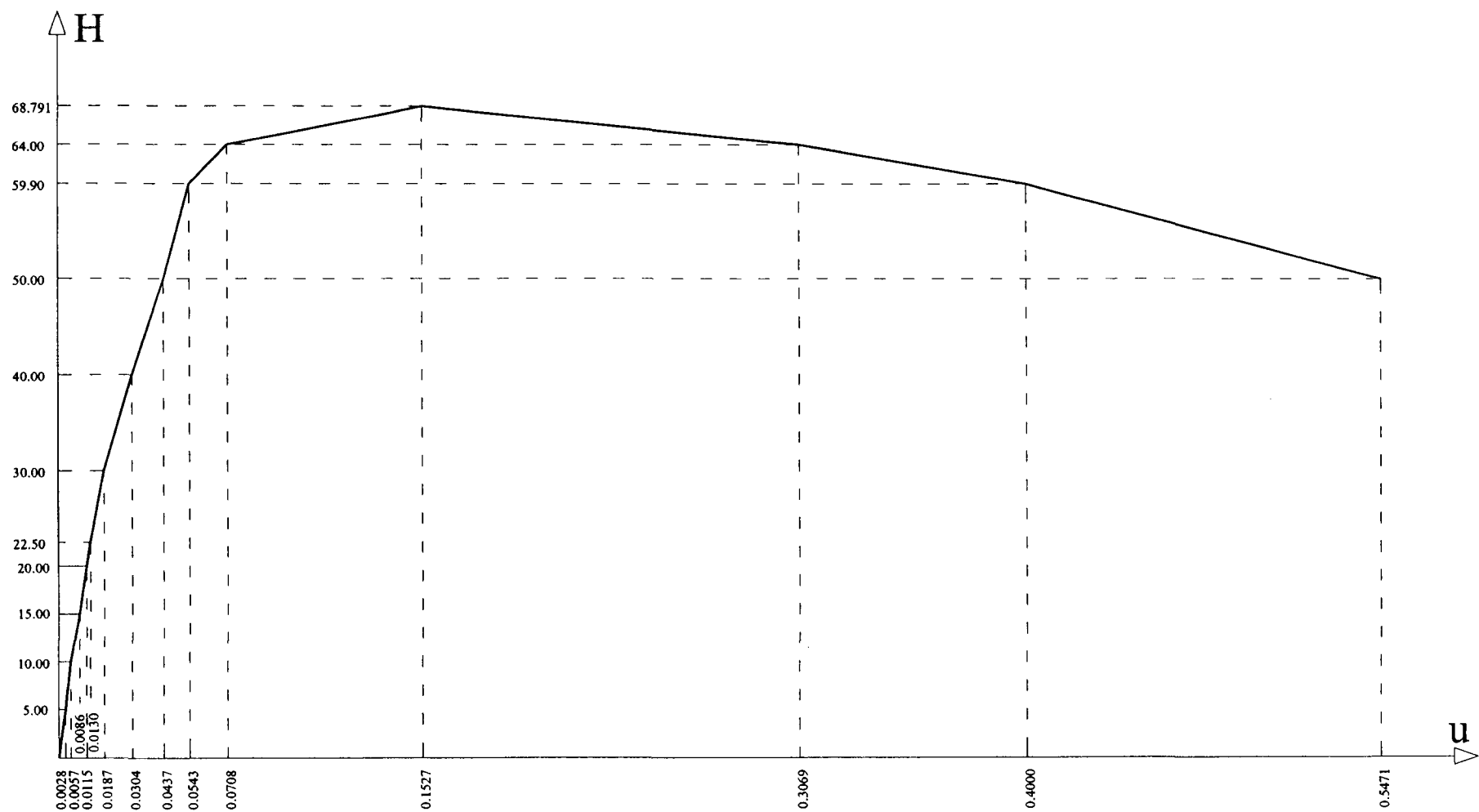
En la tabla se recoge la doble solución para algunos valores indicando en letra cursiva la solución inestable en la rama descendente.

El último valor corresponde con una carga H próxima a la carga límite (H_{lim}) por lo que al estar a un lado y otro del máximo los valores estable e inestable son parecidos pudiéndose considerar que la carga crítica es $H_{lim}=68.791$ kN. Valor análogo al que da el documento del C.E.B [CEB78] $H \approx 68$ kN.

En esta caso la rotura se produciría con una carga ligeramente inferior a $H_u = 64.00$ kN. Pues el momento en el empotramiento es $M = 34.86$ kNm, ligeramente superior al de rotura.

Por tanto la pieza en las condiciones estudiadas falla por rotura antes que por inestabilidad.

De acuerdo con [CEB78] el pilar se ha dimensionado por el método de la columna modelo precisamente para $H=64.00$ kN. Comprobándose en el presente ejemplo que efectivamente el momento último está de acuerdo con estos requerimientos.



Figura

5.1.11

5.1.4 Ejemplo 3.

En este tercer ejemplo se trata de estudiar el caso de un pilar sometido a una carga axial P con al menos un momento en el extremo considerando una relación momento curvatura de tipo trilineal.

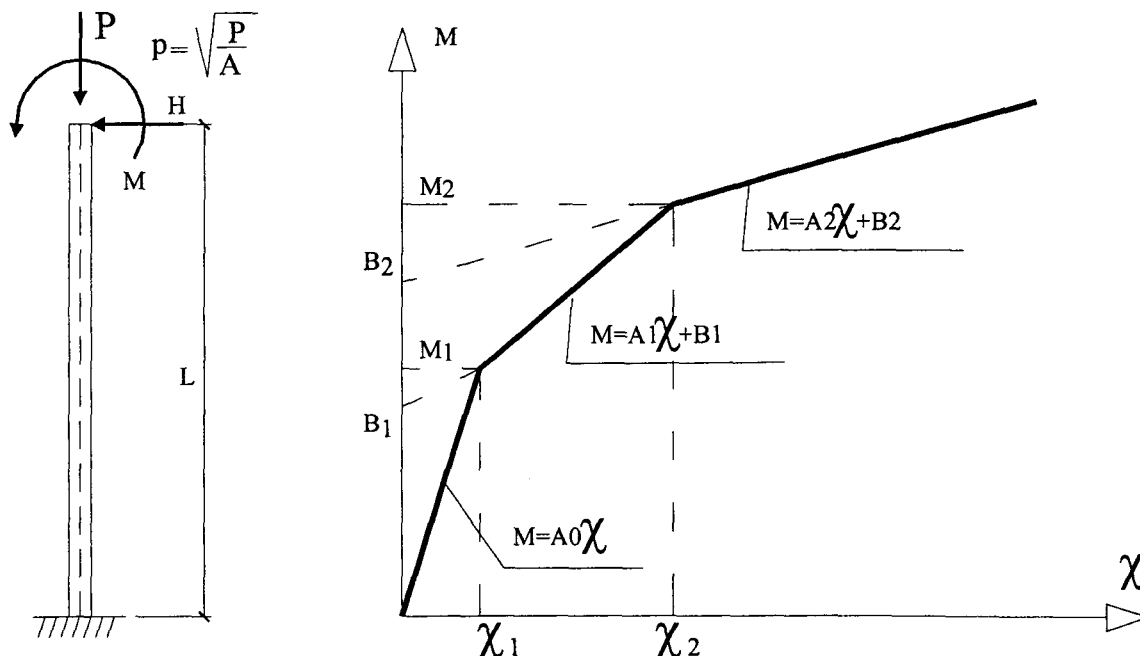


Figura 5.1.12

En el proceso de carga al aumentar el momento este alcanzará un valor M_e mediante el que se agote el tramo elástico-lineal.

Si:

$$p_1 = \sqrt{\frac{P}{A_0}}$$

El valor de dicho momento viene dado por la expresión:

$$M_e = \frac{A_0 f}{P} - \frac{(H + f L) \operatorname{sen}(p_1 L)}{p_1} + \left(\chi_1 - \frac{f}{P} \right) A_0 \cos(p_1 L) \quad (5.1.10)$$

Si el momento sigue aumentando el punto con curvatura χ_1 subirá a lo largo del pilar de forma que la curvatura en el empotramiento estará en el tramo-1. Si el pilar no es lo suficientemente largo llegará un instante en el que el momento en el extremo superior sea $M_p = A_0 \chi_1$ y no se haya alcanzado la curvatura χ_2 en la parte inferior. En cualquier caso, para esta situación, la curvatura en el empotramiento vendría dada por:

$$c_1 = \frac{\chi_1 - \frac{f}{P}}{\cos(p_1 L)} + p_1 \frac{H + f L}{P} \frac{\operatorname{sen}(p_1 L)}{\cos(p_1 L)} \quad (5.1.11)$$

donde el significado de p_1 en la expresión anterior es $p_1 = \sqrt{\frac{P}{A_1}}$

Si $\chi_2 < c_1$ se podrá agotar el segundo tramo pasando el pilar a estar formado por tres tramos; en caso contrario solo habrá dos tramos el primero (elemento-1 adyacente al empotramiento) con curvaturas mayores que χ_2 y el segundo tramo (elemento-2) con curvaturas en $[\chi_1, \chi_2]$.

Cuando el momento llega al valor M_p ha desaparecido la fase elástica en el pilar.

Desde otro punto de vista, para que pueda existir una porción de pilar que agote el segundo tramo (el de curvaturas comprendidas entre χ_1 y χ_2) el pilar tiene que tener una longitud mínima. Esta longitud viene dada por la expresión:

$$L_{min} = \frac{1}{p_1} \arcsen \left[\frac{\chi_1 \sqrt{\chi_1^2 + \frac{H^2}{A_1 P} - \chi_2^2} - \frac{\chi_2 H p_1}{P}}{\chi_2^2 + \frac{H^2}{A_1 P}} \right] \quad (5.1.12)$$

En el caso de que exista una sobrecarga uniforme en el pilar la longitud mínima se determina a través de una ecuación transcendente.

$$p_1 \frac{H + f L_{min}}{P} \sen(p_1 L_{min}) = \left(\chi_1 - \frac{f}{P} \right) \cos(p_1 L_{min}) + \frac{f}{P} - \chi_2$$

En cualquier caso dado un pilar de longitud L la longitud de pilar h_1 con curvatura en el empotramiento $\chi(u(x_1)) = c_1 = \chi_1$ y $\chi(u(x_2)) = \chi_2$, sería:

$$h_1 = \frac{1}{p_1} \arcsen \left[\frac{\left(\chi_1 - \frac{f}{P} \right) \sqrt{\left(\chi_1 - \frac{f}{P} \right)^2 + \frac{(H + f L)^2}{A_1 P} - \left(\chi_2 - \frac{f}{P} \right)^2} - \left(\chi_1 - \frac{f}{P} \right) \frac{H p_1}{P}}{\left(\chi_1 - \frac{f}{P} \right)^2 + \frac{(H + f L)^2}{A_1 P}} \right] \quad (5.1.13)$$

Si $h_1 < L$. El momento que produce esta situación es:

$$M_0 = A_0 \left[\frac{f}{P} - \frac{p_2 \cos(p_2 L) \left(\chi_1 - \frac{f}{P} + \left(\frac{f}{P} - \chi_2 \right) \cos(p_1 L) \right) + p_1 \sen(p_1 L) \left(\frac{f}{P} - \chi_2 \right)}{p_1 \sen(p_1 L) \cos(p_2 L)} \right] \quad (5.1.14)$$

donde: $p_2 = \sqrt{\frac{P}{A_0}}$

Puede suceder que h_1 sea mayor que L , en cuyo caso no es posible que manteniendo un tramo elástico en el pilar, se alcance la curvatura χ_2 debido a que las cargas f ó H no son lo suficientemente grandes. En este caso la posibilidad sería determinar la carga f para que las curvaturas en los extremos del pilar fuesen precisamente χ_1 y χ_2 .

$$f = \frac{\chi_1 \cos(p_1 L) - p_1 \frac{H}{P} \sin(p_1 L) - \chi_2}{p_1 L \sin(p_1 L) + \cos(p_1 L) - 1} P \quad (5.1.15)$$

Asimismo la carga H que produciría el mismo efecto es:

$$H = \frac{1}{p_1 \sin(p_1 L)} \left[\frac{f}{P} (1 - \cos(p_1 L) - p_1 L \sin(p_1 L)) + \chi_1 \cos(p_1 L) - \chi_2 \right] P \quad (5.1.16)$$

Una vez que en el extremo libre se ha alcanzado la curvatura χ_1 , para seguir avanzado en el proceso de carga con el momento hay que pasar al tramo-1 en el extremo superior desapareciendo la fase elástica.

Para el pilar del EJEMPLO-2.

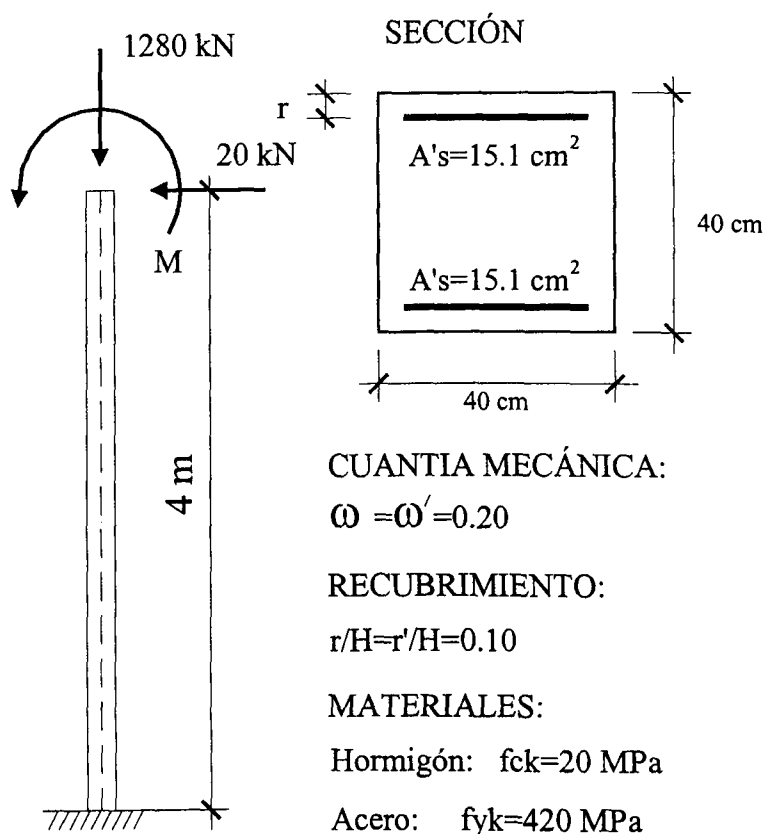


Figura 5.1.13

$$P=1280 \text{ kN.}$$

$$\chi_1=0.002506 \text{ m}^{-1}.$$

$$\chi_2=0.010799 \text{ m}^{-1}.$$

$$p_0=0.1684 \text{ m}^{-1}.$$

$$p_1=0.2367 \text{ m}^{-1}.$$

Se determinan los valores anteriores.

a) Para el caso $H = 0$, $f = 0$.

a.1) Longitud mínima del pilar para que todo el pilar esté en el tramo-1 con curvaturas χ_1 y χ_2 en los extremos. Resolviendo la ecuación transcendente (5.1.12) resulta

$$L_{\min}=5.644 \text{ m.}$$

Luego con las curvaturas del ejemplo para este pilar de longitud 4 m. no se superará el segundo tramo de la ley $M-\chi$ si se mantiene un tramo elástico. Para ello es necesario que actúe una carga uniforme f o concentrada H mínima dada por la fórmula anterior.

a.2) Valor de H que posibilitaría la situación de a.1

$$H=25.309 \text{ kN.}$$

a.3) Valor de f que posibilitaría la situación de a.1.

$$f=13.787 \text{ kN/m.}$$

Luego produce mayor efecto en la curvatura del empotramiento la carga concentrada H que la uniforme f .

Para analizar el pilar con el momento se considera una fuerza $H=20 \text{ kN}$. Para este valor se estudia la evolución del pilar cuando aumenta M .

En este caso para H y P dados y $M=0$, existe un desplazamiento inicial.

$$u(L)=0.01156 \text{ m.}$$

$$\chi(0)=0.0021011 \text{ m}^{-1}.$$

Por tanto para $M=0$ el pilar se encuentra en régimen elástico-lineal. El momento que permite agotar la fase elástica-lineal iniciándose en el empotramiento el tramo-1, es:

$$M_e=14.303 \text{ kNm.}$$

Para momentos $M \in [0, M_e]$ el pilar se encuentra en fase elástica. Para $M > M_e$ en el empotramiento aparece el tramo-1 no lineal.

Para las cargas dadas la longitud de pilar mínima L_{\min} con curvaturas $\chi(0)=\chi_2$ y $\chi(u(L_{\min}))=\chi_1$, es $L_{\min}=4.305 \text{ m.}$

Por tanto el pilar no tiene longitud suficiente para pasar al tercer tramo existiendo al mismo tiempo una fase elástica. Si en el extremo libre la curvatura es $\chi_1=0.002506$, la curvatura en el empotramiento es:

$$c_1=0.0094347\text{ m}^{-1}.$$

Y el momento en el extremo libre para esta curvatura es: $M_p = 113.099\text{ kNm}$.

Por tanto para $M\in[0, M_p]$ existe una fase elástica lineal (tramo-0) y un tramo-1. Para $M>M_p$ en el extremo libre del pilar se entra en fase de tramo-1 sin que en el empotramiento se haya llegado a entrar en el tramo-2. En este caso se trataría de determinar el momento que agota el tramo-1 y a partir del cual en el empotramiento aparece el tramo-2. Este momento vale:

$$M'p = 131.302\text{ kNm}.$$

De forma que para $M\in[M_p, M'p]$ el pilar tiene todas sus curvaturas en tramo-1 y para $M>M'p$ aparecerían en el empotramiento curvaturas del tramo-2.

El momento a partir del cual desaparece el tramo-1 entrando finalmente en el tramo-2, es:

$$M''p=302.412\text{ kNm}.$$

Por tanto para $M\in[M'p, M''p]$ el pilar tiene dos tramos el tramo 1 y 2. Para $M>M''p$ todo el pilar se encuentra en el tramo-2. Por tanto, resumiendo:

- $M\in[0.000, 14.303]\text{ kNm}$ tramo 0.
- $M\in[14.303, 113.099]\text{ kNm}$ tramo 0 y 1.
- $M\in[113.099, 131.302]\text{ kNm}$ tramo 1.
- $M\in[131.302, 302.412]\text{ kNm}$ tramo 1 y 2.
- $M>302.412\text{ kNm}$ tramo 2.

Considerando estos intervalos se tiene la siguiente tabla, para $P=1280\text{ kN}$.

Tabla de valores representativos de la ménsula al variar la carga M manteniendo constante el axil $P=1280\text{ kN}$.

M	L_0	L_1	L_2	u	c_1	M_1
0.00	4.000	0.000	0.000	0.01156	0.00210	94.797
0.00	0.231	0.388	3.380	0.99402	0.16462	1325.359
10.00	4.000	0.000	0.000	0.0134	0.00238	107.593
10.00	0.000	0.633	3.366	0.9375	0.15550	1290.118
14.30	4.000	0.000	0.000	0.0146	0.00250	113.095
14.30	3.998	0.001	0.000	0.0146	0.00250	113.108
20.00	3.638	0.361	0.000	0.0160	0.00283	120.563
20.00	0.000	0.649	3.350	0.8809	0.14635	1227.646

30.00	3.025	0.974	0.000	0.0191	0.00344	134.490
<i>30.00</i>	<i>0.000</i>	<i>0.668</i>	<i>3.331</i>	<i>0.8243</i>	<i>0.13719</i>	<i>1165.104</i>
40.00	2.459	1.540	0.000	0.0229	0.00409	149.374
<i>40.00</i>	<i>0.000</i>	<i>0.689</i>	<i>3.310</i>	<i>0.7675</i>	<i>0.12801</i>	<i>1102.477</i>
50.00	1.952	2.047	0.000	0.0273	0.00478	165.034
<i>50.00</i>	<i>0.000</i>	<i>0.713</i>	<i>3.286</i>	<i>0.7107</i>	<i>0.11882</i>	<i>1039.739</i>
60.00	1.509	2.490	0.000	0.0322	0.00549	181.267
<i>60.00</i>	<i>0.000</i>	<i>0.742</i>	<i>3.257</i>	<i>0.6537</i>	<i>0.10961</i>	<i>976.856</i>
70.00	1.125	2.874	0.000	0.0734	0.00622	197.888
<i>70.00</i>	<i>0.000</i>	<i>0.776</i>	<i>3.223</i>	<i>0.5967</i>	<i>0.10036</i>	<i>913.780</i>
80.00	0.796	3.203	0.000	0.0427	0.00695	214.753
<i>80.00</i>	<i>0.000</i>	<i>0.817</i>	<i>3.182</i>	<i>0.5394</i>	<i>0.09108</i>	<i>850.439</i>
90.00	0.514	3.485	0.000	0.0482	0.00770	231.760
<i>90.00</i>	<i>0.000</i>	<i>0.868</i>	<i>3.131</i>	<i>0.4818</i>	<i>0.08175</i>	<i>786.717</i>
100.00	0.270	3.729	0.000	0.0537	0.00845	248.843
100.00	0.000	0.932	3.067	0.4237	0.07233	722.424
<i>110.00</i>	<i>0.059</i>	<i>3.940</i>	<i>0.000</i>	<i>0.0593</i>	<i>0.00920</i>	<i>265.958</i>
113.02	0.001	3.998	0.000	0.0610	0.00943	271.181
<i>113.02</i>	<i>0.000</i>	<i>1.048</i>	<i>2.951</i>	<i>0.3470</i>	<i>0.05985</i>	<i>637.244</i>
120.00	0.000	4.000	0.000	0.0649	0.00995	283.081
<i>120.00</i>	<i>0.000</i>	<i>1.136</i>	<i>2.863</i>	<i>0.3049</i>	<i>0.05298</i>	<i>590.360</i>
126.00	0.000	4.000	0.000	0.0682	0.01040	293.355
<i>126.00</i>	<i>0.000</i>	<i>1.234</i>	<i>2.765</i>	<i>0.2678</i>	<i>0.04689</i>	<i>548.814</i>
131.30	0.000	4.000	0.000	0.0711	0.01079	302.432
<i>131.30</i>	<i>0.000</i>	<i>1.351</i>	<i>2.648</i>	<i>0.2337</i>	<i>0.0412</i>	<i>510.443</i>
135.00	0.000	3.676	0.323	0.0739	0.01186	309.685
<i>135.00</i>	<i>0.000</i>	<i>1.459</i>	<i>2.540</i>	<i>0.2085</i>	<i>0.03710</i>	<i>481.994</i>
140.00	0.000	3.179	0.8209	0.0816	0.08164	324.500
<i>140.00</i>	<i>0.000</i>	<i>1.680</i>	<i>2.319</i>	<i>0.1709</i>	<i>0.03077</i>	<i>438.783</i>
144.425	0.000	2.313	1.686	0.1129	0.02055	369.046
<i>144.425</i>	<i>0.000</i>	<i>2.309</i>	<i>1.690</i>	<i>0.1132</i>	<i>0.02060</i>	<i>369.363</i>

Tabla 5.1.4

P= Carga axil.

L_0 =Longitud en el tramo 0.

L_1 = Longitud en el tramo 1.

L_2 = Longitud en el tramo 2.

u= desplazamiento en el extremo.

c_1 =curvatura en el empotramiento.

M_1 =momento en el empotramiento.

Para $M=0$, como era de esperar, el pilar tiene dos posiciones de equilibrio una estable y otra inestable que coinciden con las del ejemplo-2 para el caso de $H=20\text{ kN}$. Esto quiere decir que el momento lo que hace al recorrer toda la trayectoria es llevar el pilar de la posición de equilibrio estable a la inestable correspondiente al valor de $H=20\text{ kN}$.

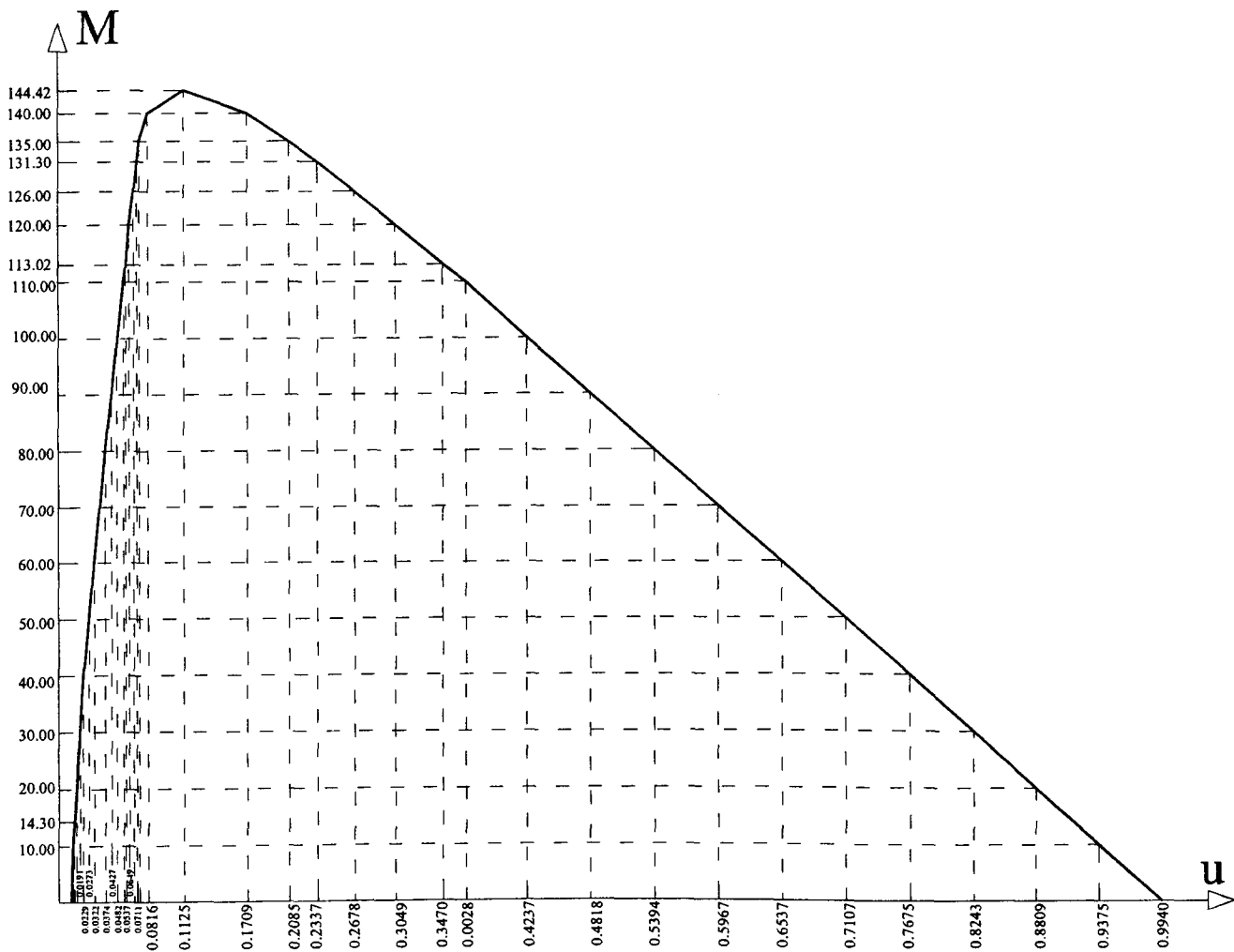


Figura 5.1.14

5.1.5 Ejemplo 4.

En el presente ejemplo se considera el caso de un pilar sometido a sobrecarga uniforme $f(x) = f = cte.$ estudiándose el efecto de la variación de la carga axial P . El pilar que se toma para realizar el ejemplo es el mismo que el de los dos apartados anteriores.

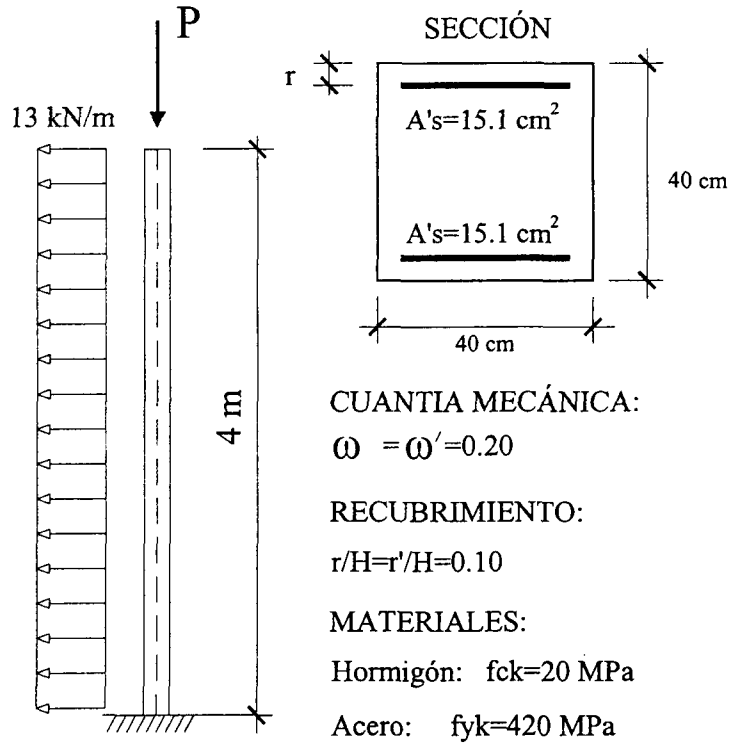


Figura 5.1.15

$P = \text{variable.}$

$$\chi_1 = 0.002506 \text{ m}^{-1}.$$

$$\chi_2 = 0.010799 \text{ m}^{-1}.$$

Para distintos valores de P , la relación momento curvatura se toma constante. Con los valores que se indican en la figura siguiente.

Las cargas de pandeo para los tramos de mayor y menor rigidez son respectivamente:

$$P_{cr0} = 6957.71 \text{ kN}$$

$$P_{cr2} = 1052.56 \text{ kN}$$

Si $P = 0$, se tienen los siguientes valores:

$$u(4) = 0.0092203 \text{ m.}$$

$$M(0) = 104 \text{ kNm.}$$

$$\chi(0) = 0.002305 \text{ m}^{-1}.$$

Por tanto $\chi(0) < \chi_1 = 0.002506 \text{ m}^{-1}$, luego el pilar se encuentra en régimen elástico.

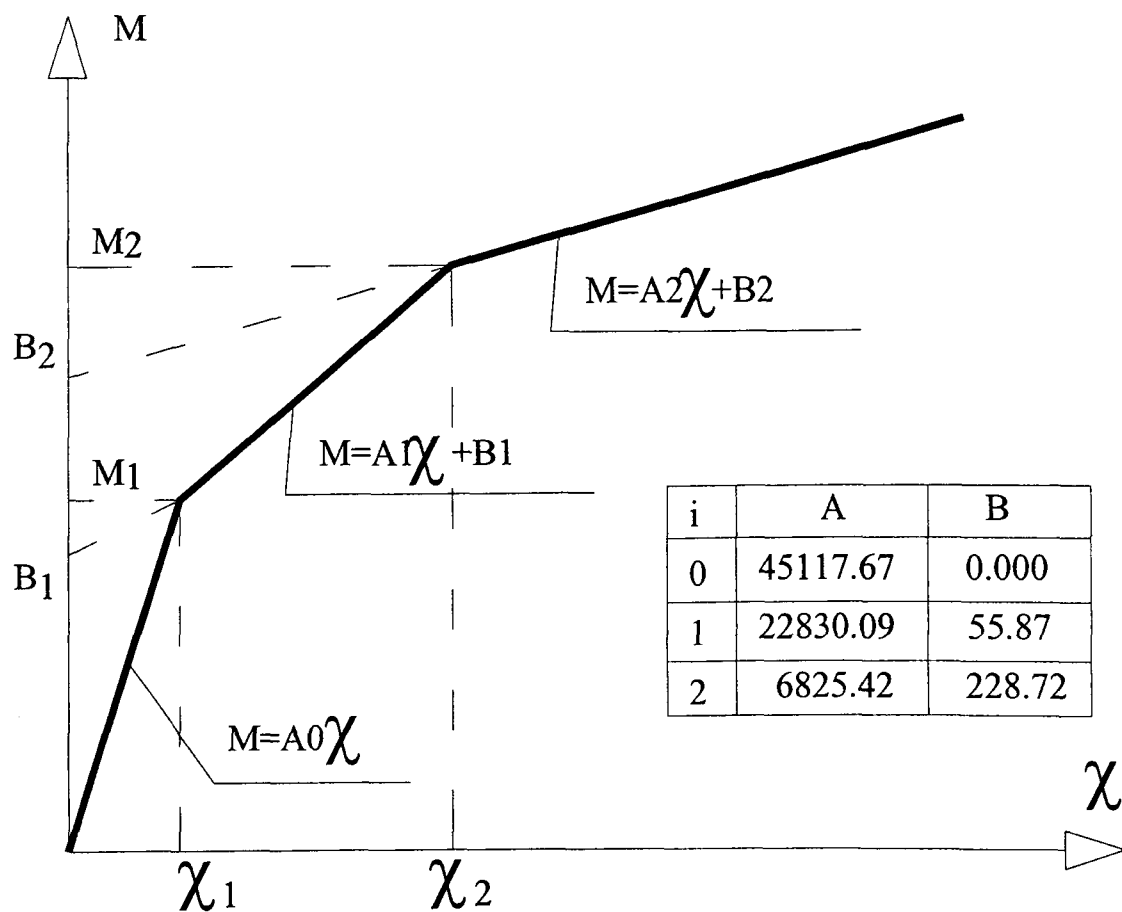


Figura 5.1.16

En primer lugar se trata de encontrar la carga P_0 que agota el régimen elástico.

$$P_0 = 868.225 \text{ kN.}$$

La carga P_1 que agota el tramo-1 a partir de la cual se entra en el tramo-2 es:

$$P_1 = 3632.621 \text{ kN.}$$

Para cargas P tal que $P_0 < P < P_1$ el pilar tiene dos tramos uno en fase elástica tramo-0 y otro en el segundo tramo-1. Para $P > P_1$ el pilar tiene tres tramos apareciendo el tramo-2 (el de curvaturas mayores que χ_2).

Considerando estos intervalos se tiene tabla 5.1.5.

Como puede comprobarse en la tabla la carga de límite se puede considerar que es:

$$P_{\text{lim}} = 3632.627 \text{ kN.}$$

Con curvatura en el tercer tramo observándose que el pilar entra ligeramente en el tramo-2.

Tabla de valores representativos de la ménsula al variar la carga P manteniendo constante la carga uniforme $f=13 \text{ kN/m}$.

P	L ₀	L ₁	L ₂	u	c ₁	M ₁
0.00	4.000	0.000	0.000	0.0092	0.00230	104.000
200.00	4.000	0.000	0.000	0.0094	0.00234	105.896
400.00	4.000	0.000	0.000	0.0097	0.00239	107.903
600.00	4.000	0.000	0.000	0.0100	0.00243	110.033
869.00	4.000	0.000	0.000	0.0104	0.00250	113.109
1200.00	3.918	0.081	0.000	0.0110	0.00269	117.296
<i>1200.00</i>	<i>0.160</i>	<i>0.268</i>	<i>3.570</i>	<i>1.5636</i>	<i>0.2566</i>	<i>1980.420</i>
1400.00	3.863	0.136	0.000	0.0114	0.00281	120.094
<i>1400.00</i>	<i>0.340</i>	<i>0.564</i>	<i>3.094</i>	<i>0.5771</i>	<i>0.1165</i>	<i>1024.284</i>
1600.00	3.803	0.196	0.000	0.0119	0.00294	123.142
<i>1600.00</i>	<i>0.488</i>	<i>0.803</i>	<i>2.707</i>	<i>0.4097</i>	<i>0.0777</i>	<i>759.544</i>
2000.00	3.663	0.336	0.000	0.0131	0.00325	130.214
<i>2000.00</i>	<i>0.719</i>	<i>1.168</i>	<i>2.111</i>	<i>0.2253</i>	<i>0.04775</i>	<i>554.642</i>
2400.00	3.484	0.515	0.000	0.0146	0.00365	139.212
<i>2400.00</i>	<i>0.896</i>	<i>1.450</i>	<i>1.652</i>	<i>0.1493</i>	<i>0.03424</i>	<i>462.471</i>
2800.00	3.242	0.757	0.000	0.0170	0.00419	151.676
<i>2800.00</i>	<i>1.041</i>	<i>1.700</i>	<i>1.257</i>	<i>0.1077</i>	<i>0.0259</i>	<i>405.566</i>
3200.00	2.869	1.130	0.000	0.0213	0.00509	172.242
<i>3200.00</i>	<i>1.177</i>	<i>1.962</i>	<i>0.860</i>	<i>0.0807</i>	<i>0.0195</i>	<i>362.483</i>
3600.00	1.901	2.098	0.000	0.0391	0.00828	244.936
<i>3600.00</i>	<i>1.372</i>	<i>2.393</i>	<i>0.234</i>	<i>0.0587</i>	<i>0.0127</i>	<i>315.439</i>
3632.62	1.446	2.553	0.000	0.0546	0.0107	302.428
3632.627	1.446	2.552	0.001	0.05464	0.0108	302.524
<i>3632.627</i>	<i>1.445</i>	<i>2.549</i>	<i>0.005</i>	<i>0.05469</i>	<i>0.0108</i>	<i>302.699</i>

Tabla 5.1.5

P = Carga axil.

L_0 =Longitud en el tramo 0.

L_1 = Longitud en el tramo 1.

L_2 = Longitud en el tramo 2.

u = desplazamiento en el extremo.

c_1 =curvatura en el empotramiento.

M_1 =momento en el empotramiento.

En la rama de descarga el pilar tiene tres tramos. Dicha rama tiende asintóticamente por encima al valor de la carga crítica P_{cr2} , comprobándose que no existen soluciones por debajo de dicha carga.

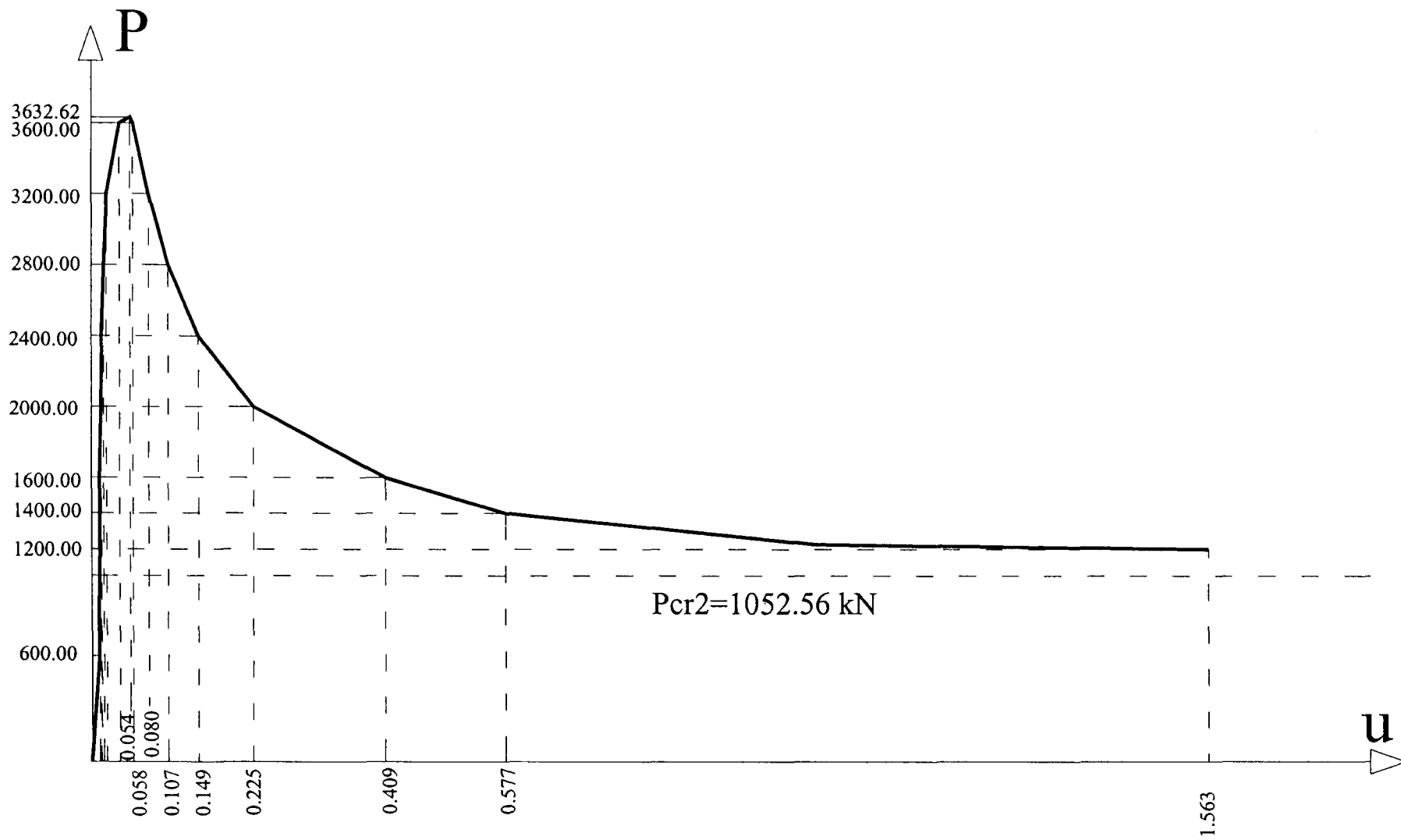


Figura 5.1.17

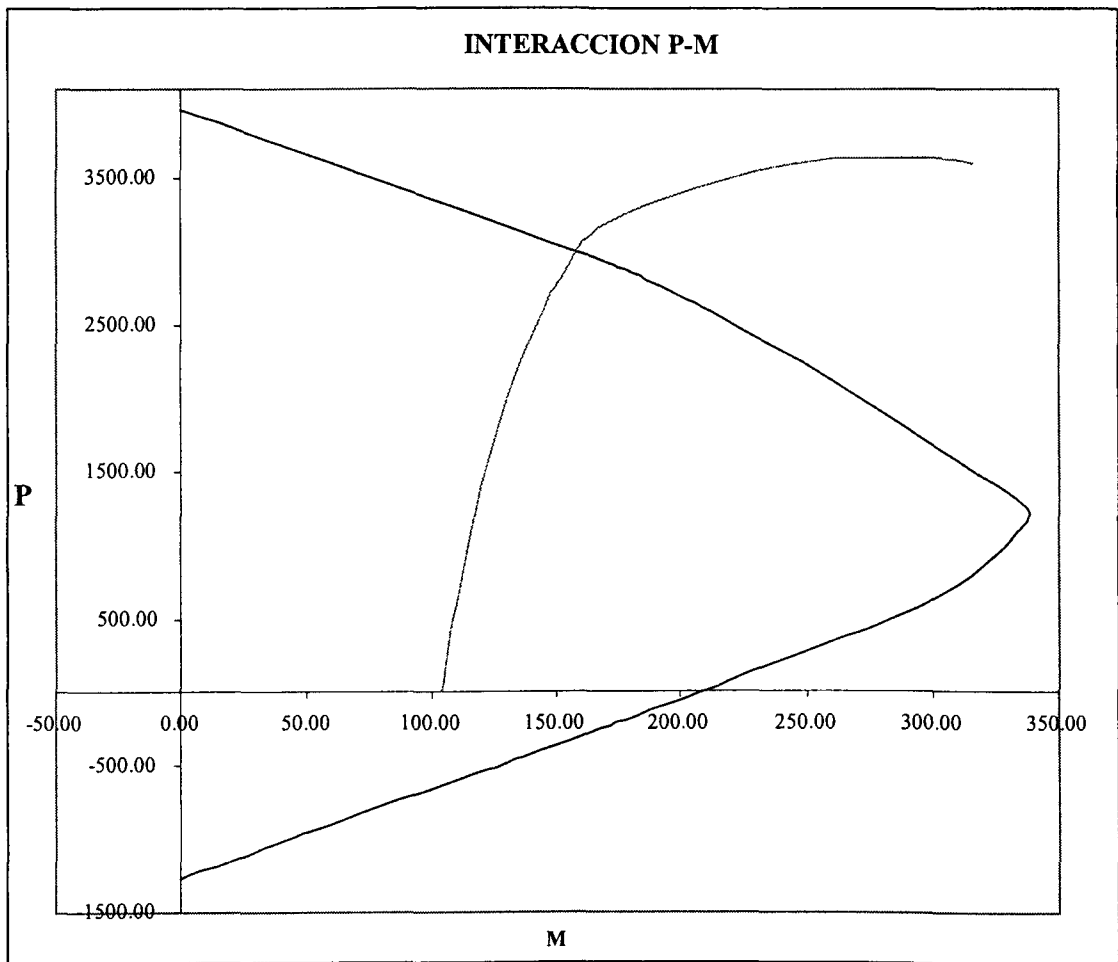


Figura 5.1.18

Llevando la trayectoria M-P sobre el diagrama de interacción de la sección se observa que el fallo se produce por rotura y no por inestabilidad. De acuerdo con el diagrama anterior en caso de rotura esta se produce al inicio de la fase de inestabilidad en la que la pendiente tiende a disminuir por lo que el dimensionado de la sección se puede considerar adecuado para el problema estudiado.

5.2 METODO GENERAL.

5.2.1 Introducción.

En el presente apartado se aplica el método general para el cálculo de pilares con distintos tipos de condiciones de contorno, carga y secciones a lo largo del pilar. En este caso la relación constitutiva se toma como una curva continua sobre la que sitúan los extremos de los segmentos que aproximan la relación constitutiva en los cuales quedan las curvaturas de los elementos.

Como se ha indicado, para la resolución por el método general se utiliza la técnica de los elementos finitos ello requiere fijar como dato de partida las longitudes de los elementos lo cual se hace atendiendo a:

- Las características de la sección de forma que un elemento coincida con un tramo de pilar con características homogéneas.
- Estados de carga de forma que en los nodos se sitúen las cargas concentradas si las hay.

Las condiciones de compatibilidad y de equilibrio que se establecen entre elementos dan lugar a una distribución de rigideces (pendientes de los segmentos) para los distintos elementos.

Para que la posición final de dichos segmentos aproximen la solución continua $M = g(\chi)$ se lleva a cabo una homotopía partiendo de una relación lineal $M = A\chi$ donde A representa la rigidez de un pilar en el caso elástico lineal:

$$M = (1 - \lambda)A\chi + \lambda g(\chi)$$

En primer lugar se describe un ejemplo en el que se recoge la metodología de cálculo comparando los resultados con un caso realizado por el método algebraico comprobando la coincidencia de resultados.

Seguidamente se pasan a realizar diversos ejemplos en los que se contemplan casos generales de condiciones de contorno, carga y secciones.

5.2.2 Ejemplo 5.

En el presente ejemplo se toma el pilar del ejemplo 4 de longitud 4 m sometido a una acción uniforme de 13 kN/m en el caso particular de que el axil es $P = 2800 \text{ kN}$. Para este caso con las longitudes de tramos obtenidas en el ejemplo 4 se comprueban los resultados mediante el método general para el caso estable correspondiente a la rama de subida de la gráfica carga-desplazamiento y el inestable.

Al tomar las longitudes exactas de los elementos relativas a la solución y asignada a cada elemento la rigidez correspondiente, no hace falta aplicar la homotopia por lo que se emplea el método de los elementos finitos directamente al pilar lineal equivalente resolviendo un problema en régimen elástico lineal únicamente, utilizando las matrices de rigidez obtenidas con las funciones de forma creadas a partir de los splines generalizaos. Los resultados deben coincidir con los obtenidos en la tabla 5.1.5 del ejemplo 4 además se deben cumplir las condiciones de compatibilidad y equilibrio entre elementos.

a) Caso estable.

En este caso el pilar alcanza la situación de equilibrio con curvaturas en los dos primeros tramos tramo-0 y 1. Teniendo cada tramo según la tabla las longitudes:

$$h_2 = 3.242 \text{ m.}$$

$$h_1 = 0.758 \text{ m.}$$

Como se indica en la figura siguiente:

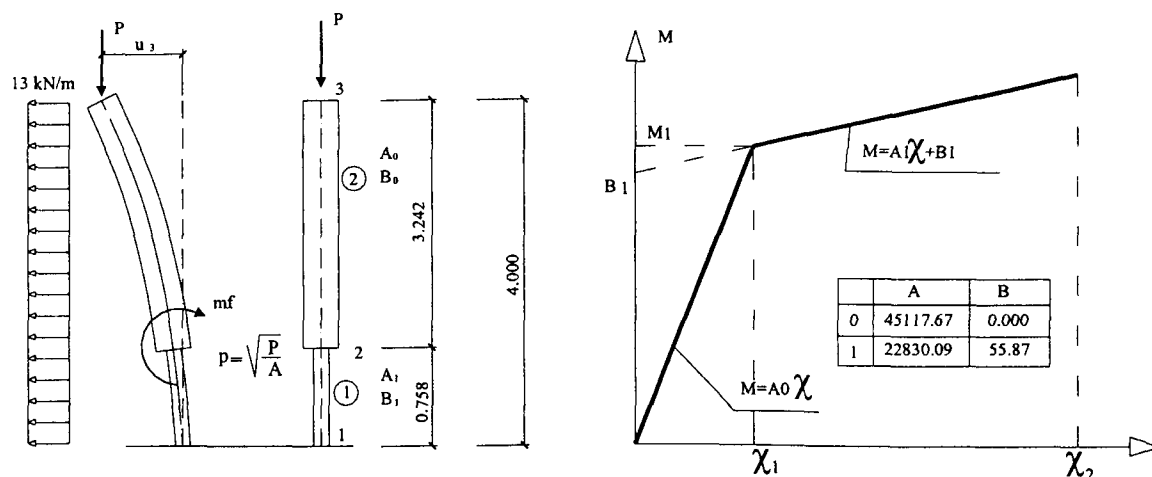


Figura 5.2.1

De acuerdo con el teorema del pilar lineal equivalente cada uno de los tramos considerados se consideran elementos de rigidez constante lo cual de acuerdo con el teorema de equivalencia supone la aparición de un momento ficticio en el nodo 2 dado que en este nodo la curvatura es χ_1 y por tanto el momento ficticio es:

$$\chi_1 = 0.002506 \text{ m}^{-1} \quad M_2 = M_f = (A_1 - A_0)\chi_1 = -55.853 \text{ kNm}$$

Obsérvese que el momento ficticio (que es negativo) en la figura se ha dibujado con su verdadero sentido.

ELEMENTO-1

La matriz de rigidez del elemento 1 de acuerdo con (3.3.21)

Para $P=2800 \text{ kN}$ y $A=22830.06 \text{ kNm}$

$$p := \sqrt{\frac{P}{A}} \quad p = 0.35021$$

$$K := A \cdot p \cdot \begin{bmatrix} -p^2 \cdot \sin(p \cdot l) & p \cdot (\cos(p \cdot l) - 1) & p^2 \cdot \sin(p \cdot l) & p \cdot (\cos(p \cdot l) - 1) \\ p \cdot (\cos(p \cdot l) - 1) & 1 \cdot p \cdot \cos(p \cdot l) - \sin(p \cdot l) & p \cdot (1 - \cos(p \cdot l)) & \sin(p \cdot l) - p \cdot l \\ p^2 \cdot \sin(p \cdot l) & p \cdot (1 - \cos(p \cdot l)) & -p^2 \cdot \sin(p \cdot l) & p \cdot (1 - \cos(p \cdot l)) \\ p \cdot (\cos(p \cdot l) - 1) & \sin(p \cdot l) - p \cdot l & p \cdot (1 - \cos(p \cdot l)) & 1 \cdot p \cdot \cos(p \cdot l) - \sin(p \cdot l) \end{bmatrix}$$

$$1 \cdot p \cdot \sin(p \cdot l) + 2 \cdot \cos(p \cdot l) - 2$$

$$K = \begin{bmatrix} 6.246 & 2.381 & -6.246 & 2.381 \\ 2.381 & 1.202 & -2.381 & 0.603 \\ -6.246 & -2.381 & 6.246 & -2.381 \\ 2.381 & 0.603 & -2.381 & 1.202 \end{bmatrix} \cdot 10^5$$

Expandiendo la matriz de rigidez como en 3.3.3 y teniendo en cuenta las condiciones de contorno en el nodo 1, $u=0$ y $u'=0$ que permiten eliminar la columna y filas 1-2:

$$K1 := A \cdot p \cdot \begin{bmatrix} -p^2 \cdot \sin(p \cdot l) & -p \cdot (\cos(p \cdot l) - 1) & 0 & 0 \\ -p \cdot (\cos(p \cdot l) - 1) & 1 \cdot p \cdot \cos(p \cdot l) - \sin(p \cdot l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(1 \cdot p \cdot \sin(p \cdot l) + 2 \cdot \cos(p \cdot l) - 2)$$

$$K1 = \begin{bmatrix} 6.2461 & -2.3813 & 0 & 0 \\ -2.3813 & 1.2019 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^5$$

Las acciones nodales equivalentes debidas a la carga repartida son:

$$f1 := \begin{bmatrix} \frac{q \cdot l}{2} \\ \frac{q \cdot (1 \cdot p \cdot \sin(p \cdot l) + 2 \cdot \cos(p \cdot l) - 2)}{2 \cdot p^2 \cdot (\cos(p \cdot l) - 1)} \\ \frac{q \cdot l}{2} \\ -\frac{q \cdot (1 \cdot p \cdot \sin(p \cdot l) + 2 \cdot \cos(p \cdot l) - 2)}{(2 \cdot p^2) \cdot (\cos(p \cdot l) - 1)} \end{bmatrix}$$

$$f1 = \begin{bmatrix} 4.927 \\ 0.623 \\ 4.927 \\ -0.623 \end{bmatrix}$$

ELEMENTO-2

Igual que antes para $P = 2800 \text{ kN}$ y $A = 45117.67 \text{ kNm}^2$

$$p := \sqrt{\frac{P}{A}} \quad p = 0.24912$$

$$K2 := A \cdot p \cdot \begin{bmatrix} -p^2 \cdot \sin(p \cdot l) & p \cdot (\cos(p \cdot l) - 1) & p^2 \cdot \sin(p \cdot l) & p \cdot (\cos(p \cdot l) - 1) \\ p \cdot (\cos(p \cdot l) - 1) & l \cdot p \cdot \cos(p \cdot l) - \sin(p \cdot l) & p \cdot (1 - \cos(p \cdot l)) & \sin(p \cdot l) - p \cdot l \\ p^2 \cdot \sin(p \cdot l) & p \cdot (1 - \cos(p \cdot l)) & -p^2 \cdot \sin(p \cdot l) & p \cdot (1 - \cos(p \cdot l)) \\ p \cdot (\cos(p \cdot l) - 1) & \sin(p \cdot l) - p \cdot l & p \cdot (1 - \cos(p \cdot l)) & l \cdot p \cdot \cos(p \cdot l) - \sin(p \cdot l) \end{bmatrix} \\ l \cdot p \cdot \sin(p \cdot l) + 2 \cdot \cos(p \cdot l) - 2$$

La matriz expandida coincide con la matriz de rigidez:

$$K2 = \begin{bmatrix} 1.485 & 2.547 & -1.485 & 2.547 \\ 2.547 & 5.445 & -2.547 & 2.814 \\ -1.485 & -2.547 & 1.485 & -2.547 \\ 2.547 & 2.814 & -2.547 & 5.445 \end{bmatrix} \cdot 10^4$$

Las acciones nodales equivalentes debidas a la carga repartida son:

$$f2 := \begin{bmatrix} \frac{q \cdot l}{2} \\ \frac{q \cdot (l \cdot p \cdot \sin(p \cdot l) + 2 \cdot \cos(p \cdot l) - 2)}{2 \cdot p^2 \cdot (\cos(p \cdot l) - 1)} \\ \frac{q \cdot l}{2} \\ -\frac{q \cdot (l \cdot p \cdot \sin(p \cdot l) + 2 \cdot \cos(p \cdot l) - 2)}{2 \cdot p^2 \cdot (\cos(p \cdot l) - 1)} \end{bmatrix} \quad f2 = \begin{bmatrix} 21.073 \\ 11.512 \\ 21.073 \\ -11.512 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL:

Teniendo en cuenta que las matrices anteriores son matrices expandidas la matriz de rigidez global es:

$$K := K1 + K2$$

$$K = \begin{bmatrix} 63.946 & -21.265 & -1.485 & 2.547 \\ -21.265 & 17.464 & -2.547 & 2.814 \\ -1.485 & -2.547 & 1.485 & -2.547 \\ 2.547 & 2.814 & -2.547 & 5.445 \end{bmatrix} \cdot 10^4$$

La matriz de flexibilidad es $F = K^{-1}$:

$$F = \begin{bmatrix} 0.983 & 2.159 & 10.045 & 3.124 \\ 2.159 & 5.664 & 25.928 & 8.194 \\ 10.045 & 25.928 & 152.961 & 53.467 \\ 3.124 & 8.194 & 53.467 & 21.156 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$$

MATRIZ DE FUERZAS NODALES.

Por su parte al matriz de fuerzas nodales global en la que se tiene en cuenta el momento ficticio es:

$$f = \begin{bmatrix} f_{12} + f_{20} \\ f_{13} + f_{21} + M_2 \\ f_{22} \\ f_{23} \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 26 \\ -44.964 \\ 21.073 \\ -11.512 \end{bmatrix}$$

La ecuación de equilibrio global es:

$$Ku = f$$

Y los desplazamientos en los nodos:

$$u = K^{-1} f$$

DESPLAZAMIENTO DE LOS NODOS

$$u := F \cdot f \quad u = \begin{bmatrix} 1.042 \\ 2.5354 \\ 17.0318 \\ 5.9595 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Una vez obtenidos los desplazamientos en cada elemento se obtienen las fuerzas de equilibrio.

ELEMENTO-1

Matriz de rigidez

$$K1 = \begin{bmatrix} 6.246 & 2.381 & -6.246 & 2.381 \\ 2.381 & 1.202 & -2.381 & 0.603 \\ -6.246 & -2.381 & 6.246 & -2.381 \\ 2.381 & 0.603 & -2.381 & 1.202 \end{bmatrix} \cdot 10^5$$

Los desplazamientos en los extremos son:

$$u1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} \quad u1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.042 \\ 2.5354 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

y por tanto el vector de equilibrio es;

$$V1 := K1 \cdot u1 - f1 \quad V1 = \begin{bmatrix} -52 \\ -95.836 \\ 42.146 \\ 57.238 \end{bmatrix}$$

Los pseudocortantes son:

$$V_1^+ = -52 \text{ kN} \quad V_2^- = 42.146 \text{ kN}$$

Y los momentos:

$$M_1^+ = -95.836 \text{ kNm} \quad M_2^- = 57.238 \text{ kNm}$$

Con estos momentos se determinan las curvaturas:

$$\chi_{11} := -\frac{V1_1}{A} \quad \chi_{11} = 4.19781 \cdot 10^{-3}$$

que es la curvatura en el empotramiento y

$$\chi_{12} := \frac{V1_3}{A} \quad \chi_{12} = 2.50711 \cdot 10^{-3}$$

que es la curvatura en el nodo 2 del elemento 1, χ_2^- . Con esta curvatura se entra en la relación M- χ y se tiene el momento:

$$M_e := A1 \cdot \chi_{11} + B1 \quad M_e = 151.706 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Como se ve los valores coinciden con los obtenidos en la tabla 5.1.5 del ejemplo 4 para P= 2800 kN.

ELEMENTO-2

Matriz de rigidez:

$$K2 = \begin{bmatrix} 0.149 & 0.255 & -0.149 & 0.255 \\ 0.255 & 0.544 & -0.255 & 0.281 \\ -0.149 & -0.255 & 0.149 & -0.255 \\ 0.255 & 0.281 & -0.255 & 0.544 \end{bmatrix} \cdot 10^5$$

Los desplazamientos en los extremos:

$$u2 := \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad u2 = \begin{bmatrix} 1.042 \\ 2.5354 \\ 17.0318 \\ 5.9595 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Vector de equilibrio

$$V2 := K2 \cdot u2 - f2 \quad V2 = \begin{bmatrix} -42.146 \\ -113.09 \\ -1.776 \cdot 10^{-14} \\ 2.842 \cdot 10^{-14} \end{bmatrix}$$

Los pseudocortantes son:

$$V_2^+ = -42.146 \text{ kN} \quad V_3^- = 0.00 \text{ kN}$$

Como se comprueba $V_2^- = V_2^+$.

Desde el punto de vista del problema lineal el nodo está en equilibrio ya que:

$$M_2^+ = 57.238 + 55.853 = 113.091 \text{ kNm}$$

Curvaturas:

$$\chi_{21} := -\frac{V_2^+}{A} \quad \chi_{21} = 2.50656210^{-3}$$

Como se ve $\chi_2^- = \chi_{12} = \chi_{21} = \chi_2^+$ por lo que se tiene continuidad en la curvatura

$$\chi_{22} := \frac{V_3^-}{A} \quad \chi_{22} = 0$$

Con curvatura cero ya que el momento en el extremo libre es cero.

b) Caso inestable. Se estudia ahora el caso inestable considerando las longitudes de los elementos correspondientes al caso inestable como se indica en la figura:

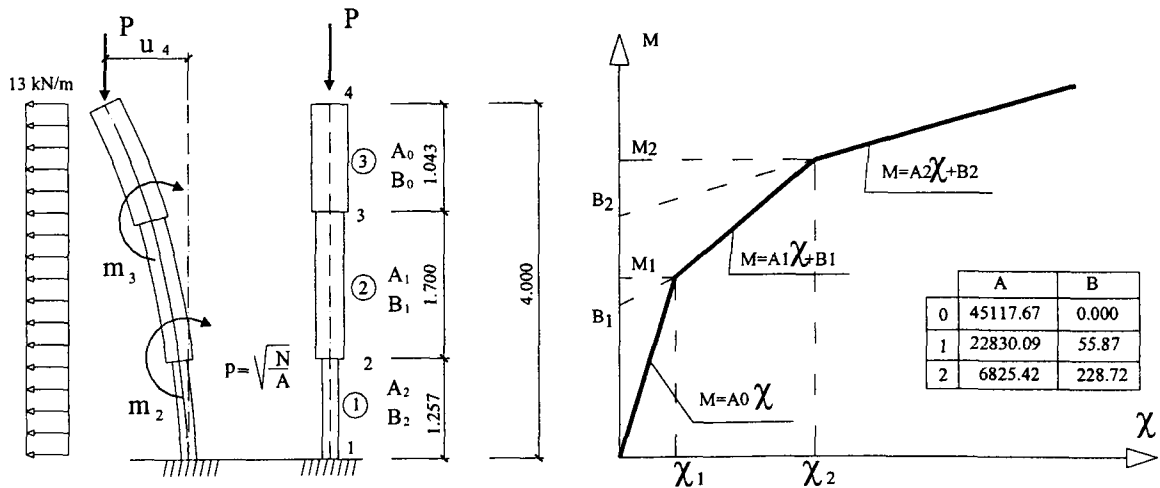


Figura 5.2.2

Teniendo en cuenta que las longitudes de los elementos se corresponden con los puntos donde se cambia de rigidez, las curvaturas en los nodos 2 y 3 son conocidas, los momentos ficticios son:

$$\begin{aligned} \chi_1 &:= 0.002506 \cdot \text{m}^{-1} & M_2 &:= (A_2 - A_1) \cdot \chi_2 & M_2 &= -172.834 \text{ kNm} \\ \chi_2 &:= 0.010799 \cdot \text{m}^{-1} & M_3 &:= (A_1 - A_0) \cdot \chi_1 & M_3 &= -55.853 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Obsérvese que los momentos ficticios (que son negativos) se han dibujado con su verdadero sentido.

Con estos momentos en los nodos se calcula el problema lineal de forma análoga al caso estable anterior.

ELEMENTO-1

Para $P = 2800 \text{ kN}$ y $A = 6825.42 \text{ kNm}$

$$p := \sqrt{\frac{P}{A}} \quad p = 0.64049$$

La matriz de rigidez es:

$$K := A \cdot p \begin{bmatrix} -p^2 \cdot \sin(p \cdot l) & p \cdot (\cos(p \cdot l) - 1) & p^2 \cdot \sin(p \cdot l) & p \cdot (\cos(p \cdot l) - 1) \\ p \cdot (\cos(p \cdot l) - 1) & l \cdot p \cdot \cos(p \cdot l) - \sin(p \cdot l) & p \cdot (1 - \cos(p \cdot l)) & \sin(p \cdot l) - p \cdot l \\ p^2 \cdot \sin(p \cdot l) & p \cdot (1 - \cos(p \cdot l)) & -p^2 \cdot \sin(p \cdot l) & p \cdot (1 - \cos(p \cdot l)) \\ p \cdot (\cos(p \cdot l) - 1) & \sin(p \cdot l) - p \cdot l & p \cdot (1 - \cos(p \cdot l)) & l \cdot p \cdot \cos(p \cdot l) - \sin(p \cdot l) \end{bmatrix}$$

$$l \cdot p \cdot \sin(p \cdot l) + 2 \cdot \cos(p \cdot l) - 2$$

$$K = \begin{bmatrix} 3.856 & 2.564 & -3.856 & 2.564 \\ 2.564 & 2.125 & -2.564 & 1.098 \\ -3.856 & -2.564 & 3.856 & -2.564 \\ 2.564 & 1.098 & -2.564 & 2.125 \end{bmatrix} \cdot 10^4$$

Que expandida teniendo en cuenta las condiciones de contorno del nodo1 $u = 0, u' = 0$:

$$K1 := A \cdot p \cdot \begin{bmatrix} -p^2 \cdot \sin(p \cdot l) & -p \cdot (\cos(p \cdot l) - 1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p \cdot (\cos(p \cdot l) - 1) & l \cdot p \cdot \cos(p \cdot l) - \sin(p \cdot l) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(l \cdot p \cdot \sin(p \cdot l) + 2 \cdot \cos(p \cdot l) - 2)$$

$$K1 = \begin{bmatrix} 3.856 & -2.564 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.564 & 2.125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^4$$

Las cargas nodales equivalentes son:

$$f1 := \begin{bmatrix} \frac{q \cdot l}{2} \\ \frac{q \cdot (l \cdot p \cdot \sin(p \cdot l) + 2 \cdot \cos(p \cdot l) - 2)}{(2 \cdot p^2) \cdot (\cos(p \cdot l) - 1)} \\ \frac{q \cdot l}{2} \\ -\frac{q \cdot (l \cdot p \cdot \sin(p \cdot l) + 2 \cdot \cos(p \cdot l) - 2)}{2 \cdot p^2 \cdot (\cos(p \cdot l) - 1)} \end{bmatrix}$$

$$f1 = \begin{bmatrix} 8.17 \\ 1.731 \\ 8.17 \\ -1.731 \end{bmatrix}$$

ELEMENTO-2

Para $P = 2800 \text{ kN}$ y $A = 22830.06 \text{ kNm}$

La matriz de rigidez expandida es:

$$K2 = \begin{bmatrix} 5.379 & 4.712 & -5.379 & 4.712 & 0 & 0 \\ 4.712 & 5.308 & -4.712 & 2.702 & 0 & 0 \\ -5.379 & -4.712 & 5.379 & -4.712 & 0 & 0 \\ 4.712 & 2.702 & -4.712 & 5.308 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^4$$

Las cargas nodales equivalentes son:

$$f2 := \begin{bmatrix} \frac{q \cdot l}{2} \\ \frac{q \cdot (l \cdot p \cdot \sin(p \cdot l) + 2 \cdot \cos(p \cdot l) - 2)}{2 \cdot p^2 \cdot (\cos(p \cdot l) - 1)} \\ \frac{q \cdot l}{2} \\ -\frac{q \cdot (l \cdot p \cdot \sin(p \cdot l) + 2 \cdot \cos(p \cdot l) - 2)}{2 \cdot p^2 \cdot (\cos(p \cdot l) - 1)} \end{bmatrix} \quad f2 = \begin{bmatrix} 11.05 \\ 3.149 \\ 11.05 \\ -3.149 \end{bmatrix}$$

ELEMENTO-3

Igual que antes para $P = 2800 \text{ kN}$ y $A = 45117.67 \text{ kNm}^2$

$$p := \sqrt{\frac{P}{A}} \quad p = 0.24912$$

Matriz de rigidez expandida:

$$K3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.74 & 2.486 & -4.74 & 2.486 \\ 0 & 0 & 2.486 & 1.726 & -2.486 & 0.866 \\ 0 & 0 & -4.74 & -2.486 & 4.74 & -2.486 \\ 0 & 0 & 2.486 & 0.866 & -2.486 & 1.726 \end{bmatrix} \cdot 10^5$$

Las cargas nodales equivalentes:

$$f3 := \begin{bmatrix} \frac{q \cdot l}{2} \\ \frac{q \cdot (l \cdot p \cdot \sin(p \cdot l) + 2 \cdot \cos(p \cdot l) - 2)}{2 \cdot p^2 \cdot (\cos(p \cdot l) - 1)} \\ \frac{q \cdot l}{2} \\ -\frac{q \cdot (l \cdot p \cdot \sin(p \cdot l) + 2 \cdot \cos(p \cdot l) - 2)}{2 \cdot p^2 \cdot (\cos(p \cdot l) - 1)} \end{bmatrix} \quad f3 = \begin{bmatrix} 6.779 \\ 1.18 \\ 6.779 \\ -1.18 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE RIGIDEZ

La matriz de rigidez global es:

$$K := K1 + K2 + K3$$

$$K = \begin{bmatrix} 9.235 & 2.148 & -5.379 & 4.712 & 0 & 0 \\ 2.148 & 7.433 & -4.712 & 2.702 & 0 & 0 \\ -5.379 & -4.712 & 52.774 & 20.145 & -47.395 & 24.857 \\ 4.712 & 2.702 & 20.145 & 22.572 & -24.857 & 8.661 \\ 0 & 0 & -47.395 & -24.857 & 47.395 & -24.857 \\ 0 & 0 & 24.857 & 8.661 & -24.857 & 17.264 \end{bmatrix} \cdot 10^4$$

La matriz de flexibilidad: $F := K^{-1}$

$$F = \begin{bmatrix} -0.368 & -0.943 & -2.53 & -1.525 & -4.158 & -1.578 \\ -0.943 & -1.419 & -4.196 & -2.294 & -6.644 & -2.374 \\ -2.53 & -4.196 & -11.093 & -5.791 & -17.273 & -5.993 \\ -1.525 & -2.294 & -5.791 & -2.576 & -8.54 & -2.665 \\ -4.158 & -6.644 & -17.273 & -8.54 & -26.301 & -8.713 \\ -1.578 & -2.374 & -5.993 & -2.665 & -8.713 & -2.521 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Las acciones nodales son

$$f = \begin{bmatrix} f_{12} + f_{20} \\ f_{13} + f_{21} + M_2 \\ f_{22} + f_{30} \\ f_{23} + f_{31} + M_3 \\ f_{32} \\ f_{33} \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 19.22 \\ -171.415 \\ 17.829 \\ -57.822 \\ 6.779 \\ -1.18 \end{bmatrix}$$

Los desplazamientos:

$$u := F \cdot f \quad u = \begin{bmatrix} 0.0171 \\ 0.0241 \\ 0.0698 \\ 0.0355 \\ 0.1077 \\ 0.0368 \end{bmatrix}$$

Para hallar las fuerzas nodales de equilibrio se calcula cada elemento por separado.

ELEMENTO-1

Matriz de rigidez

$$K1 = \begin{bmatrix} 3.856 & 2.564 & -3.856 & 2.564 \\ 2.564 & 2.125 & -2.564 & 1.098 \\ -3.856 & -2.564 & 3.856 & -2.564 \\ 2.564 & 1.098 & -2.564 & 2.125 \end{bmatrix} \cdot 10^4$$

Los desplazamientos de los nodos del elemento:

$$u1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} \quad u1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0171 \\ 0.0241 \end{bmatrix}$$

Las fuerzas de equilibrio:

$$V1 := K1 \cdot u1 - f1 \quad V1 = \begin{bmatrix} -52 \\ -176.809 \\ 35.659 \\ 73.735 \end{bmatrix}$$

Los pseudocortantes son:

$$V_1^+ = -52 \text{ kN} \quad V_2^- = 35.659 \text{ kN}$$

Y los momentos:

$$M_1^+ = -176.809 \text{ kNm} \quad M_2^- = 73.735 \text{ kNm}$$

Con estos momentos se determinan las curvaturas:

$$\chi_{11} := -\frac{V1_1}{A} \quad \chi_{11} = 0.0259$$

Curvatura en el empotramiento que coincide con la dada en la tabla 5.1.5 del ejemplo 4.
El momento de empotramiento:

$$M_e := A1 \cdot \chi_{11} + B1 \quad M_e = 405.529 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

La curvatura en el nodo 2:

$$\chi_{12} := \frac{V1_3}{A} \quad \chi_{12} = 0.010803$$

coincide con la curvatura χ_2 del diagrama momento curvatura. Y el momento del problema no lineal es:

$$M_2^- = A_2 \chi_{12} + B_2 \quad M_2^- = 302.44 \text{ kNm}$$

ELEMENTO-2

La matriz de rigidez:

$$K_2 = \begin{bmatrix} 5.379 & 4.712 & -5.379 & 4.712 \\ 4.712 & 5.308 & -4.712 & 2.702 \\ -5.379 & -4.712 & 5.379 & -4.712 \\ 4.712 & 2.702 & -4.712 & 5.308 \end{bmatrix} \cdot 10^4$$

Los desplazamientos de los nodos 2 y 3:

$$u_2 := \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0.0171 \\ 0.0241 \\ 0.0698 \\ 0.0355 \end{bmatrix}$$

y las fuerzas de equilibrio:

$$V_2 := K_2 \cdot u_2 - f_2 \quad V_2 = \begin{bmatrix} -35.659 \\ -246.57 \\ 13.559 \\ 57.375 \end{bmatrix}$$

Los pseudocortantes son:

$$V_2^+ = -35.659 \text{ kN} \quad V_3^- = 13.559 \text{ kN}$$

Como se ve: $V_2^- = V_2^+$ por equilibrio del nodo.

Y los momentos:

$$M_2^+ = -246.57 \text{ kNm} \quad M_3^- = 57.375 \text{ kNm}$$

En el problema lineal: $M_2^+ = M_2^- + M_2 = 73.73 + 172.83 = 246.56 \text{ kNm}$

Por otra parte las curvaturas son:

$$\chi_{21} := -\frac{V_2}{A} \quad \chi_{21} = 0.0108$$

Que coincide con χ_1^- .

El momento correspondiente a esta curvatura en el problema no lineal es:

$$M_2^+ = A_1 \chi_{12} + B_1 \quad M_2^+ = 302.44 \text{ kNm}$$

Por tanto se comprueba que $M_2^+ = M_2^-$ para el caso no lineal.

$$\chi_{22} := \frac{V_2}{A} \quad \chi_{22} = 2.513141 \cdot 10^{-3}$$

que por errores numéricos se aproxima a χ_1 , en el diagrama momentos curvatura.

$$M_3^- = A_1 \chi_{22} + B_1 \quad M_3^- = 113.24 \text{ kNm}$$

ELEMENTO-3

Matriz de rigidez:

$$K_3 = \begin{bmatrix} 47.395 & 24.857 & -47.395 & 24.857 \\ 24.857 & 17.264 & -24.857 & 8.661 \\ -47.395 & -24.857 & 47.395 & -24.857 \\ 24.857 & 8.661 & -24.857 & 17.264 \end{bmatrix} \cdot 10^4$$

Los desplazamientos:

$$u_3 := \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0.0698 \\ 0.0355 \\ 0.1077 \\ 0.0368 \end{bmatrix}$$

Las fuerzas nodales de equilibrio:

$$V_3 := K_3 \cdot u_3 - f_3 \quad V_3 = \begin{bmatrix} -13.559 \\ -113.228 \\ -4.677 \cdot 10^{-12} \\ 4.203 \cdot 10^{-12} \end{bmatrix}$$

Los pseudocortantes son:

$$V_3^+ = -13.559 \text{ kN} \quad V_3^- = 0.00 \text{ kN}$$

Como se ve: $V_3^- = V_3^+$ dando lugar al equilibrio en el nodo.

Y los momentos:

$$M_3^+ = -113.228 \text{ kNm} \quad M_4^- = 0.00 \text{ kNm}$$

En el problema lineal: $M_3^+ = M_3^- + m_3 = 57.37 + 55.85 = 113.22 \text{ kNm}$

Es decir equilibrio para el problema lineal.

Por otra parte las curvaturas son:

$$\chi_{31} := -\frac{V_3}{A} \quad \chi_{31} = 2.50961310^{-3}$$

Que coincide con χ_1 , de forma que $\chi_3^- = \chi_3^+$

Para el problema no lineal el momento es lógicamente:

$$M_3^+ = A_0 \chi_{31} \qquad M_3^+ = 113.228 \text{ kNm}$$

Cumpléndose $M_3^- = M_3^+$.

En el extremo final

$$\chi_{32} := \frac{V_3}{A} \qquad \chi_{32} = 0$$

y por tanto $M_4 = 0$.

5.2.3 Ejemplo 6.

En el ejemplo anterior se ha desarrollado el método general aplicando el método de elementos finitos al pilar lineal equivalente conocida la solución exacta obtenida por el método algebraico. Con ello se pone de manifiesto la mecánica del método comprobándose las condiciones de compatibilidad y equilibrio que tienen lugar al mismo tiempo que se comprueba la existencia de dos soluciones para un mismo estado de cargas utilizando elementos finitos para un caso no lineal.

El objetivo del presente ejemplo consiste en aplicar el método teniendo en cuenta el proceso de la homotopía a un caso sencillo de una ménsula sometida a una carga axial y sobrecarga uniforme con sección de características homogéneas cuyo comportamiento resistente se supone que viene dado por una ley bilineal momento curvatura. De esta forma se trata de poner de relieve el comportamiento del proceso homotópico en la obtención de la solución.

Para este caso se conoce por el método algebraico la solución exacta de la posición de equilibrio y por lo tanto la deformada en el extremo así como las longitudes en las que rige cada tramo de la ley de curvaturas.

Se comprueba para los datos de la siguiente figura:

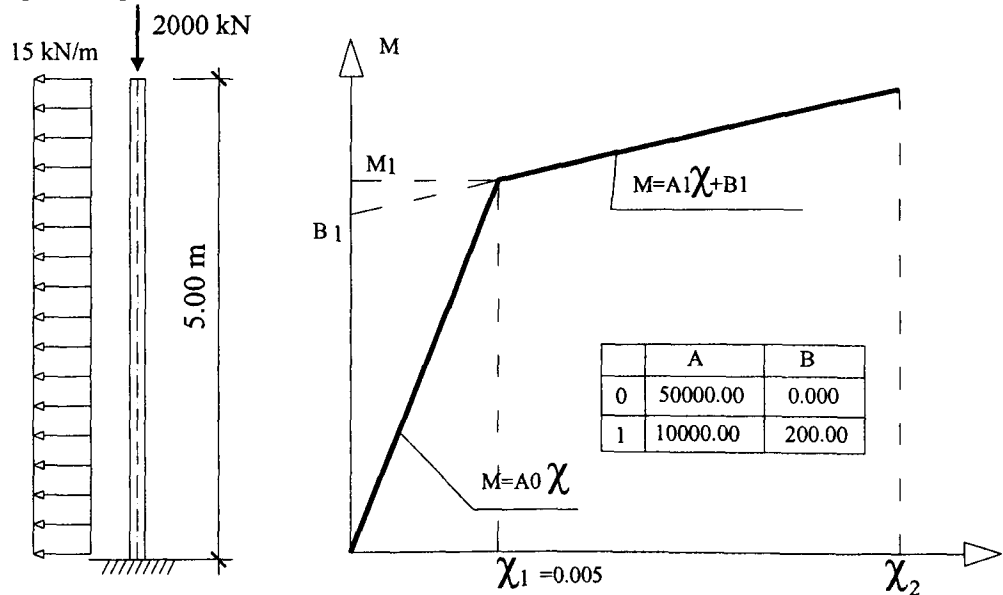


Figura 5.2.3

Con estos datos la posición de equilibrio estable calculada por el método algebraico es:

$$\begin{aligned}
 h_1 &= 0.235 \text{ m.} \\
 h_2 &= 4.765 \text{ m.} \\
 u_3 &= 0.039997 \text{ m.} \\
 c_1 &= 0.006749 \text{ m}^{-1} \\
 M_1 &= 267.494 \text{ kNm.}
 \end{aligned}$$

Mediante el método general se lleva a cabo un cálculo para el caso estable con una discretización de cuatro elementos de forma que el nodo central (3) coincida con el punto de cambio de ley de curvaturas siendo en cada tramo los elementos iguales a la mitad de h_1 (0.1175 m) y h_2 (2.3825 m).

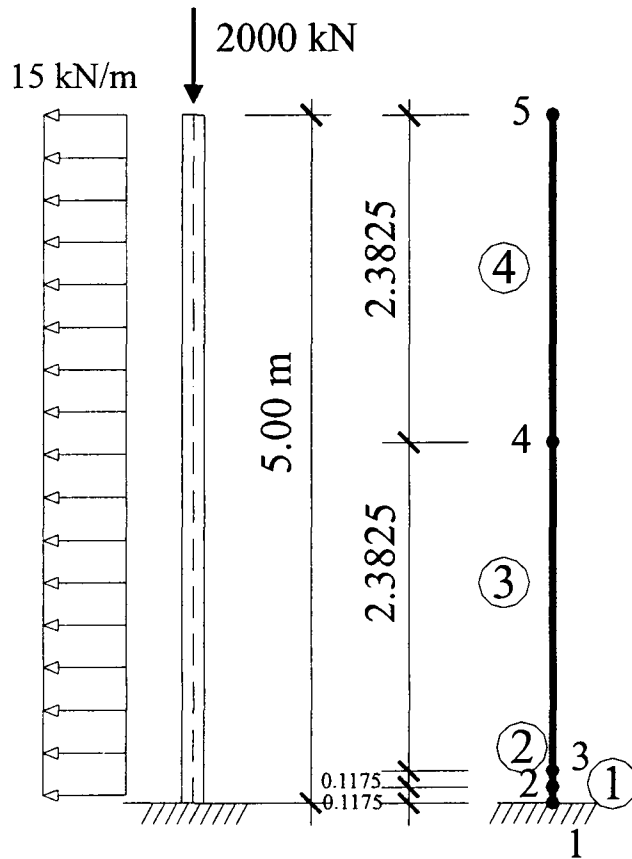


Figura 5.2.4

El cálculo se ha llevado a cabo partiendo de un caso lineal en el que todos los elementos tienen una rigidez inicial de 50.000 kNm^2 .

En el proceso de homotopia, a parte del estado lineal, se dan ocho pasos iniciándose con $\lambda=0.4$ ya que la relación homotópica es prácticamente lineal para valores inferiores de λ . Los pasos de homotopía siguientes se dan sucesivamente para los valores de λ igual a 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90, 1.

En cada paso de homotopia se hacen 11 correcciones para igualar las curvaturas a ambos lados de los nodos y conseguir las rigideces finales de cada paso que alimentan al paso siguiente, excepto en el último paso que se hacen 22 correcciones.

El estado final se recoge en la figura y tablas siguientes.

Figura de rigideces finales de los elementos.

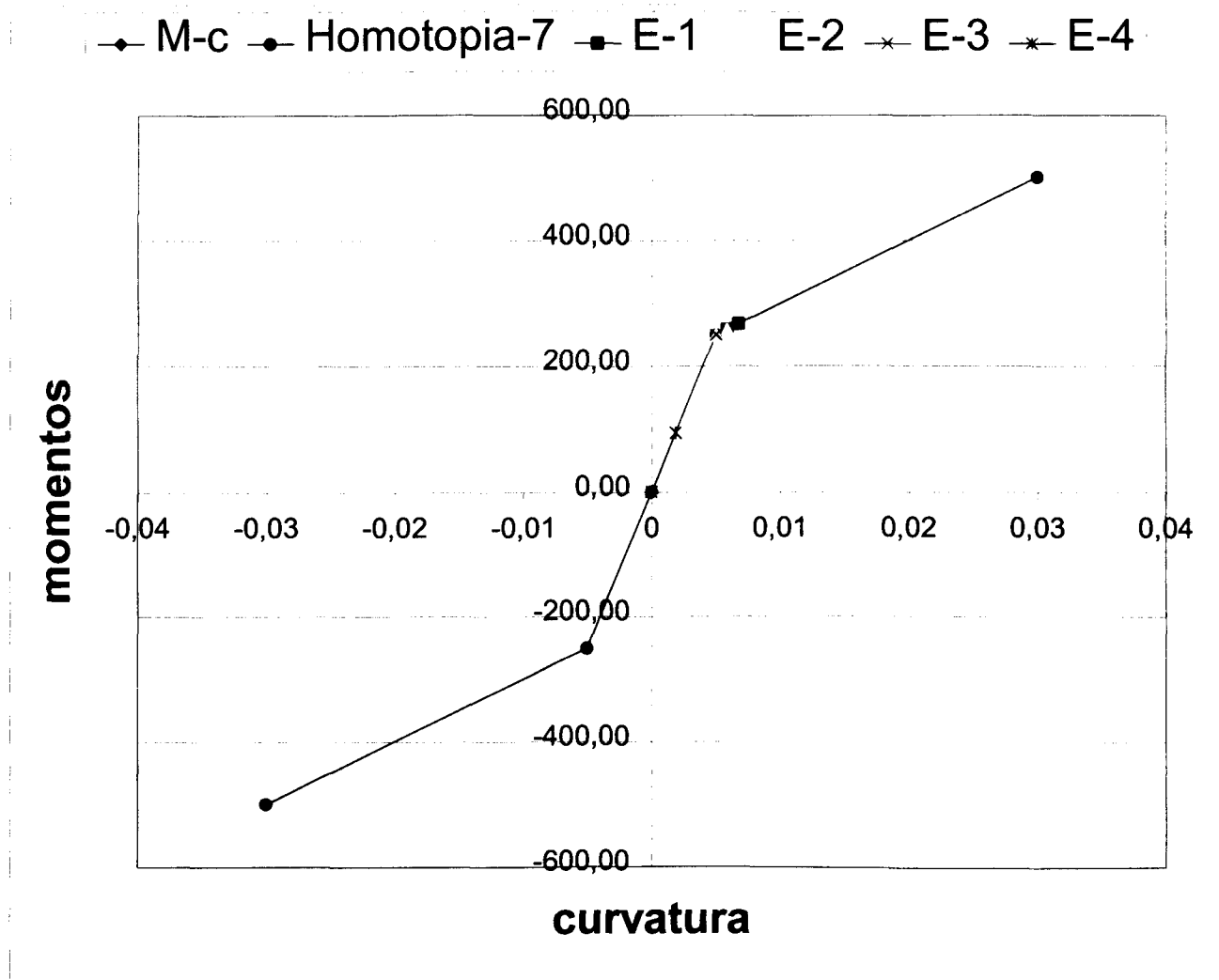


Figura 5.2.5

Los valores finales de la curvatura son:

Nodo	1	2		3		4		5
	inicial	Izq.	Der.	Izq.	Der.	Izq.	Der.	final
$c(m^{-1})$	0.006751	0.005874	0.005874	0.005001	0.005001	0.001873	0.001873	-2.931E-18

Como se vé las curvaturas por la izquierda y la derecha son iguales.

Los valores finales de las rigideces son:

elemento	1	2	3	4
$a(kNm^2)$	10000.00	10000.00	49983.14	50000.00

Que coincide aceptablemente con la disposición de rigideces en los elementos. La rigidez del elemento 3 en la solución exacta es de 50000.00 kNm^2 , sin embargo en la aproximada es de 49983.14 kNm^2 . Ello es debido a que el nodo 3 ha superado ligeramente la curvatura de 0.005 m^{-1} dando lugar a que la rigidez sea inferior a su valor y que el pilar sea ligeramente más flexible lo que explica que la deformada en el extremo sea un poco superior a la exacta.

Nodo	$u(m)$	$u' \approx \theta(rad)$
1	0	0
2	4.42946E-05	0.000739311
3	0.000169168	0.001376158
4	0.014469596	0.00937939
5	0.040007531	0.011308341

La deformada final es de $u_5 = 0.0400$ m. frente a la exacta $u_5 = 0.03999$ obtenida por el método algebraico.

Los momentos ficticios finales en los nodos son:

nodo	Momento ficticio
2	0.00
3	- 199.97
4	- 0.028

En la tabla anterior se ve que el momento ficticio resulta ligeramente inferior al exacto en valor absoluto ya que éste vale – 200.

Los esfuerzos finales (pseudocortantes y momentos flectores) en los elementos del problema no lineal:

		V(kN)	M(kNm)
1	1	75.000	267.512
	2	73.243	258.742
2	2	73.243	258.742
	3	71.486	250.013
3	3	71.486	250.013
	4	35.743	93.660
4	4	35.743	93.660
	5	0.000	-3.2863E-14

Como puede obsearse hay equilibrio en los elementos y en los nodo

Practicamente se consigue la solución exacta pese a la diferencia de tamaño en las longitudes de los elementos considerados, las cuales son fracciones de las obtenidas por el método algebraico.

5.2.4 Ejemplo 7.

En el presente ejemplo se aplica el método general para el caso del Ejemplo 4 en el que se trata de determinar la carga crítica de pandeo para el caso de un pilar de 4 m sometido a la acción de una sobrecarga uniforme de 13 kN/m y con una ley trilineal momento curvatura con los valores que se indican en la figura 5.2.6.

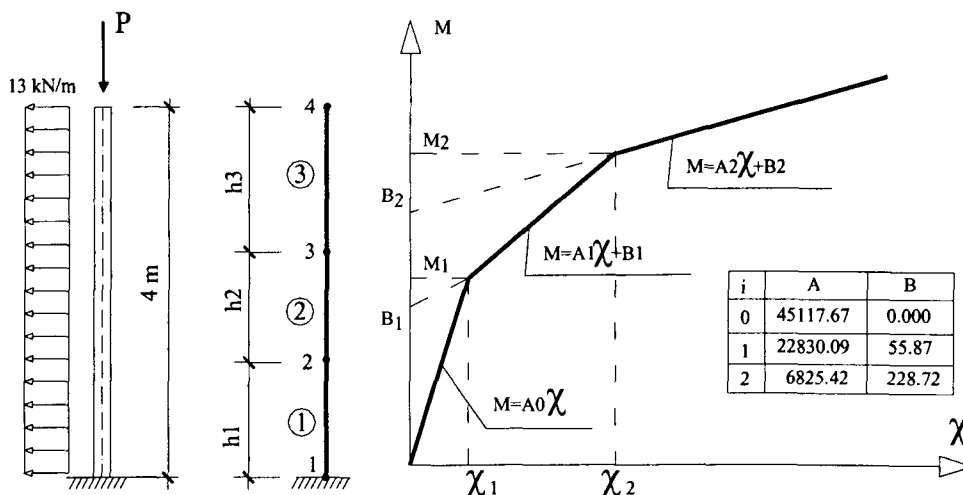


Figura 5.2.6

El problema se discretiza en tres elementos. Para la resolución en este caso se procede mediante una adaptación de la longitud de los elementos para cada carga P de ensayo. De forma que se ha ido aumentando la carga hasta llegar a la carga de $P=3632$ kN que se corresponde con la antepenúltima fila de la tabla 5.1.4

El cálculo se ha llevado a cabo partiendo de un caso lineal en el que todos los elementos tienen una rigidez de 45117.67 kNm^2 .

En el proceso de homotopia, a parte del estado lineal inicial, se dan siete pasos iniciándose con $\lambda = 0.4$ ya que la relación homotópica es prácticamente lineal para valores inferiores de parámetro. Los pasos de homotopia siguientes se dan para los valores de λ igual a 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90 y 1. En cada paso de la homotopía se llevan a cabo once iteraciones para conseguir ajustar las curvaturas por la izquierda y la derecha en el nodo.

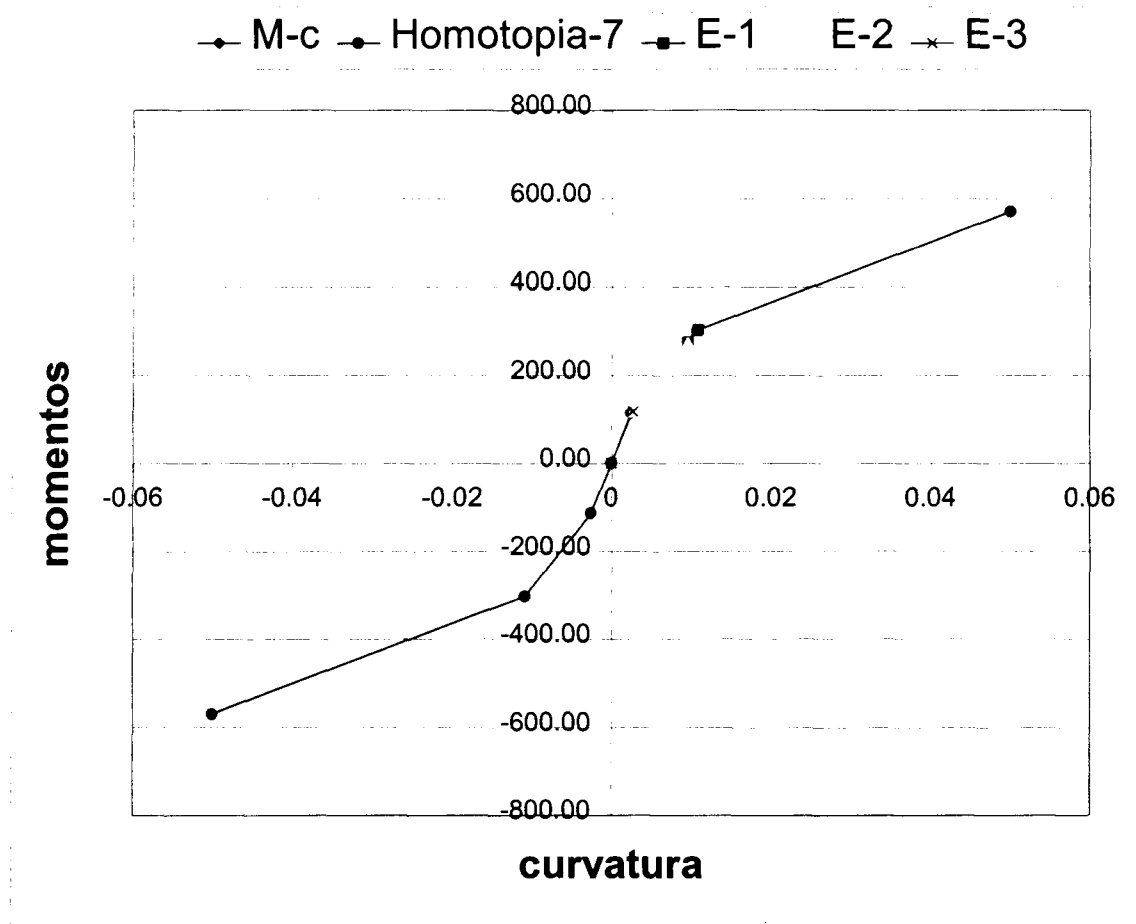
Para la carga indicada de $P = 3632$ kN en un primer cálculo se toma los elementos con longitudes:

$$h_1 = 1.34 \text{ m} \quad h_2 = 1.33 \text{ m} \quad h_3 = 1.33 \text{ m}$$

tras un proceso de adaptación tratando de conseguir la coincidencia de curvaturas entre elementos se llega a las longitudes:

$$h_1 = 1.348 \text{ m} \quad h_2 = 1.275 \text{ m} \quad h_3 = 1.376 \text{ m}$$

Para las cuales la distribución de rigideces entre elementos es:



Hay que ajustar las longitudes de los tramos 1 y 2 de forma que el tramo 1 esté en la zona más débil A2 disminuyendo la longitud de forma que se mantenga la rigidez, para ello se toman como longitudes de los elementos

$$h1 = 0.50 \text{ m} \quad h2 = 2.00 \text{ m} \quad h3 = 1.50 \text{ m}$$

Tras el proceso de adaptación, las longitudes finales de los elementos son:

	Longitud(m)
1	0.502
2	1.999
3	1.499

Los valores finales de las rigideces son:

elemento	1	2	3
a(kNm ²)	22830.09	22830.09	44779.06

En el tramo de rigidez 22830.09 kNm², la longitud es de 1.498 m frente a 1.446 que da el método algebraico (exacto) y el tramo no lineal es de 2.501 m frente a 2.553 m proporcionado por el citado método.

Los autovalores de la matriz de rigidez

0.00		2194686.39	-510265.07	-32078.61	33890.04	0.00
0.00		-510265.07	226519.64	-33890.04	23080.30	0.00
		-32078.61	-33890.04	188791.11	85360.42	-156712.51
119250.46		33890.04	23080.30	85360.42	163475.03	-119250.46
59938.69		0.00	0.00	-156712.51	-119250.46	156712.51
119250.46		0.00	0.00	119250.46	59938.69	-119250.46
118784.92						

son:

5.966, 18477.934, 67930.296, 146650.676, 496214.876, 2319689.849

con el primer valor proximo a cero, en términos relativos, en relación con el resto, se deduce que la carga está proxima a la carga límite por el lado de la zona estable.

Los valores finales de la curvatura son:

Nodo	1	2		3		4
	inicial	Izq.	Der.	Izq.	Der.	final
c(m ⁻¹)	0.010877	0.009596	0.009596	0.002691	0.002691	-1.238E-15

Como se vé las curvaturas por la izquierda y la derecha son iguales.

Los momentos ficticios finales en los nodos son:

nodo	Momento ficticio
2	0.00
3	- 55.87

Los esfuerzos finales (pseudocortantes y flectores) en los elementos son:

		V(kN)	M(kNm)
1	1	52.000	302.961
	2	45.480	274.968
2	2	45.480	274.968
	3	19.483	117.315
3	3	19.483	117.315
	4	0.000	0.000

Como puede obsevarse hay equilibrio en los elementos y en los nodo para el pilar en régimen no lineal.

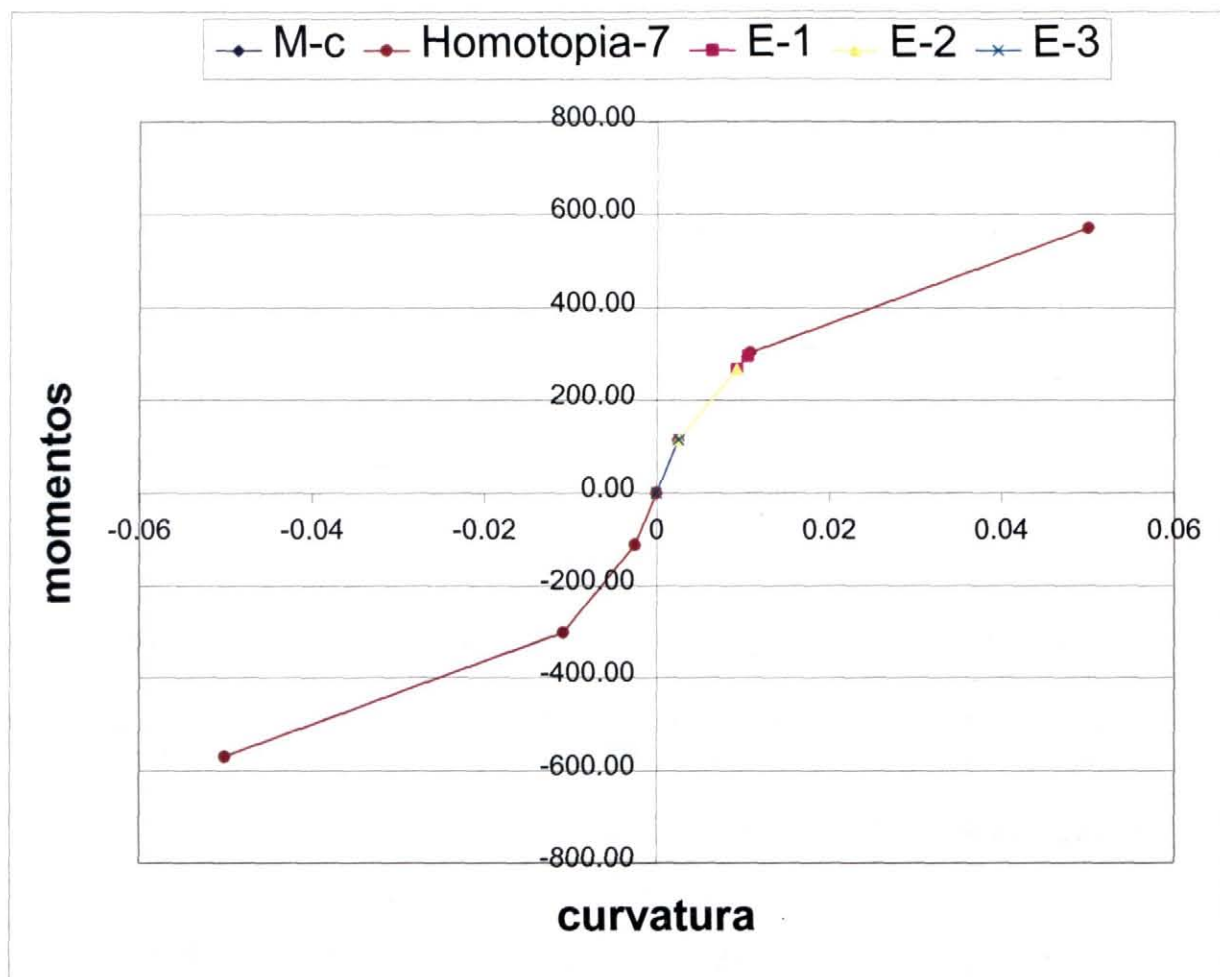


Figura 5.2.7

Como se ve como en el caso de la tabla de rigideces finales el pilar se queda con dos tramos y próximo a entrar en el tercer tramo de la ley momento curvatura.

5.2.5 Ejemplo 8.

En el presente ejemplo se aplica el método general para el caso de un pilar de sección uniforme empotrado en el extremo inferior y apoyado en el superior sometido a una carga uniforme de 20 kN/m. La relación momento curvatura de la sección es una curva de tipo hipérbola tangente a los tramos extremos del diagrama trilineal de la tabla siguiente en la región de curvaturas positivas, y de manera análoga para las negativas:

A(kNm ²)	B(kNm)
45117.67	0.00
22830.09	55.87
6825.42	228.72

NOTA: La ley curva indicada se puede considerar también que procede de realizar directamente una aproximación de la superficie mecánica correspondiente a un cierto valor de la carga P sin pasar por ninguna aproximación de tipo trilineal.

Considerando curvaturas positivas y negativas el diagrama curvo no lineal se representa en la figura siguiente:

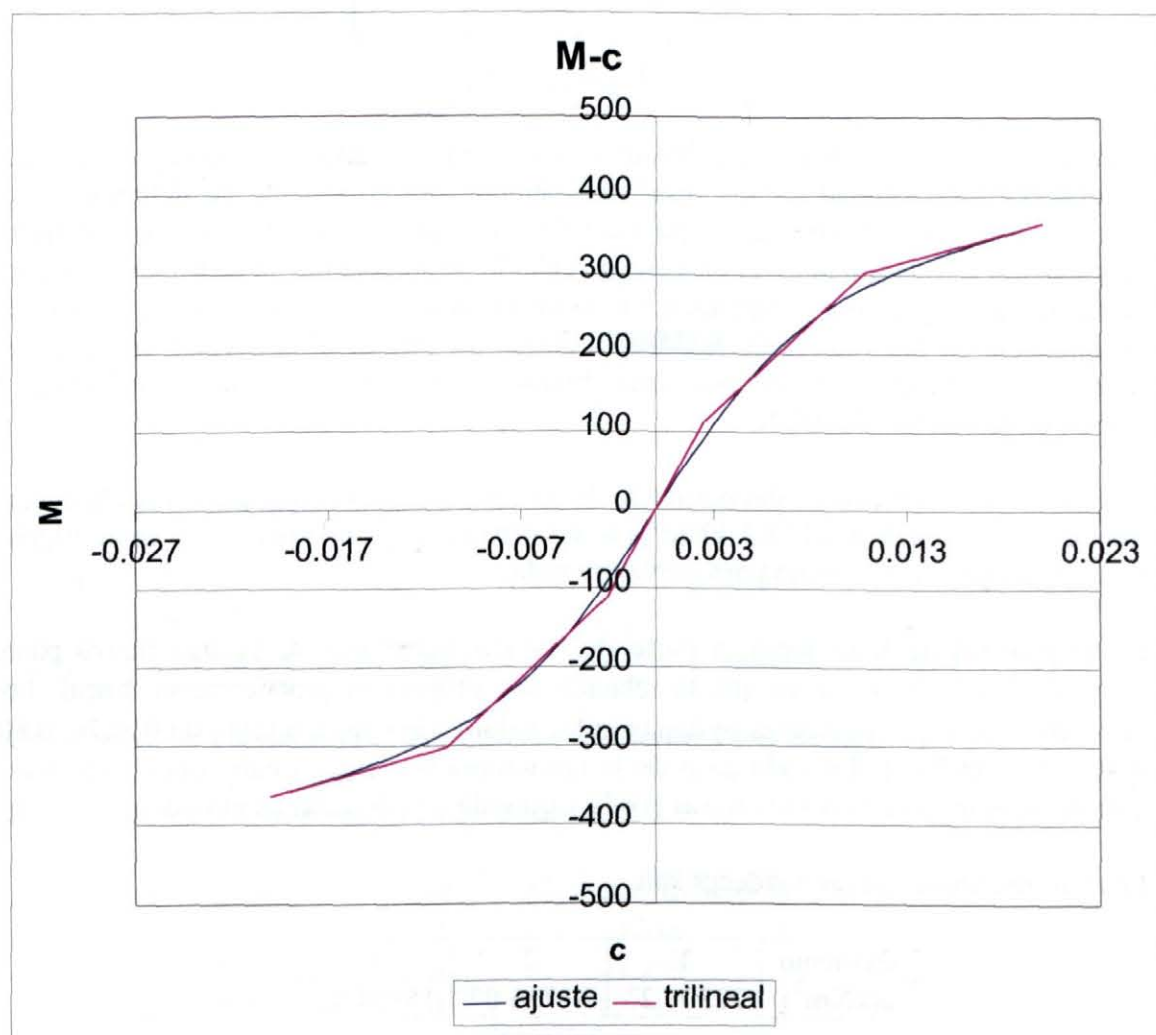


Figura 5.2.8

El análisis de la carga crítica se lleva a cabo considerando una discretización del pilar con cuatro elementos.

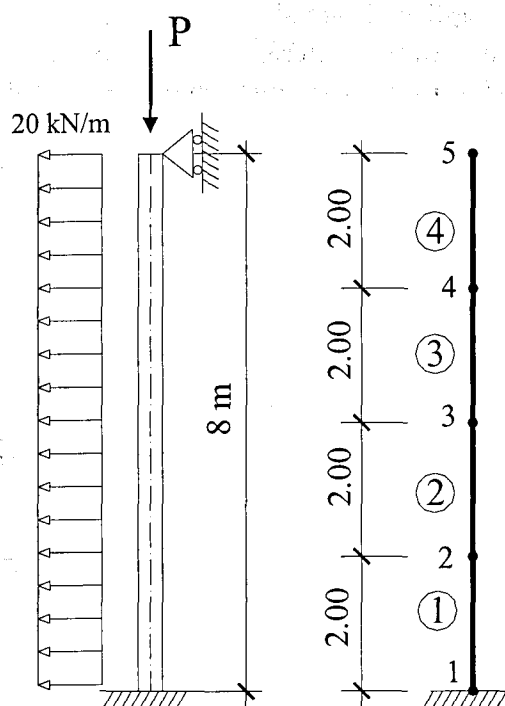


Figura 5.2.9

Para la determinación de la carga límite se aumenta progresivamente la carga hasta que se observa inestabilidad en los resultados aunque posteriormente se determinan los autovalores de la matriz de rigidez para determinar la proximidad de ésta con una matriz singular. La inestabilidad en el proceso de cálculo se aprecia por la aparición de signos en la curvatura que no corresponden con la deformada de la pieza, cambios bruscos de la tendencia en los valores de los desplazamientos, etc. El último valor en el que se mantiene la coherencia de los resultados obtenidos para la tendencia de los valores de P corresponde con $P = 5380 \text{ kN}$.

El cálculo se ha llevado a cabo partiendo de un caso lineal en el que todos los elementos tienen una rigidez de 45117.67 kNm^2 que se corresponde con la pendiente en el origen de la ley momento curvatura para curvatura nula.

En el proceso de homotopía, a parte del estado lineal inicial, se dan nueve pasos iniciándose con $\lambda = 0.4$ ya que la relación homotópica es prácticamente lineal. Los pasos de homotopía siguientes se dan para los valores de λ igual a 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90, 0.93, 0.97 y 1. En cada paso de la homotopía se llevan a cabo once iteraciones para conseguir ajustar las curvaturas por la izquierda y la derecha en el nodo.

Los valores finales de las rigideces son:

elemento	1	2	3	4
$a(\text{kNm}^2)$	22300.23	31736.07	15985.82	30511.71

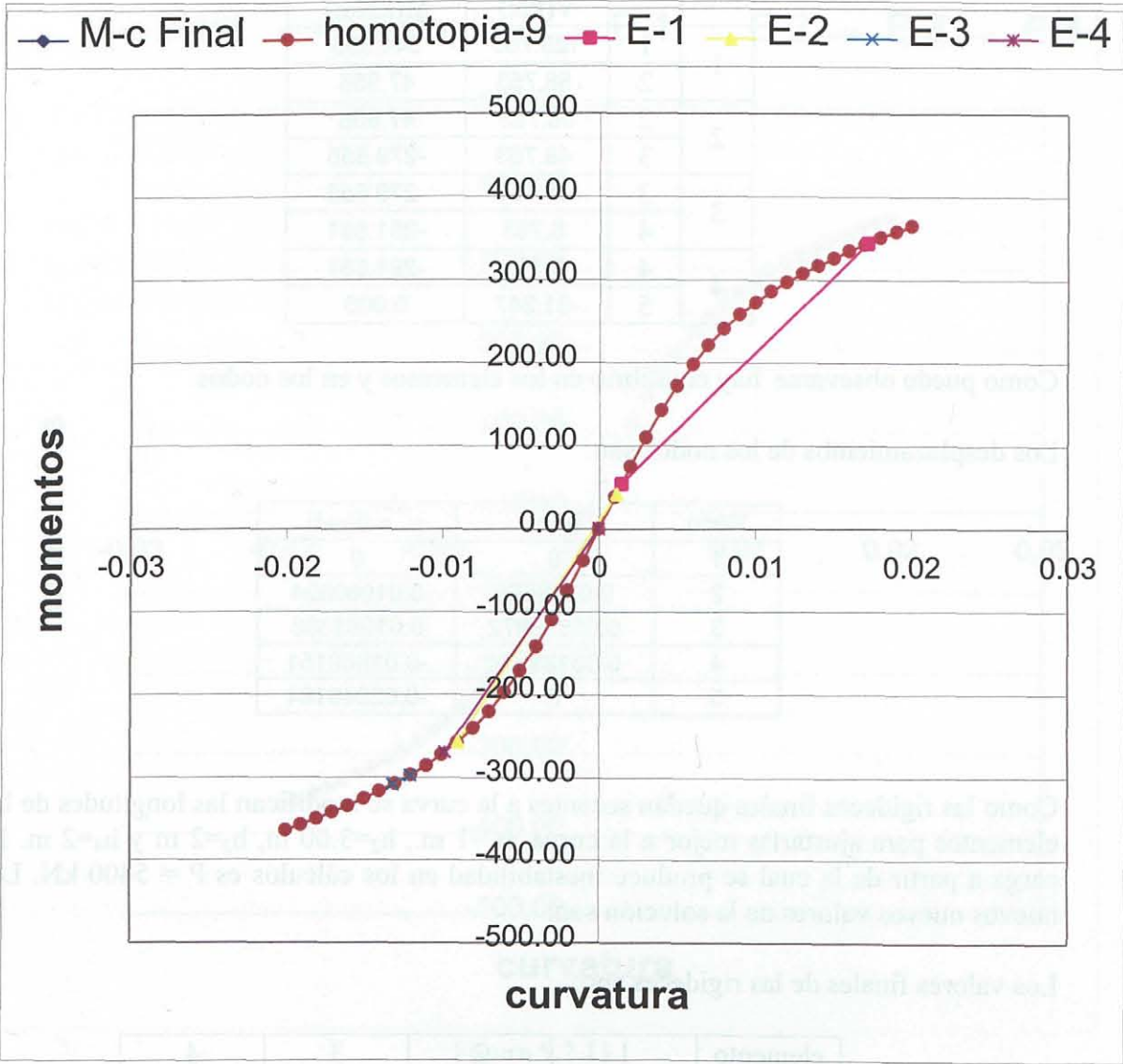


Figura 5.2.10

Los valores finales de la curvatura son:

Nodo	1	2		3		4		5
	Inicial	Izq.	Der.	Izq.	Der.	Izq.	Der.	Final
c(m ⁻¹)	0.01719	0.00126	0.00126	-0.01050	-0.01050	-0.0114	-0.0114	0.000

Como se vé las curvaturas por la izquierda y la derecha son iguales.

Los momentos ficticios finales en los nodos son:

nodo	Momento ficticio
2	- 3.019
3	-74.239
4	72.117

Las cargas de equilibrio en los elementos:

		V(kN)	M(kNm)
1	1	128.753	344.395
	2	88.753	47.956
2	2	88.753	47.956
	3	48.753	-279.655
3	3	48.753	-279.655
	4	8.753	-291.581
4	4	8.753	-291.581
	5	-31.247	0.000

Como puede observarse hay equilibrio en los elementos y en los nodos.

Los desplazamientos de los nodos son:

Nodo	u(m)	$u' \approx \theta(\text{rad})$
1	0	0
2	0.0249526	0.01960824
3	0.05878872	0.01083306
4	0.05139894	-0.01860151
5	0	-0.02949164

Como las rigideces finales quedan secantes a la curva se modifican las longitudes de los elementos para ajustarlas mejor a la curva. $h_1=1$ m., $h_2=3.00$ m, $h_3=2$ m y $h_4=2$ m. La carga a partir de la cual se produce inestabilidad en los cálculos es $P = 5400$ kN. Los nuevos nuevos valores de la solución son:

Los valores finales de las rigideces son:

elemento	1	2	3	4
a(kNm ²)	14763.35	33185.40	19439.67	31739.36

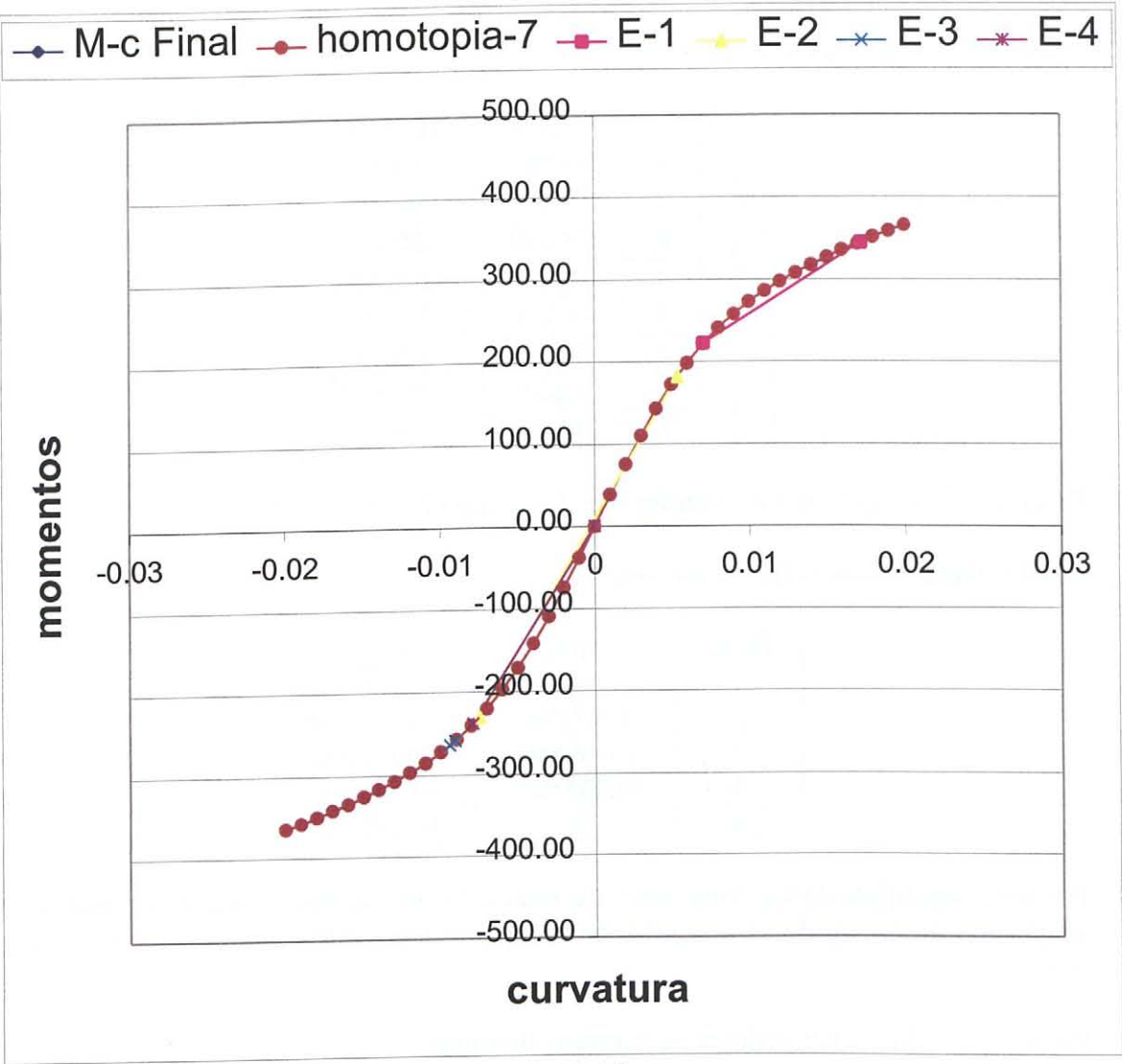


Figura 5.2.11

Se ha conseguido un ajuste mejor a la ley momentos-curvatura lo que supone una rigidización de la pieza y por lo tanto ello justifica el ligero aumento de la carga de pandeo y el menor valor en los desplazamientos.

Los valores finales de la curvatura son:

Nodo	1	2		3		4		5
	Inicial	Izq.	Der.	Izq.	Der.	Izq.	Der.	Final
C(m ⁻¹)	0.01717	0.00620	0.00620	-0.00826	-0.00826	-0.00864	-0.00864	0.000

Como se vé las curvaturas por la izquierda y la derecha son iguales.

Los momentos ficticios finales en los nodos son:

nodo	Momento ficticio
2	- 67.5164771
3	- 60.1371493
4	56.2112063

- Sección tipo 2 para $x \in [2, 6]$. La relación momento curvatura de la sección es una curva de tipo hipérbola tangente a los tramos extremos del diagrama trilineal de la tabla siguiente:

$A(\text{kNm}^2)$	$B(\text{kNm})$
45117.67	0.00
22830.09	55.87
6825.42	228.72

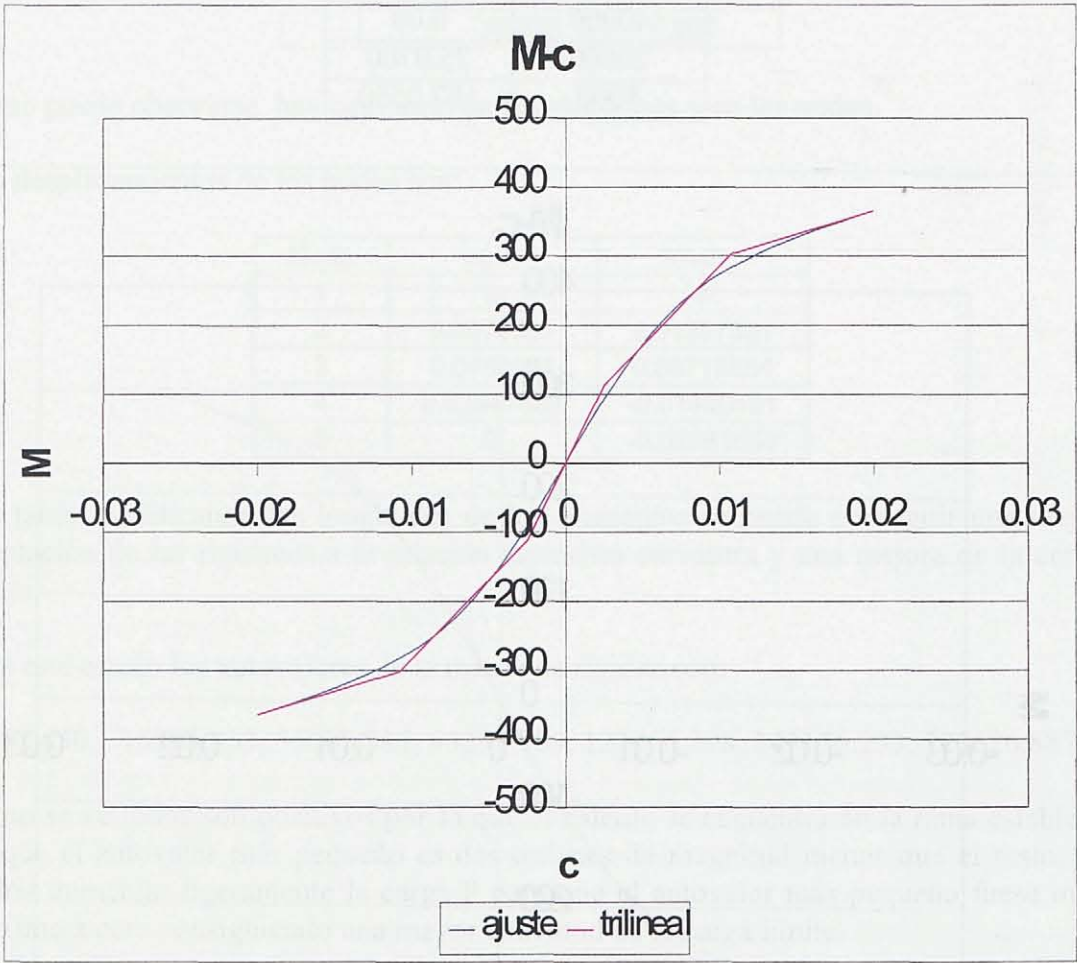


Figura 5.2.14

El pilar se considera articulado en los extremos y sometido a una carga uniforme de 15 kN/m.

El problema se resuelve discretizando el pilar en 6 elementos: $h_1 = h_2 = h_5 = h_6 = 1$ m. y $h_3 = h_4 = 2$ m.

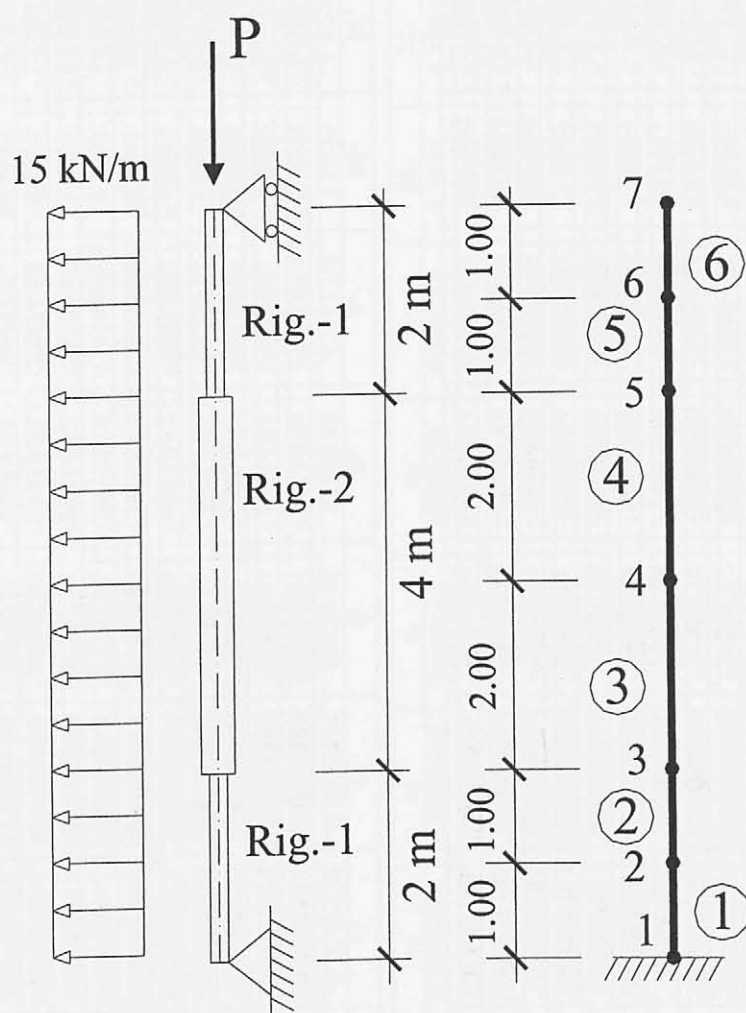


Figura 5.2.15

En las tablas de resultados siguientes se recoge la tendencia de los resultados para valores de la carga próximos a la carga límite. En cada paso de homotopía se indica solamente la primera iteración (iterac-1) y la última (iterac-11) salvo en el primer paso de homotopía que corresponde al caso lineal.

1) Cálculo para el valor de la carga $P = 1900 \text{ kN}$

Homot.	Iterac	u_4	c_4	c_2^-	c_2^+	c_3^-	c_3^+	a_1	a_2	a_3	M_5	M_6
1	2	0.03039877	-0.0042641	-0.002668	-0.002674	-0.0046962	-0.0031334	28529.35	27766.35	40224.91	1.878706	4.356078
	11	0.03059576	-0.004296	-0.002676	-0.002682	-0.0047213	-0.003150	28496.53	27597.69	39809.02	2.2421	4.8674
2	1	0.0305957	-0.004296	-0.0026764	-0.0026824	-0.0047213	-0.0031507	28496.53	27597.69	39809.02	2.2421	4.8674
	11	0.03163895	-0.004455	-0.002741	-0.002749	-0.004863	-0.003250	28107.98	26927.46	38303.95	3.0037	6.4524
3	1	0.0316389	-0.0044553	-0.0027409	-0.0027496	-0.0048630	-0.0032502	28107.98	26927.46	38303.95	3.0037	6.4524
	11	0.03284438	-0.004640	-0.002812	-0.002824	-0.005023	-0.003364	27712.57	26215.98	36687.76	3.881871	8.257741
4	1	0.0328443	-0.0046409	-0.0028121	-0.0028246	-0.0050237	-0.0033647	27712.57	26215.98	36687.76	3.8818	8.2577
	11	0.03427422	-0.004863	-0.002892	-0.0029101	-0.0052099	-0.0034998	27308.72	25450.80	34921.46	4.9163	10.3777
5	1	0.0342742	-0.004863	-0.0028921	-0.0029101	-0.0052099	-0.0034998	27308.72	25450.80	34921.46	4.9163	10.3777
	11	0.03603816	-0.005140	-0.002984	-0.003010	-0.005432	-0.003665	26893.94	24611.28	32938.29	6.1741	12.9828
6	1	0.0360381	-0.0051403	-0.0029844	-0.003010	-0.0054328	-0.0036652	26893.94	24611.28	32938.29	6.1741	12.9828
	11	0.03836361	-0.005511	-0.0030963	-0.0031345	-0.0057151	-0.0038809	26463.56	23657.84	30605.28	7.7852	16.4314
7	1	0.0383636	-0.0055112	-0.0030963	-0.0031345	-0.0057151	-0.0038809	26463.56	23657.84	30605.27	7.7852	16.4314
	11	0.0418950	-0.004202	-0.0032475	-0.0033069	-0.0061185	-0.0042026	26005.81	22488.23	27566.35	10.0885	21.7433
8	1	0.0418952	-0.006086	-0.0032475	-0.0033069	-0.0061185	-0.0042026	26005.80	22488.18	27566.15	10.0886	21.7438
	11	0.04189538	-0.006086	-0.0032476	-0.003306	-0.006118	-0.004202	26005.80	22488.14	27566.02	10.0887	21.7441

2) Cálculo para el valor de la carga $P = 2000 \text{ kN}$

Homot.	Iterac	u_4	c_4	c_2^-	c_2^+	c_3^-	c_3^+	a_1	a_2	a_3	M_5	M_6
1	2	0.03122804	-0.0043824	-0.0027364	-0.0027426	-0.0048222	-0.0032181	28521.10	27729.42	40147.02	1.9925	4.5205
	11	0.031456	-0.0044193	-0.0027458	-0.0027524	-0.0048513	-0.0032382	28485.61	27544.64	39693.57	2.4023	5.0891
2	1	0.03145599	-0.0044193	-0.0027458	-0.0027524	-0.0048513	-0.0032382	28485.61	27544.64	39693.57	2.4023	5.0891
	11	0.03259331	-0.0045931	-0.0028157	-0.0028254	-0.0050058	-0.0033468	28093.0	26852.98	38139.81	3.2326	6.7738
3	1	0.03259331	-0.0045931	-0.0028157	-0.0028254	-0.0050058	-0.0033468	28093.08	26852.98	38139.81	3.2326	6.7738
	11	0.03392401	-0.004798	-0.0028937	-0.002907	-0.0051829	-0.0034733	27692.80	26113.77	36458.69	4.2011	8.7149
4	1	0.03392400	-0.0047980	-0.0028937	-0.0029078	-0.0051829	-0.0034733	27692.80	26113.77	36458.69	4.2011	8.7149
	11	0.0355312	-0.0050481	-0.0029826	-0.0030032	-0.0053917	-0.0036252	27282.73	25310.79	34600.45	5.3607	11.0339
5	1	0.03553120	-0.0050481	-0.0029826	-0.0030032	-0.0053917	-0.0036252	27282.73	25310.79	34600.45	5.3607	11.0339
	11	0.0375720	-0.0053695	-0.0030877	-0.0031181	-0.0056484	-0.0038166	26859.40	24415.35	32474.39	6.8065	13.9647
6	1	0.0375720	-0.005369	-0.0030877	-0.0031181	-0.0056483	-0.0038166	26859.40	24415.35	32474.39	6.8065	13.9647
	11	0.04041502	-0.0058244	-0.003221	-0.0032673	-0.0059902	-0.0040800	26415.53	23365.43	29878.10	8.7468	18.0587
7	1	0.04041504	-0.0058244	-0.0032211	-0.0032673	-0.0059902	-0.0040800	26415.53	23365.42	29878.08	8.7469	18.0588
	11	0.04549681	-0.0058244	-0.0034282	-0.0035072	-0.0065567	-0.0045411	25925.91	21942.47	26079.99	11.9212	25.4290
8	1	0.0455001	-0.0066579	-0.0034283	-0.0035073	-0.0065570	-0.0045414	25925.92	21942.47	26080.00	11.9236	25.4362
	11	0.04550395	-0.0066586	-0.0034284	-0.0035074	-0.0065574	-0.0045417	25925.81	21941.61	26077.01	11.9263	25.4442

3) Cálculo para el valor de la carga $P=2050$ kN

Homot.	Iterac	u_4	c_4	c_2^-	c_2^+	c_3^-	c_3^+	a_1	a_2	a_3	M_5	M_6
1	2	0.03166126	-0.0044443	-0.0027718	-0.0027784	-0.004888	-0.0032623	28516.80	27710.02	40106.26	2.0533	4.6069
	11	0.031907	0.031907	-0.002782	-0.0027890	-0.0049194	-0.003284	28479.86	27516.34	39632.19	2.4891	5.2071
2	1	0.0319070	-0.0044840	-0.0027820	-0.0027890	-0.0049194	-0.003284	28479.86	27516.34	39632.19	2.4891	5.2071
	11	0.03309675	-0.0046658	-0.0028550	-0.0028652	-0.0050809	-0.0033977	28085.18	26812.99	38051.94	3.3577	6.9464
3	1	0.0330967	-0.0046658	-0.0028550	-0.0028652	-0.0050809	-0.0033977	28085.18	26812.99	38051.94	3.3577	6.9464
	11	0.0344985	-0.0048818	-0.0029368	-0.0029518	-0.0052675	-0.0035310	27682.23	26058.37	36334.84	4.3773	8.9631
4	1	0.0344985	-0.0048818	0.0344985	-0.0029518	-0.0052675	-0.0035310	27682.23	26058.37	36334.84	4.3773	8.9631
	11	0.03620956	-0.005148	-0.003030	-0.0030530	-0.0054894	-0.0036928	27268.68	25233.82	34424.26	5.6096	11.3963
5	1	0.03620955	-0.0054968	0.03620955	-0.0030530	-0.0054894	-0.0036928	27268.68	25233.82	34424.26	5.6096	11.3963
	11	0.03842076	-0.0054968	-0.0031438	-0.0031768	-0.0057667	-0.0039002	26840.38	24305.01	32213.03	7.1697	14.5235
6	1	0.03842075	-0.0054968	-0.0031438	-0.0031768	-0.0057667	-0.0039002	26840.38	24305.01	32213.03	7.1697	14.5235
	11	0.04161716	-0.006009	-0.0032916	-0.0033429	-0.0061488	-0.004196	26387.91	23191.75	29443.74	9.3301	19.0494
7	1	0.04161720	-0.0060092	-0.0032916	-0.0033429	-0.0061488	-0.0041962	26387.91	23191.74	29443.69	9.3302	19.0495
	11	0.04831083	-0.0071119	-0.0035549	-0.0036515	-0.0068811	-0.0048020	25868.79	21526.03	24916.93	13.3584	28.4711
8	1	0.04833377	-0.0071158	-0.0035556	-0.0036524	-0.0068834	-0.0048040	25868.27	21521.58	24902.02	13.3728	28.5121
	11	0.04837578	-0.0071230	-0.0035570	-0.0036540	-0.0068875	-0.0048076	25867.32	21513.45	24874.81	13.3991	28.5869

4) Cálculo para el valor de la carga $P=2150$ kN

Homot.	Iterac	u_4	c_4	c_2^-	c_2^+	c_3^-	c_3^+	a_1	a_2	a_3	M_5	M_6
1	2	0.0325679	-0.0045738	-0.0028458	-0.0028531	-0.0050255	-0.0033548	28507.83	27669.23	40020.83	2.1834	4.7884
	11	0.0328549	-0.0046201	-0.0028579	-0.0028657	-0.0050623	-0.0033804	28467.67	27455.78	39501.32	2.6783	5.4591
2	1	0.0328548	-0.0046201	-0.0028579	-0.0028657	-0.0050623	-0.003380	28467.67	27455.78	39501.32	2.6783	5.4591
	11	0.034162	-0.004819	-0.002937	-0.002949	-0.005239	-0.003505	28068.36	26726.75	37863.10	3.6323	7.3180
3	1	0.0341622	-0.0048199	-0.0029376	-0.0029492	-0.0052398	-0.0035054	28068.36	26726.75	37863.10	3.6323	7.3180
	11	0.03572756	-0.005061	-0.003028	-0.003045	-0.005447	-0.003654	27659.55	25937.56	36065.60	4.7688	9.5047
4	1	0.0357275	-0.0050613	-0.0030282	-0.0030454	-0.0054477	-0.0036543	27659.55	25937.56	36065.60	4.7688	9.5047
	11	0.03768578	-0.0053666	-0.003134	-0.003160	-0.005700	-0.003839	27238.10	25063.03	34034.12	6.1728	12.204
5	1	0.0376857	-0.0053665	-0.0031345	-0.0031603	-0.0057009	-0.0038396	27238.10	25063.03	34034.12	6.1728	12.2041
	11	0.040330	-0.005784	-0.003267	-0.003306	-0.006030	-0.0040878	26797.87	24052.09	31613.74	8.0199	15.8198
6	1	0.0403309	-0.0057845	-0.0032670	-0.0033065	-0.0060306	-0.0040878	26797.87	24052.09	31613.74	8.0199	15.8198
	11	0.04459322	-0.006470	-0.0034574	-0.003523	-0.006533	-0.004482	26321.51	22757.04	28348.45	10.8249	21.6085
7	1	0.044593	-0.006471	-0.0034574	-0.003523	-0.006533	-0.004482	26321.49	22756.90	28348.00	10.8250	21.6096
	8	0.06642797	-0.0101002	-0.0042263	-0.0044804	-0.0087534	-0.0065073	25625.39	19592.70	19705.30	20.5169	43.2747

Para la carga de 2150 kN en el paso de homotopia 7 con $\lambda=1$ en la relación momento curvatura de las secciones, en la iteración 8 se produce un aumento repentino de los desplazamientos que no sigue la tendencia de pasos anteriores por lo que se considera que el sistema del problema lineal da valores anómalos debido a que la matriz de rigidez está próxima a la singularidad. Por tanto esta carga se considera la carga límite.

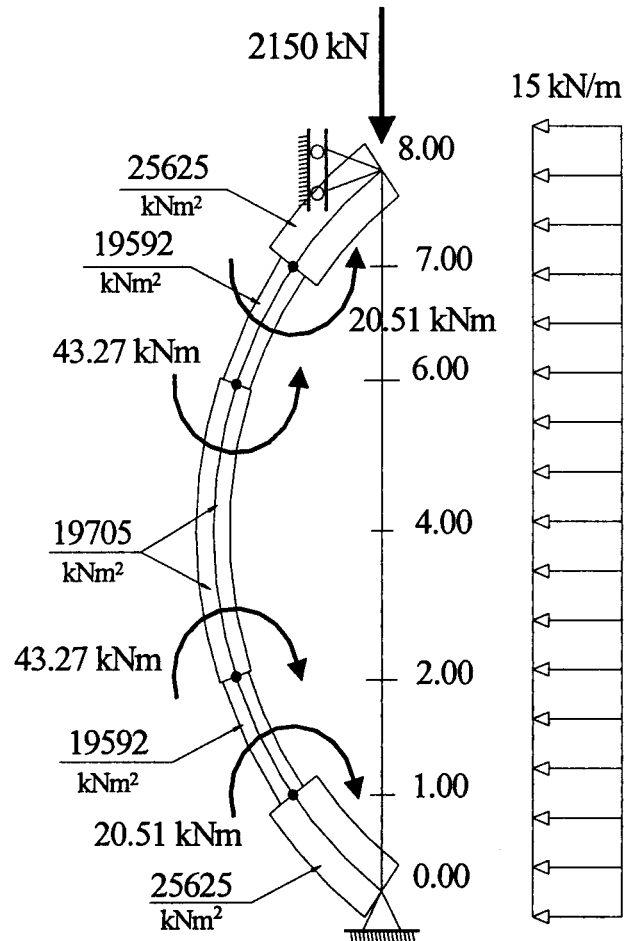


Figura 5.2.16

5.2.7 Ejemplo 10

Para finalizar el capítulo de ejemplos se considera el caso de una ménsula con características uniformes con un momento en un punto intermedio, sometida a una carga uniforme en su longitud y una carga concentrada en el extremo, tratándose de determinar la carga límite.

Con este ejemplo se trata de poner de manifiesto la posibilidad de aplicar el método cuando existen momentos puntuales que dan lugar a la discontinuidad de la relación momentos curvatura. En este ejemplo se aprecia como se aplica el método cuando a lo largo del proceso se producen cambios en la rigidez a los dos lados del punto de discontinuidad de momentos en el que por tanto existe un salto en las curvaturas. Es decir en estos puntos pueden aparecer distintos tipos de discontinuidad: rigidez, curvatura y momentos.

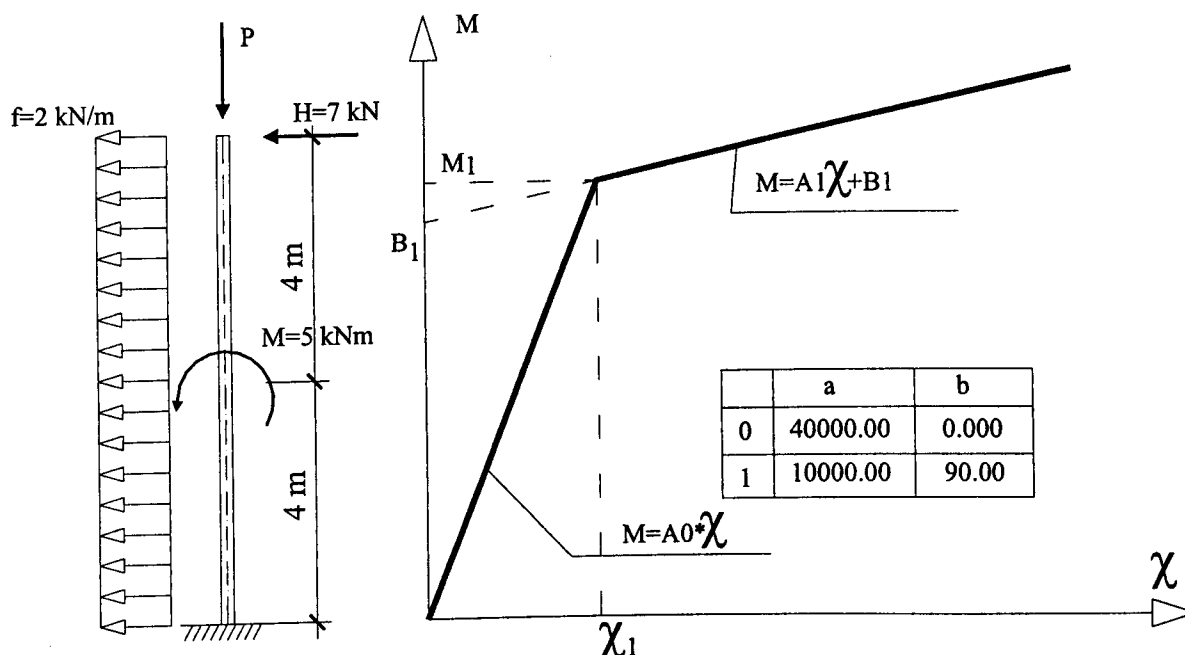


Figura 5.2.17

El comportamiento de la sección se caracteriza mediante una relación momentos curvatura de tipo bilineal indicada en la figura anterior con $\chi_1 = 0.003$.

Se trata de determinar la carga P_{lim} . Para ello el problema se discretiza en cuatro elementos de longitudes iguales $h_i = 2.00$ m. resolviendo el problema para valores crecientes de P hasta que la deformada toma valores que divergen respecto de la tendencia de cargas anteriores considerándose en este caso que se ha llegado a la carga de pandeo.

En la figura siguiente se indica la modelización y discretización utilizada.

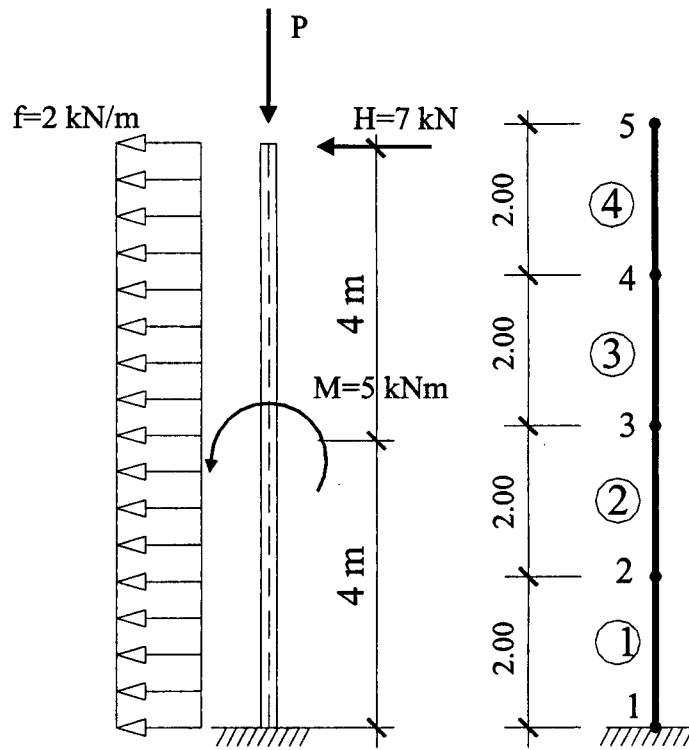


Figura 5.2.18

El problema se resuelve para los valores de P : 350, 375, 390 y 400 kN. La deformada aumenta con P hasta el valor que se considera límite $P = 400 \text{ kN}$.

1) Cálculo para el valor de la carga $P=350$ kN

Tabla de valores representativos de la ménsula para la carga $P=350$ kN

Homot	iterac	u_5	c_1	a_1	a_2	a_3	a_4	M_2	M_3	M_4
1($\lambda=0.4$)	2	0.078010	0.004112	31533.725	40000.000	40000.000	40000.000	-22.632	0.000	0.000
	11	0.078353	0.004158	30492.006	40000.000	40000.000	40000.000	-25.638	5.000	0.000
2($\lambda=0.5$)	1	0.078353	0.004158	30492.006	40000.000	40000.000	40000.000	-25.638	5.000	0.000
	11	0.079687	0.004316	27737.642	40000.000	40000.000	40000.000	-33.185	5.000	0.000
3($\lambda=0.6$)	1	0.079687	0.004316	27737.642	40000.000	40000.000	40000.000	-33.185	5.000	0.000
	11	0.081443	0.004523	24802.461	40000.000	40000.000	40000.000	-41.325	5.000	0.000
4($\lambda=0.7$)	1	0.081443	0.004523	24802.461	40000.000	40000.000	40000.000	-41.325	5.000	0.000
	11	0.083860	0.004808	21667.846	40000.000	40000.000	40000.000	-50.173	5.000	0.000
5($\lambda=0.8$)	1	0.083860	0.004808	21667.846	40000.000	40000.000	40000.000	-50.173	5.000	0.000
	11	0.087397	0.005224	18312.324	40000.000	40000.000	40000.000	-59.920	5.000	0.000
6($\lambda=0.9$)	1	0.087397	0.005224	18312.342	40000.000	40000.000	40000.000	-59.920	5.000	0.000
	11	0.093070	0.005890	14709.532	40000.000	40000.000	40000.000	-70.930	5.000	0.000
7($\lambda=1.0$)	1	0.093077	0.005891	14712.758	40000.000	40000.000	40000.000	-70.911	5.000	0.000
	11	0.103658	0.007128	10829.719	40000.000	40000.000	40000.000	-84.084	5.000	0.000
	12	0.103712	0.007130	10839.819	40000.000	40000.000	40000.000	-84.014	5.000	0.000
	22	0.103737	0.007131	10844.401	40000.000	40000.000	40000.000	-83.981	5.000	0.000
	23	0.103650	0.007128	10827.976	40000.000	40000.000	40000.000	-84.096	5.000	0.000
	33	0.103642	0.007128	10826.164	40000.000	40000.000	40000.000	-84.108	5.000	0.000

La distribución de rigideces correspondiente a esta situación límite es:

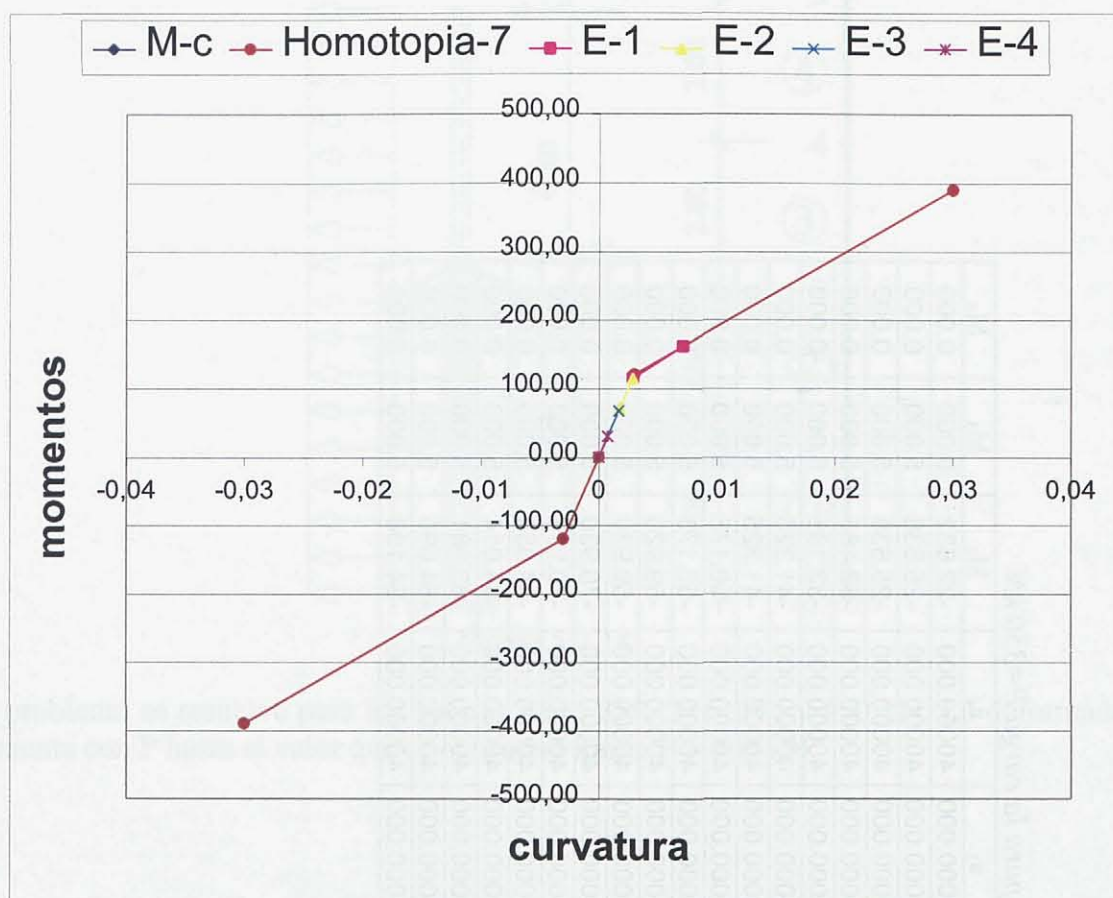


Figura 5.2.19

El momento en el empotramiento es $M_1=161.277 \text{ kNm}$.

Los autovalores obtenidos de la matriz de rigidez del último cálculo efectuado son:

25.08, 3195.67, 18841.73, 42997.96, 67660.38, 250987.53, 251830.09, 240227.29

Comprobándose que son todos positivos y por tanto se está en la zona estable aunque la matriz de rigidez es próxima a una matriz singular lo que nos indica que la carga $P = 350 \text{ kN}$ es cercana a la carga límite.

2) Cálculo para el valor de la carga $P = 375 \text{ kN}$

Tabla de valores representativos de la ménsula para la carga $P=375 \text{ kN}$

Homot	iterac	u3	c ₁	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	M ₂	M ₃	M ₄
1($\lambda=0.4$)	2	0.079962	0.004211	30909.903	40000.000	40000.000	40000.000	-24.813	0.000	0.000
	11	0.080264	0.004254	29947.097	40000.000	40000.000	40000.000	-27.718	5.000	0.000
2($\lambda=0.5$)	1	0.080264	0.004254	29947.097	40000.000	40000.000	40000.000	-27.718	5.000	0.000
	11	0.081746	0.004426	27091.852	40000.000	40000.000	40000.000	-35.741	5.000	0.000
3($\lambda=0.6$)	1	0.081746	0.004426	27091.852	40000.000	40000.000	40000.000	-35.741	5.000	0.000
	11	0.083703	0.004654	24076.610	40000.000	40000.000	40000.000	-44.335	5.000	0.000
4($\lambda=0.7$)	1	0.083703	0.004654	24076.610	40000.000	40000.000	40000.000	-44.335	5.000	0.000
	11	0.086410	0.004969	20887.267	40000.000	40000.000	40000.000	-53.623	5.000	0.000
5($\lambda=0.8$)	1	0.086410	0.004969	20887.267	40000.000	40000.000	40000.000	-53.623	5.000	0.000
	11	0.090400	0.005431	17507.671	40000.000	40000.000	40000.000	-63.811	5.000	0.000
6($\lambda=0.9$)	1	0.090400	0.005431	17507.835	40000.000	40000.000	40000.000	-63.811	5.000	0.000
	11	0.096845	0.006178	13909.706	40000.000	40000.000	40000.000	-75.376	5.000	0.000
7($\lambda=1.0$)	1	0.096927	0.006180	13939.711	40000.000	40000.000	40000.000	-75.194	5.000	0.000
	11	0.108432	0.007564	10000.000	39729.699	40000.000	40000.000	-89.485	4.467	0.000
	12	0.112265	0.007700	10559.279	40000.000	40000.000	40000.000	-85.769	4.976	0.000
	22	0.112422	0.007701	10606.090	40000.000	40000.000	40000.000	-85.420	4.944	0.000
	23	0.108279	0.007555	10000.000	39712.448	40000.000	40000.000	-89.452	4.396	0.000
	33	0.108163	0.007548	10000.000	39700.603	40000.000	40000.000	-89.430	4.345	0.000

La distribución de rigideces correspondiente a esta situación límite es:

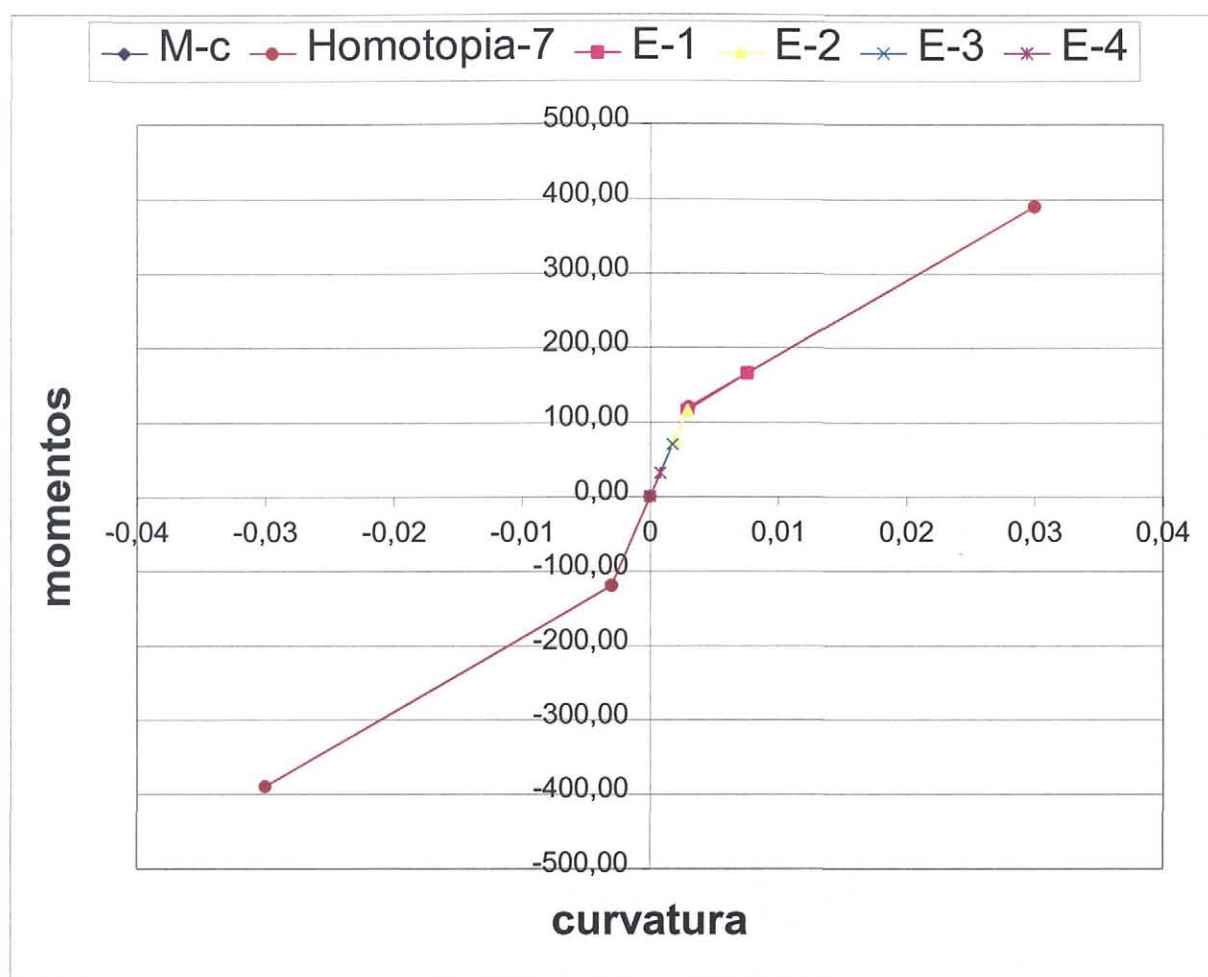


Figura 5.2.20

El momento en el empotramiento es $M_1 = 165.458 \text{ kNm}$.

Los autovalores de la matriz de rigidez del último cálculo efectuado son:

19.57, 3123.67, 18298.75, 41517.36, 66652.49, 239257.66, 250771.82, 250966.21

Comprobándose que son todos positivos y por tanto se está en la zona estable y algo más próximos a la carga límite.

3) Cálculo para el valor de la carga $P = 390 \text{ kN}$

Tabla de valores representativos de la ménsula para la carga $P=390 \text{ kN}$

Homot	iterac	u3	c ₁	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	M ₂	M ₃	M ₄
1($\lambda=0.4$)	2	0.081191	0.004274	30525.742	40000.000	40000.000	40000.000	-26.193	0.000	0.000
	11	0.081456	0.004313	29619.772	40000.000	40000.000	40000.000	-29.014	5.000	0.000
2($\lambda=0.5$)	1	0.081456	0.004313	29619.772	40000.000	40000.000	40000.000	-29.014	5.000	0.000
	11	0.083034	0.004495	26706.669	40000.000	40000.000	40000.000	-37.328	5.000	0.000
3($\lambda=0.6$)	1	0.083034	0.004495	26706.669	40000.000	40000.000	40000.000	-37.328	5.000	0.000
	11	0.085122	0.004736	23646.908	40000.000	40000.000	40000.000	-46.200	5.000	0.000
4($\lambda=0.7$)	1	0.085122	0.004736	23646.908	40000.000	40000.000	40000.000	-46.200	5.000	0.000
	11	0.088018	0.005070	20428.814	40000.000	40000.000	40000.000	-55.756	5.000	0.000
5($\lambda=0.8$)	1	0.088018	0.005070	20428.818	40000.000	40000.000	40000.000	-55.756	5.000	0.000
	11	0.092304	0.005562	17038.906	40000.000	40000.000	40000.000	-66.221	5.000	0.000
6($\lambda=0.9$)	1	0.092305	0.005562	17039.468	40000.000	40000.000	40000.000	-66.218	5.000	0.000
	11	0.099204	0.006361	13430.590	40000.000	40000.000	40000.000	-78.254	5.000	0.000
7($\lambda=1.0$)	1	0.099565	0.006371	13541.439	40000.000	40000.000	40000.000	-77.556	5.000	0.000
	11	0.122187	0.008291	10000.000	30409.086	40000.000	40000.000	-70.838	-13.905	0.000
	12	0.122743	0.008317	10000.000	29952.234	40000.000	40000.000	-69.877	-14.820	0.000
	22	0.128303	0.008591	10000.000	26591.284	40000.000	40000.000	-62.497	-21.633	0.000
	23	0.129007	0.008626	10000.000	26271.361	40000.000	40000.000	-61.757	-22.292	0.000
	33	0.154511	0.009950	10000.000	19947.882	40000.000	40000.000	-44.838	-35.922	0.000

La distribución de rigideces correspondiente a esta situación límite es:

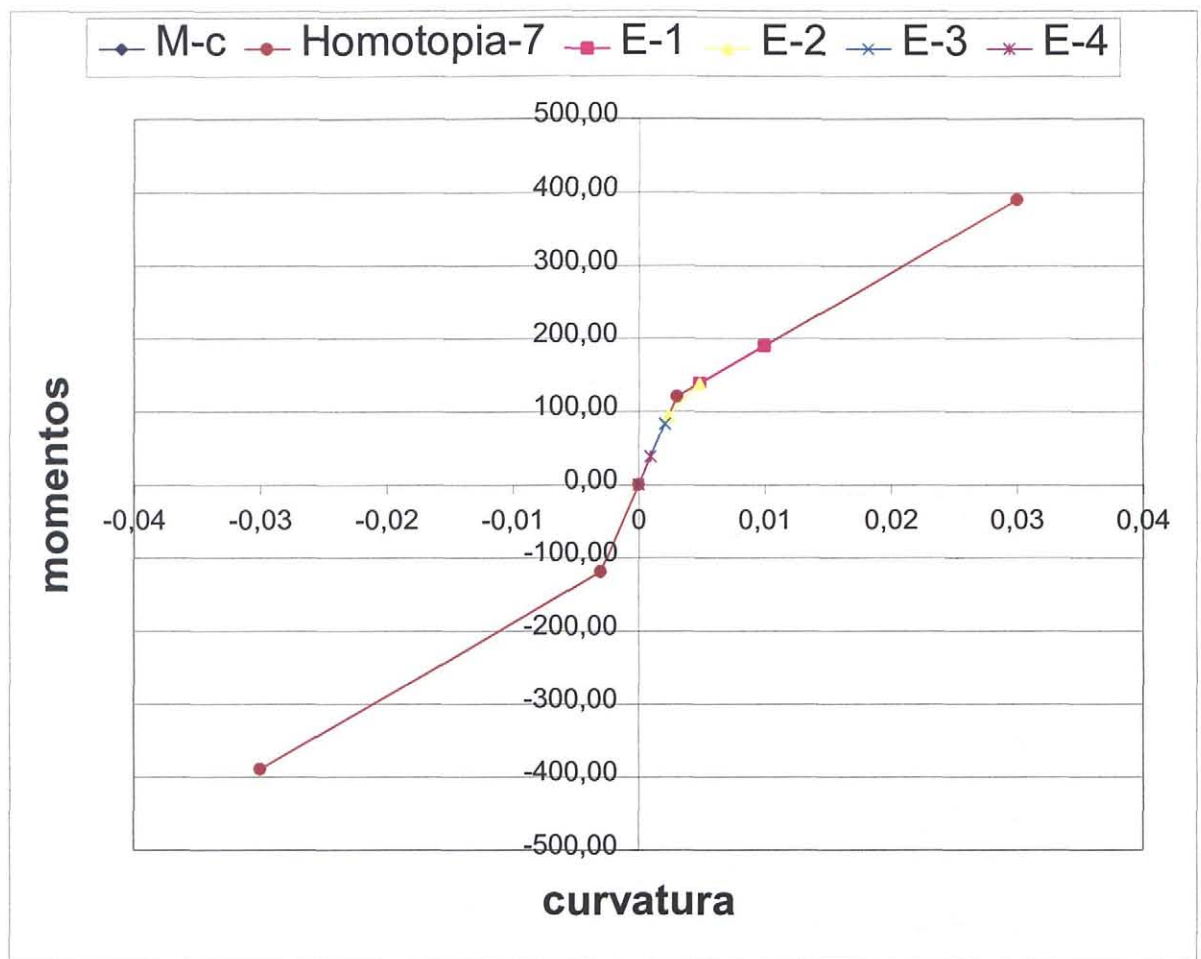


Figura 5.2.21

El momento en el empotramiento es $M_1=189.499$ kNm.

Los autovalores obtenidos de la matriz de rigidez del último cálculo efectuado son:

13.14, 2466.54, 16101.55, 37915.14, 55267.75, 126931.26, 245539.27, 248033.71

Comprobándose que son todos positivos y por tanto se está en la zona estable y más próximos que antes a la carga límite.

4) Cálculo para la carga $P = 400 \text{ kN}$

Tabla de valores representativos de la ménsula para la carga $P=400 \text{ kN}$

Homot.	Iterac.	u_3	χ_1	a_1	a_2	a_3	a_4	M_2	M_3	M_4
1($\lambda=0.4$)	2	0.082035	0.004317	30265.378	40000.000	40000.000	40000.000	-27.145	0.000	0.000
	11	0.082272	0.004354	29401.392	40000.000	40000.000	40000.000	-29.899	5.000	0.000
2($\lambda=0.5$)	1	0.082272	0.004354	29401.392	40000.000	40000.000	40000.000	-29.899	5.000	0.000
	11	0.083916	0.004543	26450.821	40000.000	40000.000	40000.000	-38.409	5.000	0.000
3($\lambda=0.6$)	1	0.083916	0.004543	26450.821	40000.000	40000.000	40000.000	-38.409	5.000	0.000
	11	0.086095	0.004793	23362.814	40000.000	40000.000	40000.000	-47.469	5.000	0.000
4($\lambda=0.7$)	1	0.086095	0.004793	23362.814	40000.000	40000.000	40000.000	-47.469	5.000	0.000
	11	0.089124	0.005139	20127.186	40000.000	40000.000	40000.000	-57.207	5.000	0.000
5($\lambda=0.8$)	1	0.089124	0.005139	20127.195	40000.000	40000.000	40000.000	-57.207	5.000	0.000
	11	0.093620	0.005653	16731.914	40000.000	40000.000	40000.000	-67.862	5.000	0.000
6($\lambda=0.9$)	1	0.093622	0.005653	16733.172	40000.000	40000.000	40000.000	-67.855	5.000	0.000
	11	0.100840	0.006486	13137.173	40000.000	40000.000	40000.000	-80.108	4.980	0.000
7($\lambda=1.0$)	1	0.101303	0.006500	13264.132	40000.000	40000.000	40000.000	-79.287	4.980	0.000
	11	0.162149	0.010376	10000.000	19724.083	40000.000	40000.000	-43.727	-37.372	0.000
	12	0.194857	0.012033	10000.000	16452.296	40000.000	40000.000	-32.209	45.402	0.000

Para la carga de 400 kN en el paso de homotopía 8 y la iteración 2 se produce un crecimiento elevado del desplazamiento en el nodo 5, indicando que el sistema es inestable por lo que se puede considerar a esta carga como la carga de inestabilidad.

La distribución de rigideces correspondiente a esta situación límite es:

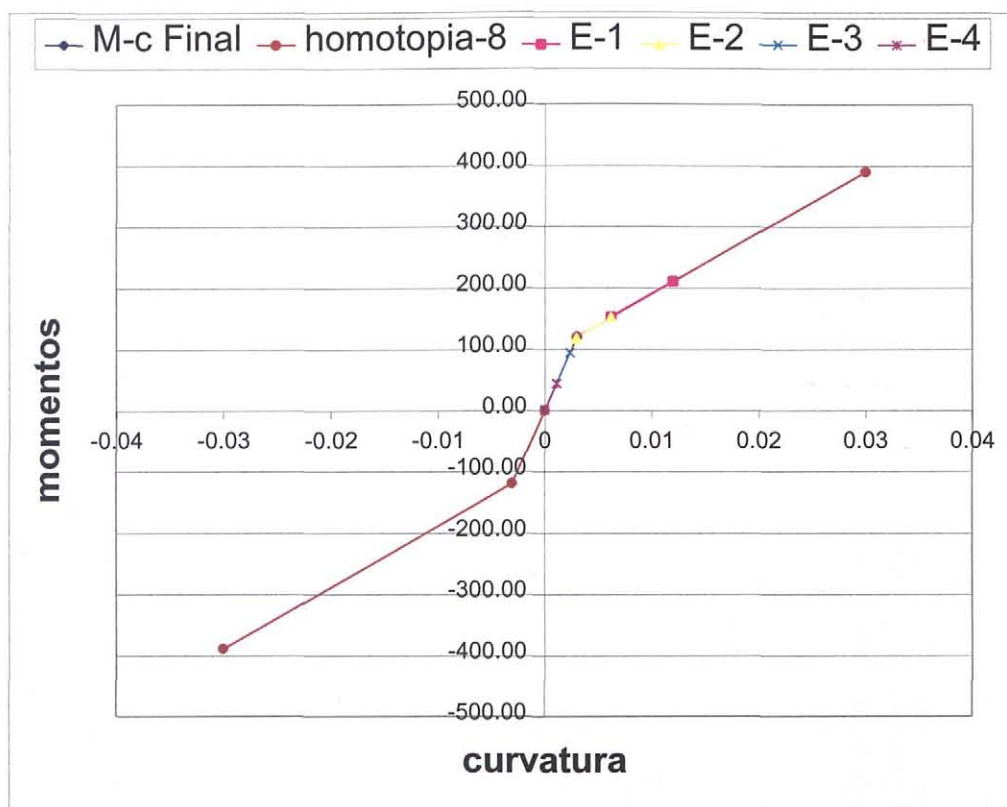


Figura 5.2.22

El momento en el empotramiento es $M_1=210.331$ kNm.

En la evolución de los valores anteriores se observa como la rigidez del elemento 2 pasa del valor grande 40000 kNm^2 a acercarse al valor debil 10000 kNm^2 quedando con un valor de 16452.296 kNm^2 . Este valor de lugar a la existencia de dos momentos ficticios $M_2 = -32.209 \text{ kNm}$ y $M_3 = -45.402 \text{ kNm}$. En la solución exacta del pilar lineal equivalente solo existiría un momento ficticio en el punto transición de la rigidez fuerte a la debil de valor -90 kNm . Una aproximación mejor al resultado exacto se conseguiría como se indico en el apartado 4.6.3 mediante el aumento de elementos dividiendo los elementos 2 y 3 o variando las longitudes de estos.

Finalmente se han calculado los autovalores de la matriz de rigidez del último cálculo efectuado obteniéndose los siguientes valores:

10.28, 2269.46, 15484.11, 36960.46, 53382.11, 106601.62, 245436.87, 247593.61

Comprobándose que son todos positivos y por tanto se está en la zona estable y que el primer autovalor relativamente pequeño respecto a los demás está próximo a anularse al aumentar la carga P indicando la gran proximidad de la carga $P = 400 \text{ kN}$ a la carga límite en la que este autovalor se anularía como muestra la tendencia de los autovalores más pequeños de los últimos casos calculados.

5.2.7 Comentarios.

A través de los ejemplos realizados en el presente capítulo se ha tratado de poner de manifiesto alguna de las características de los métodos propuestos para el análisis de pilares: método algebraico y método general.

En la primera parte (ejemplos 1 a 4) se ha demostrado la facilidad con la que el método algebraico permite analizar el comportamiento de pilares en situaciones habituales de condiciones de contorno y carga mediante métodos analíticos. En particular se destaca:

- La determinación de cargas límite y
- La descripción de las trayectorias de estabilidad e inestabilidad de equilibrio carga-desplazamiento.

En el ejemplo 2 se resuelve un ejemplo recogido en el documento "Manual of buckling and stability" del C.E.B. en el que se pone de manifiesto la simplicidad del método para el análisis del comportamiento del pilar consiguiendo unos resultados coincidentes con los obtenidos por el CEB que ha utilizado el método de los elementos finitos. Asimismo en la aplicación 4 a parte de determinar la carga límite, se comparan las relaciones M-P de rotura y estabilidad del pilar en la que de forma gráfica queda reflejada la capacidad del pilar para los estados último de rotura y estabilidad.

En la segunda parte del apartado dedicada al método general (ejemplos 5 a 10), se describe la metodología del método (ejemplo 5) y se comprueba su exactitud para el caso de relaciones M- χ formadas por segmentos como es el caso de leyes M- χ dadas por una relación trilineal o bilineal comparándolo con casos en los que se conoce la solución mediante el método algebraico (ejemplo 6 y 7). Una vez comprobada la posibilidad de obtener la solución exacta para relaciones M- χ poligonales se pasa a aplicar el método para el caso de relaciones M- χ curvas, a distintos tipos de situaciones:

- Caso hiperestático (ejemplo 8).
- Caso isostático de sección variable (ejemplo 9).
- Caso con momento puntual en el interior de la pieza (ejemplo 10).

De acuerdo con los resultados se comprueba la tendencia estable de la solución cuando la carga asimismo se mueve en la rama estable produciéndose un cambio brusco de tendencia cuando se alcanza la carga límite.

En estos ejemplos se determina la carga límite de pandeo al mismo tiempo que se pone de manifiesto la posibilidad de mejorar la solución obtenida mediante un proceso adaptativo bien aumentando el número de elementos ó variando la longitud de los elementos. En ambos casos la adaptación a la relación M- χ permite guiar el proceso de discretización o de variación de longitud de los elementos.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES Y TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN FUTUROS

6.1 CONCLUSIONES

A lo largo de la presente memoria se ha realizado un análisis sobre el pandeo de pilares teniendo en cuenta la no linealidad del material. En la misma se ha puesto de manifiesto el comportamiento de los pilares tanto cuando están sometidos a carga axial únicamente (problema homogéneo), como cuando existen además otras cargas y momentos actuando en la pieza (problema no homogéneo). Asimismo se ha llevado cabo una serie de aportaciones y se han obtenido diversos resultados que se destacan a continuación.

Uno de los aspectos de mayor interés del análisis efectuado y que se pone de manifiesto de una forma clara a través de las técnicas de cálculo utilizadas es la determinación de las soluciones estables e inestables, cuestión esta que no es recogida habitualmente en esta clase de estudios aplicados.

Como resultado final de todo el trabajo se han propuesto dos procedimientos para realizar el cálculo y análisis de la viga-columna. Al primero de ellos se le ha denominado método algebraico, y el mismo permite obtener la solución de forma directa, mediante la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales, para casos que se califican como sencillos o simplificados, fundamentalmente por el carácter isostático de los mismos. El segundo procedimiento se ha denominado método general y está basado en la teoría de splines generalizados y elementos finitos. Mediante este último es posible abordar problemas generales con estados de carga, condiciones de contorno y con características resistentes del pilar, variables a lo largo de la directriz. Ambos métodos permiten determinar las cargas críticas de inestabilidad y las trayectorias carga-desplazamiento así como las configuraciones posibles de equilibrio, leyes de esfuerzo, estados tensionales y deformaciones en cada una de las secciones de la pieza.

El uso de la técnica de elementos finitos basada en la teoría de splines generalizados presenta claras ventajas sobre los elementos finitos polinómicos usuales como se ha demostrado a lo largo de la exposición al conseguirse soluciones nodalmente exactas para los problemas lineales resueltos. Al mismo tiempo la utilización del concepto de acción repartida equivalente permite conseguir una buena aproximación de las leyes de esfuerzos y de las deformaciones en el interior de los elementos, empleando un número reducido de ellos.

El problema no lineal en los casos no simplificados se puede abordar, tal y como se ha expuesto, utilizando el método general propuesto a través de la resolución de una serie de problemas lineales sucesivos que se abordan mediante la técnica de elementos finitos basada en los splines generalizados. Esta posibilidad ha sido consecuencia del desarrollo del concepto de pilar lineal equivalente, aportación que consideramos esencial en el trabajo de tesis efectuado.

6.1.1 Formulación del problema

Se ha llevado a cabo la construcción de la ecuación que rige el modelo del elemento estructural viga-columna mediante una formulación clásica, siendo dicha ecuación de la forma

$$[g(x, P, \chi(u))]'' + Pu'' = f(x)$$

en la que el término $g(x, P, \chi(u))$ no es lineal en la variable u .

En dicho término se recogen los aspectos que caracterizan el problema:

- Dependencia de la carga P y de las características de la sección en el punto x .
- Fijadas x y P la función depende de la curvatura de manera continua y derivable a trozos con derivada acotada en todos los puntos donde dicha derivada está definida. La función es creciente con derivada decreciente respecto a dicha variable en la región de curvaturas positivas.

6.1.2 Superficie mecánica

A lo largo de la exposición realizada se ha tratado en distintos apartados el concepto de superficie mecánica, elemento clave para el desarrollo efectuado. Dicha superficie como se ha indicado resulta de las relaciones constitutivas de los materiales recogiendo además otro tipo de información del comportamiento de los mismos como se pone de relieve por ejemplo al estudiar la superficie mecánica del hormigón: figuración, fluencia, “tension stiffening”, etc. Dicho concepto de superficie mecánica sintetiza las propiedades del material para cada sección mediante una relación momento curvatura dada por $M = M(P, \chi)$, diferente de la expresión dada por $g(x, P, \chi(u))$ que se refiere a cualquier sección de la pieza.

6.1.3 Splines generalizados

Se han recogido una serie de resultados y propiedades en relación con el método de los elementos finitos y splines generalizados que se aplican en el método general propuesto. Entre los principales resultados hay que mencionar:

- La formulación matricial de los splines generalizados: matriz de equilibrio local y global.
- Exactitud de los valores nodales en el caso de elementos unidimensionales.
- Se destaca la mejora en los resultados que se obtienen mediante la aplicación del concepto de acción repartida equivalente a la solución obtenida mediante elementos finitos. Dicho concepto se ha aplicado a un ejemplo lineal en el que se puede observar la bondad de la aproximación conseguida empleando un número mínimo de elementos finitos.

6.1.4 Problemas discretos

Se ha llevado a cabo un análisis mediante modelos discretos con los que se describe el comportamiento de piezas sometidas a cargas axiales en los casos de no linealidad geométrica y del material. Por este procedimiento se describen las trayectorias carga-desplazamiento para casos homogéneos y no homogéneos y se analizan además numéricamente diversos ejemplos de uno y varios grados de libertad.

6.1.5 Problemas continuos

Se ha formulado el problema continuo mediante el método de elementos finitos, destacándose la aportación del concepto de pilar lineal equivalente y las condiciones de aplicación de dicho concepto concretadas en el teorema de equivalencia. El pilar no lineal, dependiendo de la deformada tiene una variación continua de la rigidez, sin embargo el pilar lineal equivalente tiene rigidez constante a trozos lo que permite un tratamiento sencillo con un número reducido de elementos finitos. Las condiciones de compatibilidad y equilibrio dan lugar a la aparición de unos momentos ficticios en el pilar lineal equivalente.

Se han propuesto dos métodos de cálculo y análisis de pilares:

6.1.6 Método algebraico

El método se ha basado en plantear la búsqueda de la solución o soluciones del problema no lineal mediante un procedimiento algebraico. La aplicación se realiza para casos definidos por una única relación momento curvatura y para piezas con estados de carga y restricciones sencillas. Se establece un conjunto de ecuaciones que permiten determinar la posición de los nodos desconocidos del pilar lineal equivalente. En cierto modo ello equivale a transformar el problema original en un caso especial de problema discreto de pandeo no lineal. El método permite obtener la solución exacta del problema ya que la relación constitutiva momento-curvatura considerada es lineal a trozos. En la memoria se definen unas relaciones básicas que permiten abordar distintos tipos de problemas dependiendo de las condiciones de contorno. Asimismo se determinan las cargas críticas de pandeo y las trayectorias de estabilidad e inestabilidad para distintos tipos de estados de carga.

6.1.7 Método general

El método general propuesto para la resolución de problemas de pandeo en régimen no lineal, ha consistido en una utilización combinada de los splines generalizados dentro de la metodología de cálculo de elementos finitos, con el concepto de pilar lineal equivalente y la utilización simultanea de un proceso de homotopía que transforma relaciones constitutivas lineales momento-curvatura para los diferentes tramos de la pieza en las relaciones constitutivas definitivas. Esta combinación ha permitido a través de un proceso de avance y corrección obtener la solución del problema no lineal para el caso de una ley genérica momento-curvatura, con tanta aproximación como se desee empleando un número adecuado de elementos.

6.1.8 Aplicaciones:

Método algebraico

En las aplicaciones del método algebraico se han puesto de manifiesto varias ventajas del mismo para los casos estudiados, pudiendo destacar:

- Determinación exacta de las cargas críticas y deformadas.
- Determinación de la zonas estables e inestables de la trayectoria.
- Posibilidad de emplear expresiones analíticas en todo el análisis.

Método general

En las aplicaciones del método general se han desarrollado diversos ejemplos en los que se ha destacado la concordancia con el método algebraico cuando la relación momento curvatura viene dada mediante una ley lineal a trozos. Además dicho método se ha aplicado a una serie de problemas: isostáticos, hiperestáticos, con leyes momento curvatura dadas por una poligonal o mediante una curva genérica, con cargas concentradas en puntos intermedios de la directriz, con cambios de sección de la pieza, etc. Algunos de dichos problemas no pueden ser resueltos por el método algebraico propuesto.

6.1.9 Comparación de los métodos propuestos con los métodos habituales de cálculo de la viga-columna

En el apartado 2.6 se han recogido diversos métodos para el cálculo de pilares en régimen no lineal.

Se pretende con dichos métodos conocer los aspectos más relevantes del comportamiento de la pieza viga-columna como se indica en 2.6.1. Cuando el análisis no se puede efectuar de manera completa por la dificultad del mismo, se pasa a un planteamiento más simplificado que se limita a establecer relaciones entre distintas variables del problema a través de diagramas de interacción como por ejemplo se hace en el método del momento que se comenta en el punto 2.6.2.

De acuerdo con lo expuesto en el apartado indicado 2.6, los métodos se pueden clasificar en métodos analíticos con soluciones exactas: Jezek, Horner, Hauck y Lee, etc. en métodos numéricos: tiro, Newmark, elementos finitos, etc. y en métodos de aproximación de la deformada: columna equivalente, columna equivalente modificado, método de la deformada de Jezek. En el hormigón hay métodos particulares relacionados con los anteriores como son, entre otros, los métodos matriciales y de elementos finitos que pueden situarse dentro de los métodos numéricos. Por otra parte los métodos de la columna modelo y de la deformada senoidal utilizados también en campo del hormigón pertenecen al área de los métodos de aproximación de la deformada.

En relación con los procedimientos analíticos el método algebraico propuesto también permite obtener soluciones exactas al considerar una relación momento curvatura dada por una poligonal. Hay que señalar que algunos de los métodos de los autores citados (véase [ChA76,cap.9]) resuelven casos correspondientes a relaciones momento curvatura definidas por expresiones analíticas no lineales a trozos, pero de forma laboriosa y menos sistemática que con el método algebraico. Hay que indicar por otra parte que ello se debe a la diferencia existente en los planteamientos seguidos. Si se linealizan a trozos las relaciones momento curvatura considerada por estos autores el método algebraico permitiría con muy poco esfuerzo obtener resultados muy próximos a los determinados por los métodos de los autores citados.

En cuanto a la comparación con los métodos numéricos, el método general es un método de elementos finitos y por tanto numérico en el que se introducen modificaciones importantes como la utilización de una homotopía en lugar de emplear

el método de Newton o variantes donde en el proceso de cálculo usual por elementos finitos para casos no lineales, se tiene en cuenta la ecuación residual (véase la ecuación (2.6.15)). En el proceso seguido en el método general se resuelve una sucesión de problemas lineales determinando valores nodales exactos que son consecuencia de las funciones de forma utilizadas con modificación gradual de la rigidez de los elementos pero no empleando ninguna ecuación residual. Hay que indicar también que en el método propuesto se introducen de acuerdo con la teoría introducida del pilar lineal equivalente unos momentos ficticios en los puntos de separación de los elementos (nodos intermedios) con objeto de mantener la continuidad en la curvatura en dichos puntos. Esta idea no aparece en ninguno de los métodos de cálculo no lineal de la viga-columna expuestos en la literatura consultada.

En relación con los métodos de aproximación de la deformada y limitándonos a los casos de la columna modelo y de la deformada senoidal (aplicados fundamentalmente a ménsulas y piezas biarticuladas) donde las características principales son: por una parte dichos métodos no determinan la deformada del problema sino que suponen que ésta sigue una ley de tipo senoidal. Por otra de acuerdo con lo anterior analizan el comportamiento de una sección que es la más solicitada, lo que permite calcular de forma sencilla la directriz geométrica (relación momento-curvatura correspondiente a las acciones exteriores). Sin embargo en el método algebraico, que es con el que se puede realizar la comparación más directa, con un esfuerzo cálculo parecido se puede determinar la solución completa del problema. Por tanto con este método se tiene en cuenta de forma rigurosa la solicitación exacta de todas las secciones pudiendo determinar con precisión la sección más desfavorable. Además el método algebraico permite determinar fácilmente la carga límite pilar y las regiones estable e inestable de la trayectoria carga-desplazamiento. Finalmente con el método propuesto se puede realizar un análisis del comportamiento de la pieza de una manera completa: dimensionamiento, deformada, estabilidad, etc.

6.2 TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN FUTUROS

En esta tesis se han desarrollado dos métodos de cálculo de pilares o vigas-columna en régimen no lineal considerando la no linealidad del material, que han permitido describir cualitativa y cuantitativamente el comportamiento de estas piezas.

El método algebraico como se ha podido ver permite obtener la solución para cierto tipo de problemas isostáticos. Una posible extensión de este método consistiría en abordar la resolución de piezas hiperestáticas considerando como incógnitas, además de las longitudes de los tramos, las acciones desconocidas, aunque se perdería en parte la sencillez y el carácter sistemático del procedimiento.

Por otro lado el método general como se ha indicado es una mejora del método de los elementos finitos al emplear splines generalizados, la teoría del pilar lineal equivalente y la utilización de una homotopía. En relación con lo expuesto en el desarrollo del método pueden considerarse algunas variantes que no han sido contempladas. En primer lugar se podría abordar la construcción de procedimientos para determinar soluciones en la rama inestable. En segundo lugar se podrían incluir criterios de adaptabilidad para conseguir mayor exactitud en la solución, bien modificando la longitud de los elementos finitos, o bien aumentando número de éstos. En este último caso teniendo en cuenta que el número de elementos sea siempre reducido ya que esta es una de las características principales del método.

En el desarrollo efectuado no se ha considerado en las aplicaciones la dependencia de la relación momento curvatura de la carga P al no considerarse esencial respecto a la aportación realizada. Sin embargo hay que señalar que en trabajos futuros se tiene previsto realizar un estudio detallado de la determinación de la superficie mecánica para que los resultados al considerar la variación del axil P puedan considerarse fiables.

También se tiene en cuenta la posibilidad de extender en próximos trabajos el método general expuesto, con los algoritmos adicionales adecuados, a casos donde se emplee bien la curvatura exacta, o bien aproximaciones no lineales a la dicha curvatura como por ejemplo

$$\chi(u) = \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}} \approx u'' \left(1 - \frac{3}{2}u'^2 + \frac{15}{8}u'^4 \dots\right)$$

con el propósito de aplicarlo a casos de relaciones constitutivas momento-curvatura dadas tanto por una ley lineal a trozos como por una ley curva genérica.

Una aplicación de la teoría expuesta que podría desarrollarse consistiría en el análisis del modelo no lineal de viga de Timoshenko especialmente para el caso de no linealidad en la relación momento-curvatura, lo que sería de interés en ciertos problemas prácticos.

Por otra parte el esquema establecido para el desarrollo del concepto de pilar lineal equivalente consideramos que puede aplicarse a otros problemas no lineales tanto más simples como más complejos que el abordado en esta memoria. Por ejemplo una aplicación que se podría realizar consistiría en el análisis del pandeo lateral de vigas-columnas cuyo comportamiento venga regido por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineal con no linealidad del material y con las condiciones auxiliares correspondientes.

El método general expuesto podría integrarse dentro de un método de cálculo de estructuras para problemas no lineales. Un caso de particular interés sería para el cálculo de estructuras de hormigón armado y pretensado.

Finalmente una vía de profundización en aspectos teóricos de este estudio, estaría relacionada con dos cuestiones que son fundamentales en esta investigación. Por un lado la existencia y número de soluciones de los sistemas que se obtienen por el método algebraico para la determinación de la deformada en los problemas en régimen no lineal, dependiendo del rango de valores de la carga P . Por otro lado el análisis de la convergencia de las soluciones aproximadas que se obtienen en el método general hacia la solución o soluciones exactas cuando aumenta el número de elementos finitos y simultáneamente desciende la longitud de los mismos. Esto último requeriría previamente un estudio sobre las diferentes soluciones que puede tener el problema no lineal y posteriormente la convergencia hacia cada una de ellas de la sucesión de soluciones aproximadas.

Desde el punto de vista teórico, la primera cuestión habría que situarla dentro del marco de los problemas no lineales discretos de la teoría de bifurcación. La segunda correspondería al estudio de convergencias dentro del campo del análisis funcional no lineal. El formalismo teórico en ambos casos tiene mucho en común, sin embargo las herramientas de análisis difieren en el hecho de que para los problemas discretos la técnica es esencialmente topológico-geométrica y muy orientada al problema en cuestión y en el segundo caso los procedimientos de análisis son muy variados predominando los de tipo local. No obstante hay procedimientos como son los métodos de perturbación que se emplean indistintamente en ambos campos y que son fundamentalmente locales. Entre las diferentes técnicas de análisis de problemas no lineales que en principio podrían aplicarse al estudio teórico se tienen: El método de Liapunov-Schmidt, el de Poincaré-Keller y los métodos de iteración monótona. Algunas referencias, que se han citado a lo largo de la memoria y que nos parecen de gran interés en cuanto a exposición de técnicas para abordar el análisis de las cuestiones planteadas son: [Ogd84], [Lur91], [MaH94], [Ngu00] dedicadas al estudio de problemas no lineales de elasticidad y mecánica de medios continuos con un enfoque muy formalizado, y asimismo [KeA69], [Sat73], [Nir74], [Ber74], [IoJ80], [Sta71], [Sta79], [Kel77] y [Zei87] desde un punto de vista más abstracto.

BIBLIOGRAFÍA

- [AaG74] AAS-JAKOBSEN, K. and GRENACHER, M.: "Analysis of Slender Reinforced Concrete Frames". IABSE, Publications. 1974.

- [Aas66] AAS-JACKOBSEN: "The C.E.B. Design Method for reinforced concrete columns and frames". General Report. Compte-Rendu de la Réunion de la Commission VIII. Flambement-Instabilité. Bulletin d'information N62. CEB. 1966

- [Aas72] AAS-JACKOBSEN: "Manual Buckling-Instability" Bulletin d'information N° 79 del CEB Manuel de Calcul CEB-FIP . Flambement-Instabilité. 1972.

- [Aas73] AAS-JACKOBSEN: "Design of slender Reinforced Concrete frames" Bericht N° 48, Institut für Baustatik, ETH, Zurich.1973.

- [Ada75] ADAMS, R. A.: Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

- [Agu80] AGUADO, A.: "Estudio del análisis no lineal de estructuras de hormigón mediante superposición de problemas lineales en deformaciones". Tesis Doctoral. E. T. S. I. C. C. Y P. de Barcelona. 1980.

- [ANW67] AHLBERG, J. H., NILSON, E. N. and WALSH, J. L.: The Theory of Splines and Their Applications, Academic Press, New York, 1967.

- [Are80] ARENAS de PABLO, J. J.: "Cálculo de soportes rectangulares de hormigón armado en teoría de segundo orden". Editores Técnicos Asociados. 1980

- [Arg64] ARGYRIS, J. H.: Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon Press. 1964.

- [Arg65] ARGYRIS, J. H.: "Continua and discontinua", Proc. Onf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech. Wright Patterson Air Force Base, Ohio. 1965.

- [AuC93] AU, F. T. K. and CHEUNG, Y. K.: "Isoparametric spline finite strip for plane structures", Computers & Structures, Vol. 48, No. 1, pp. 23-32, 1993.

- [AVK87] ANDONOV, A. A., VITT, A. A. and KHAIKIN, S. E.: Theory of Oscillators. Dover Publications. 1987.

- [BaC91] BAZANT, Z. P. and CEDOLIN, L.: Stability of Structures, Oxford University Press, 1991
- [Bak74] BAKER, A. L. L.: "The stability of a reinforced concrete building frame: design by trial and adjustment". C.E.B. Bulletin N° 101. 1974.
- [Bat02] BATTINI J. M.: "Co-rotational beams elements in instability problems", Royal Institute of Technology. Ph. D. Stockholm 2002
- [Bat61] BATANERO, J.: "Los problemas de la inestabilidad elástica", Informes de la Construcción n° 129, Marzo 1961
- [Bau34] BAUMANN, O.: "Die Knickung der Eisenbeton-Säulen". Eidg. Materialprüfungsanstalt an der E.T.H.. 1934.
- [BBB87] BARTELS, R. H., BEATTY, R. H. and BARSKY, B. A.: An Introduction to Spline for use in Computer Graphics and Geometric Modeling, Morgan Kaufmann Publishers, Inc., U.S.A., 1987.
- [Ber74] BERGER, M. S.: "New applications of the calculus of variations in the large to nonlinear elasticity", Comm. Math. Phys. 35: 141-150, 1974.
- [BFK84] BÖHN, W., FARIN, G. and KAHMANN, J.: "A survey of curve and surface methods in CAGD", Computer Aided Geometric Design, 1 pp. 1-60, North-Holland, 1984.
- [Boo78] de BOOR, C.: A Practical Guide to Spline, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [BPP87] BAZANT, Z. P., PAN, P. and PIAUDIER-CABOT, G.: "Ductility, Sanpback, Siza Effect and Redistribution in Softening Beams or Frames". Journal of Structural Engineering, ASCE. (1987).
- [BrC69] BREBBIA, C. and CONNOR, J.: "Geometrically non-linear finite element analysis" Proc. ASCE J. Engng Mech. Div., Proc. 1969.
- [BrS94] BRENNER, S. C. and SCOTT, L. R.: The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Springer-Verlag, 1994.

- [BrV58] BROMS, B. and VIEST L. M.: "Ultimate Strength Analysis of Long Singed Reinforced Concrete Columns". Journal of the Structural Division Proc. Fo the Amer. Soc. of Civil Engineers. 1958.
- [Bul29] BULFFINGER, G. B.: "De solidorum resistentia specimen". Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. 1729.
- [Car87] CAROL, I.: "Modelos de análisis no lineal en el tiempo de estructuras reticulares de hormigón. Revisión integrada y propuesta de un nuevo modelo global para material y estructura". Tesis Doctoral. E.T.S.I.C.C.P. Universidad Politécnica de Catalunya. 1987.
- [Car92] CARRERAS, J. M.: Pandeo de estructuras de hormigón armado, Universidad Politécnica de Cataluña. 1992.
- [Cas01] CASCIARO, R.: "An introduction to de computational asymptotic post-buckling analysis of slender elastic structures". University of Calabria. 2001.
- [CaS86] CARDONA, J. y SAMARTIN, A.: "Aplicación del método de los elementos finitos a problemas de interpolación", Revista Internacional para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol. 2, 2, pp.165-194, 1986.
- [CEB78] CEB/FIB: "Manual of Buckling and Instability". The Construction Press. Bulletin D'Information N° 123. 1978
- [CEB95] CEB/FIP: "Código Modelo CEB-FIP 1990 para hormigón estructural". GEHO-CEB y ATEP. 1995.
- [CFW82] CHEUNG, Y. K., FAN, S. C. and WU, C. Q.: "Spline finite strip in structural analysis", Proc. Int. Conf. on Finite Element Method, Shangai, pp. 704-709, 1982.
- [CGL96] CHEN, W. F., GOTO, Y. and LIEW, J. Y. R.: "Stability design of Semi-Rigid Frames". John Wiley and Sons. 1996.
- [ChA76] CHEN, W. F. and ATSUTA, T.: Theory of Beam-Columns, Vols.1,2, McGraw-Hill, 1976.
- [Cha82] CHAN, E. C.: "Non linear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced Concrete Shells With Edge Beams". Ph. D. Dissertation. Division fo structural engineering and structural Mechanics. University of California. Berkeley. 1982.

- [ChF63] CHANG, W. F. and FERGUSON, P. M.: "Long Hinged Reinforced Concrete Columns". Journal fo the American Concrete Institute. 1963.
- [ChL87] CHEN, W. F. and LUI, E. M.: Structural Stability. Theory and Implementation, Elsevier, 1987
- [ChT94] CHEN, W. F. and THOMAS, S.: Advanced Analysis of Steel Frames. CRC Press1994.
- [Chw34] CHWALLA, E.: "Theorie des aussermittig gedrückten Stabes aus Baustahl. Der Stahlbau". 1934.
- [CiL94] CIMETIERE, A. ELKOULANI and LEGER, A.: "Bukling and Postbukling of an elastic-plastic simple model". Comptes rendus de l'académie des sciences, Paris 319: 1263-1269, 1994.
- [CiL96] CIMETIERE, A. and LEGER, A.: "Some problems about elastic-plastic post-buckling" Int. J. Solids Structures, 1996.
- [Clo60] CLOUGH, R. W.: "The finite element Method in plane stress analysis", Proc. 2nd ASCE Conf on Electronic Computation, Pittsburgh, 1960.
- [CMC87] CARRASCÓN, S., MARI, A. and CAROL, I.: "Análisis no lineal instantáneo y diferido de puentes de homigón armado y pretensado". Publicación ES-015-87. E.T.S.I.C.C.P. Universidad Politécnica de Catalunya. 1987.
- [Con91] CONSIDERE, A.: "Résistance des pièces comprimées", Congrès International des procédés des constructions, Paris, Vol 3. 1891.
- [Cor80] CORRES, H.. "Dimensionamiento de soportes esbletos de sección constante de hormigón armado en estado límite último de agotamiento o inestabilidad. Método de las curvas de referencia". Tesis Doctoral. E. T. S. I. C. C. Y P. de Madrid. 1980.
- [Cri91] CRISFIELD, M. A.: Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, V.1, John Wiley & Sons, 1991.
- [Cri97] CRISFIELD, M. A.: Non-linear finite ElementAnalysis of solids and structures. Volumen 2, Wiley Chichester. 1997.

- [CrW75] CROLL, J. G. A. and WALKER, A. C.: Elementos de Estabilidad Estructural, Reverté, S. A. 1975.
- [Dav53] DAVIDENCO, D. F.: "On a New Method of Numerical Solution or Systems of Nonlinear Equations". Dokl. Akad. Nauk. USSR, 88, 601-602. 1953.
- [Dav86] DAVIES, A. J.: The Finite Element Method: A First Approach, Clarendon Press-Oxford, 1987
- [DeK64] DESAYI, P. and KRISHNAN, S.: "Equation for the stress-strain curve of concrete". Journal of the American Concrete Institute. 1964.
- [DeM72] DE DONATO, O. and MAIER, G.: "Mathematical programming methods for the inelastic analysis of reinforced concrete frames allowing for limites rotation capacity". International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. A. pp. 307-329. 1972
- [DeM77] DENNIS, J. E. and MORE, J.: "Quasi-Newton methods, motivation and theory", SIAM rev. 19. 46-89. 1977.
- [DeS67] DEIST, F. H. and SEFOR, L.: "Solution of Systems of Nonlinear Equations by Parameter Variation". Computer J. 10, 78-82. 1967.
- [Die93] DIERCKX, P.: Curve and Surface Fitting with Splines, Clarendon Press, Oxford, 1993.
- [Dis71] DISQUE, R. O.: Applied Plastic Design in Steel. Van Nostrand Reinhold Co. 1971.
- [DoD74] DOUGLAS, J. and DUPONT, T.: "Galerkin approximations for the two point boundary problem using continuous, piecewise polynomial spaces". Numer. Math. 22, 99-109
- [EHE98] EHE-98: Instrucción de Hormigón Estructural. Ministerio de Fomento. 1998.
- [EHR53] ERNST, G. C., HROMADIK J. J. and RIVELAND A. R.: "Inelastic Buckling of Plain and Reinforced Concrete Columns, Plates and Shells". University of Nebraska. 1953.

- [Eng89] ENGESSER, F.: "Ueber die Knickfestigkeit gerader Stäbe". Zeitschrift d. Arch.-u. Ing.- Ver. Zu Hannover. 1889.
- [Eul44] EULER, L.: "De Curvis Elasticis, Additamentum I, Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Propietate Gaudentes". Lausanne and Geneva 1744.
- [Eul59] EULER, L.: "Sur la force des colonnes". Memoires de L'Academie de Berlin. 1759.
- [Far88] FARIN, G.: Curves and Surface for Computer Aided Geometric Design, A Practical Guide, Academic Press, Inc., New York, 1988.
- [Fel00] FELIPPA, C. A.: Introduction to the analysis of nonlinear elastic structures by the Finite Element Method.
- [Fle87] FLETCHER, R.: Practical methods of optimisation, Wiley. 1987.
- [FMF73] FAESSEL, P., MORISSET, A. et FOURE, B.: "Le flambement des Poteaux en Béton Armé", Annales de L'Institut Technique du Batimenr et des Travaux Publics. 1973.
- [Fou73] FOURE, B.: "Le flambement des poteaux compte tenu du fluage du béton". Annales de L'Institut Technique du Batimenr et des Travaux Publics. N° 214. 1973.
- [Gal68] GALAMBOS, T. V.: Structural Members and Frames. Prentice-Hall, Inc. 1968.
- [GaP66] GALLAGER, R. J. and PADLOG, J.: "Discrete element approach to structural stability". Am. Inst. Aero.& Astro. J. 1(6), 1437-1439.1966.
- [GeH54] GEHLER, W. and HUTTER, A.: "Knickversuche mir Stahlbreronsäulen", Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, N° 113, Berlin, 1954.
- [GGP67] GALLAGER, R. J., GELLATLY, R. A. PADLOG, J. and MALLET, R. H.: "A discrete element procedure for thin shell instability analysis", Am. Inst Aero. & Astro. J., 5(19, 138-145. 1967.

- [Gre64] GREVILLE, T. N. E.: " Interpolation by generalized spline functions", MRC, Technical Summary Report # 476, Madison, Wisconsin, 1964.

- [Gre69] GREVILLE, T. N. E.: Theory and Applications of Spline Functions, Academic Press, New York, 1969.

- [Gre78] GRELAT, A.: "Comportement non linéaire et stabilité des ossatures en béton armé". Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics. N° 366. 1978.

- [HaR47] HANSON, R. and ROSENSTRÖM, S.: "Tryckförsök med slanka betongpelare", Betong, Vol 32, N° 3, Stockholm, 1947, pp. 247-262.

- [Has61] HASELGROVE, C. B.: "The solution of Nonlinear Equations and of Differential Equations with Two-Points Boundary Conditions". Computer J., 4. 255-259. 1961.

- [Hel02] HELLESLAND, J.: "Lower slenderness limits for unbraced and transversely loaded brace reinforced concrete compression members". University of Oslo. Department of Mathematics Mechanics Division. 2002

- [Her84] HERRERA, I.: Boundary Methods: An Algebraic Theory, New York, Pitman, 1984.

- [HeS81] HELLESLAND, J. and SCORDELIS, A.C.: "Analysis of reinforced Concrete Bridge Columns Under imposed Deformations". Proceedings of the IABSE Colloquium on "Advanced Mechanics of Reinforced Concrete", Delf. 1981

- [Hog57] HOGNESTAD, E.: "Confirmation of Inelastic Stress Distribution in Concrete". Proceedings, ASCE, V. 33. 1957.

- [HoM69] HOLLAND, I. and MOAN, T.: "The finite element in plate buckling", Finite Element Method. In Stress Analysis, ed. I. Holland et al., Tapir. 1969.

- [Hoo78] HOOKE, R.: "De potentia restitutiva". London 1678.

- [Hut73] HUTCHINSON, J. W.: "Imperfection sensitivity in the plastic range". J. Mech. Phys. Solids 1973.

- [Hut74] HUTCHINSON, J. W.: "Plastic Buckling". Advances in Appl. Mech. 1974.

- [Inc56] INCE, E. L.: Ordinary Differential Equations, Dover Publ. Inc., New York, 1956.

- [IoJ80] IOOSS, G. and JOSEPH, D.: Elementary Stability and Bifurcation Theory, Springer-Verlag, 1980.

- [Irl85] IRLES, R.: "Un modelo numérico para el análisis del colapso en entramados metálicos". Tesis Doctoral. E.T.S.I.C.C.P.. Universidad Politécnica de Valencia. 1985.

- [Jen68] JENNINGS, A.: "Frame analysis Including Change of Geometry", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 94. Pp. 627-644. 1968

- [JeV69] JEROME, J. W. and VARGA, R. S.: "Generalizations of spline functions and applications to nonlinear boundary value and eigenvalue problems", in [Gre69].

- [KaH66] KAPUR, W. W. and HARTZ, B. J.: "Stability of plates using the finite element method", Proc. ASCE, J. Engng. Mech, 92, EM2, 177-195 1966.

- [Kan77] KANG, Y. J.: "Nonlinear geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Frames". Ph. D. Dissertation, University of California, Berkeley, UC-SESM Report nº 77-1. 1977.

- [KaR10] KARMÁN, T. V.: "Untersuchungen über Knickfestigkeit. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens". 1910

- [KaW95] KAWANO, A. and WARNER, R. F.: "Nonlinear Analysis of the Time Dependent Behaviour of Reinforced Concrete Frames". Research Report Nº R125, Dep. of Civil and Environmental Engineering, The University of Adelaide. 1995.

- [KeA69] KELLER, J. B. and ANTMAN, S.: Bifurcation theory and nonlinear eigenvalue problems, W. A. Benjamin, Inc., 1969.

- [Kel77] KELLER, H. B.: "Numerical solutions of Bifurcation and Nonlinear Eigenvalue Problems", Application of Bifurcation Theory, ed. By P. H. Rabinowitz. Academic Press. New York. 359-384. 1977.

- [Kel92] KELLER, H. B.: Numerical Methods for two-point boundary-value problems. Dover. 1992

- [KHB95] KITIPORNCHAI, S., HANCOCK, G. J. and BRADFORD, M. A.: Structural Stability and Design. A. A. Balkema. 1995.

- [Kir52] KIRCHHOFF, G.: " Über die Gleichungen des Gleichgewichts eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verbiegungen seiner Theile", Sitzsber. Akad. Wiss. Wien 9: 762-773. 1852

- [Klo61] KLOPFESTEIN, R. W.: "Zeros of Nonlinear Functions", J. ACM, 8. 366-373.1961.

- [Koi45] KOITER, W.T.: " Over de stabiliteit van het elastische evenwicht", Dissertation, Delft, Holland.1945. Translation: "On the Stability of Elastic Equilibrium", NASA TT-F-10833, 1967 and AFFDL-TR-70-25, 1970 (Sec. 4.6).

- [KuK76] KULICKI, M. and KOSTEM, N.: "Analytic modeling of material nonlinearities". International Association for Shell and spatial structures". Bulletin N° 60. 1976.

- [Kyt95] KYTE, P. K.: An Introduction to Boundary Element Methods, CRC Press, Inc., U.S.A.,1995.

- [LeA90] LEUNG, A. Y. T. and AU, F. T.: "Spline finite element for beam and plate", Computers & Structures, Vol. 37, No. 5, pp. 717-729, 1990.

- [Lia92] LIAPUNOV, A. M.: Stability of Motion. Academic Press. New York, 1966. 1892

- [Liv64] LIVESLEY, R. K.: Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon Press, Oxford. 1964.

- [LJR83] LORENTZ, G. G., JETTER, K. and RIEMENSCHNEIDER, S. D.: Birkhoff Interpolation, Addison-Wesley, 1983.

- [Lop97] LÓPEZ, J. C.: Estabilidad de pilares esbeltos de hormigón. Estado límite último de inestabilidad, LOEMCO, 1997

- [Lov44] LOVE, A. E. H.: A treatise in the mathematical theory of elasticity. Dover (fourth edition). 1944.
- [LuF92] LUAH, M. H. and FAN, S. C.: "Analysis of complicated plates by a nine-node spline plate element", Computers & Structures, Vol. 45, No. 2, pp. 243-252, 1992.
- [Lur91] LURIE, A. I.: Nonlinear theory of elasticity, North-Holland, 1991.
- [Mac73] MACCHI, G.: "Méthode de les rotations imposées. Exposé de la Méthode et exemple de calcul". C.E.B. International Course on structural concrete. L.NE.C. Lisboa. 1973.
- [MaH94] MARSDEN, J. E. and HUGHES, T. J. R.: Mathematical Foundations of Elasticity, Dover 1994.
- [MaM68] MALLET, R. H. and MARCAL, P. V.: "Finite element Analysis of non-linear structures. Proc.ASCE, J. Engng. Mech.94, ST9, 2081-2105. 1968.
- [MaO66] MARTIN, I. and OLIVIERI, E.: "Test of slender reinforced concrete columns bent in double curvature", ACI, Symposium on reinforced concrete columns. American Concrete Institute. 1966
- [Mar71] MARCAL, P. V.: "Finite element Analysis with material non-lineearities-theory and practise", Recent Advances in Matrix Methods of structural Analysis and Design, ed. R. H. Gallager et al. The University of Alabama Press pp. 257-282. 1971.
- [Mar72] MARTINEZ, J.: "Comportamiento y cálculo anelástico de las estructuras hiperestáticas de hormigón armado y pretensado". Monografía 302. I. T. E. C. C.. 1972.
- [Mar81] MARI, A.: "Análisis de estructuras de hormigón armado y pretensado, en teoría de segundo orden". Tesis Doctoral. E. T. S. I. C. C. Y P. de Barcelona. 1981.
- [Mar84] MARI, A. R. : "Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Three Dimensional Reinforced and Prestressed Concrete Frames". SESM Report N° 84/12. University of California, Berkeley. 1984.
- [Mar89] MARTINEZ, M.: "Análisis de la viga simple sobre lecho elástico a partir del método de los elementos de contorno", Hormigón y Acero, Madrid, 1989.

- [Mar91] MARI, A.: "Estudio comparativo entre diversos métodos de análisis no lineales de estructuras reticulares de hormigón armado y pretensado: estado actual y líneas de futura actuación". Grupo Español del Hormigón (GEHO). 1991.
- [MaS67] MALLET, R. H. and SCHMIDT, L. A.: "Non-linear structural analysis by energy search", Proc. ASCE, J. Struct. Div. 93, ST3 221-234. 1967.
- [Mau66] MAUCH, S. P.: "Effect of creep and shrinkage on the capacity of concrete columns". ACI, Symposium on reinforced concrete columns. American Concrete Institute. 1966
- [McB66] MCGREGOR, J. G. and BARTER, S. L.: "Long eccentrically loaded columns bent in double curvature". ACI, Symposium on reinforced concrete columns. American Concrete Institute. 1966
- [MeP74] MENEGOTTO, M. and PINTO, P. E.: "Exact analysis of reinforced concrete building frames cyclic loadings and stability problems", C.E.B. Bulletin d'Information n° 101 Juillet, 1974.
- [MGF83] MAIA, F. GRELAT, A. et FOURE, B.: "Analyse non linéaire des ossatures en béton armé ou précontraint compte tenu du retrait, du fluage et de la relaxation". Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics. N° 412. 1983.
- [MHH75] MUND, E. H., HALLET, P. and HENNART, J. P.: "An algorithm for interpolation of functions using quintic splines", J. Comput. Appl. Math, 1, pp. 279-288, 1975.
- [MiM99] MICULA, G. & MICULA, S.: Handbook of Splines, Kluwer Academic Publisher, 1999.
- [MiN66] MIRANDA, C. and NAIR, K.: "Finite beam on elastic foundation", Journal of the Structural Division Proceedings of the American Society of Civil Engineers, pp. 131-142, 1966.
- [Moo80] MOORE, G.: "The numerical treatment of non-trivial bifurcation points", Numer. Funct. Anal. Optim. 2, 441-472. 1980.
- [Mur37] MURNAGHAN, F. D.: "Finite deformations of an elastic solid" American Journal of mathematics. 1937
- [Mur72] MURCIA, J.: "Estudio de cálculo de estructuras pretensadas hiperestáticas mediante líneas de influencia. Aplicación al cálculo de la redistribución de esfuerzos a lo largo del tiempo". Tesis Doctoral. E. T. S. I. C. C. Y P. de Madrid. 1972.

- [MuW68] MURRAY, E. W. and WILSON, E. L.: "An approximate non-linear analysis of thin-plates", Proc. Air Force 2nd Conf. On Matrix Meth. In Struct. Mech., Srigth-Patterson Air Force Base, Ohio. 1968.
- [NaZ72] NAYAK, G. C. and ZIENCKIEWICZ, O. C.: "Note on the "alpha-constant" stiffness method of the analysis of non-linear problems, Int. J. Num. Meth. In Engng., 4, 579-582. 1972.
- [NgS67] NGO, D. and SCORDELIS, A. C.: "Finite element analysis of Reinforced Concrete Beams". ACI Journal, V. 64. 1967.
- [Ngu00] NGUYEN, Q. S.: Stability and Nonlinear Solid Mechanics, John Wiley & Sons, 2000.
- [Nir74] NIRENBERG, L.: Topics in Nonlinear Analysis, Courant Institute Lecture Notes, 1974.
- [Nov53] NOVOZHILOV, V.V.. Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity. Graylock. 1953.
- [OdC83] ODEN, J. T. and CAREY, G.: Finite Elements, Mathematical Aspects, Vol. 4, Prentice-Hall, Inc. E. C.,1983.
- [Ode67] ODEN, J. T.: "Numérical formulation of non-linear elasticity problems", Proc. ASCE, J. Struct. Div. 93, ST3, paper 5290. 1967.
- [Ode69] ODEN, J. T.: "Finite element aplications in non-linear structural analysis", Proc. Conf. On Finite Element aplications in non-linear structural analysis", Proc. Conf. On Finite element Meth. Vanderbilt University Tennessee. 1969.
- [Ogd84] OGDEN, R. W.: Nonlinear Elastic Deformations, Ellis Horwood Limited, 1984.
- [OrR70] ORTEGA, J. and RHEINBOLDT, W. C.: Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, 1970.
- [OwH80] OWEN, D. R. J. and HITON, E.: Finite element in Plasticity. Pineridge Press Limited. 1980.

- [Par66] PARME, A. L.: "Capacity of Restrained eccentrically loaded long columns", ACI, Symposium on reinforced concrete columns. American Concrete Institute. 1966

- [Per96] PERÉZ, A.: "Comportamiento en servicio del hormigón estructural. Estudio teórico experimental". Tesis Doctoral. E. T. S. I. C. C. Y P. de Madrid. 1996.

- [PfS64] PFRANG, E. O. and SIESS, C. P. : "Predicting structural behaviour anallitycally", Proceedings of the american Cociety of Civil Engineers, 1964.

- [PiW94] PILKEY, W. D. and WUNDERLICH, W.: Mechanics of Structures, Variational and Computational Methods, CRC Press, Inc., U.S.A. 1994.

- [Poi85] POINCARÉ, H.: "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation", Acta Mathematica 7, 259-380. 1885.

- [Pre75] PRENTER, P. M.: Splines and Variational Methods, John Wiley & Sons, New York, 1975.

- [Prz68] PRZEMIENIECKI, J. S.: Theory of Matrix Structural Analysis, Dover, New York, 1968.

- [Pui70] PUIG, A.: Cálculo Integral, Biblioteca Matemática S. L., 1970.

- [QiD87] QIULIN, D. and DAVIES, B. J.: Surface Engineering Geometry for Computer-Aided Design and Manufacture, Ellis Horwood Limited, Chichester, 1987.

- [Ram51] RAMBOLL, B. J.: "Reinforced Concrete Columns", Teknisk Förlag, Copenhagen, 1951.

- [RCG93] ROMERO, J. L., CORRALES, J. M. y GARCIA, F.: "Interpolación mediante splines generalizados del tipo $a(x)D_m$ -splines", en Congreso de Métodos Numéricos en Ingenieria SEMNI I. pp. 720-730, La Coruña, 1993.

- [Red91] REDDY J. N.: Applied Functional Anlysis and Variational Methods in Engineering, Krieger Publishing Company, 1991.

- [Red93] REDDY J. N.: An introduction to the Finite Element Method. McGrawhill. 1993
- [RFB75] ROBINSON, J. R., FOURÉ, B. Et BOURGHLIN, A. Y.: "Le flambement des poteaux en beton armé chargés avec des excentricités différentes a leurs extrémités" .Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics.1975
- [RFS75] ROBINSON, J. R. FOURÉ, B. et SAHÉBDJEM, A.: "Flambement des poteaux Carres en béton armé chargés hors d'un plan de symétrie". Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics. N° 146. 1975.
- [RGM92] ROMERO, J. L., GARCIA, F. and MORANT, J. L.: "Calculation of splines by iterative methods based on relaxation" en Proceeding of International Simposium of Numerical Analysis (ISNA '92), pp. 229-245, Prague, Czechoslovakia, 1992.
- [Rhi80] RHEINBOLDT, W. C.: "Solution fields of nonlinear equations and continuation methods" SIAM J. Numer. Anal. 17, 221-237. 1980
- [Rhi81] RHEINBOLDT, W. C.: "Numerical Analysis of Continuations Methods for Nonlinear Structural Problems", Computers and Structures. 13, 130-141 (1981).
- [Rik72] RIKS, E.: "The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability". Trans. ASME, J. Appl. Mech. (1972).
- [Rik79] RIKS, E.: "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems", Int. J. Solids and structs. 15, 529-551. 1979.
- [RiM87] RIO, O. I. y MORÁN, F.: Nueva definición de límites de esbeltez (Una nueva forma de simplificar el pandeo de soportes de hormigón), Monografía nº 388 del Instituto de Eduardo Torroja de la construcción y del cemento, CSIC, 1987
- [Rit03] RITU, J.: "Solution procedure for nonlinear Finite Element Equations". Project Report ECI 284. University of California. Davis. 2003.
- [RMC90] ROMERO, J. L., MORANT, J. L. y CORRALES, J. M.: "Operadores de relajación en espacios de Hermite . Aplicación al cálculo de splines", en I Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, SEMNI, pp. 228-232, Las Palmas, 1990.
- [RoA90] ROGERS, D. F. and ADAMS, J. A.: Mathematical Elements for Computer Graphics, McGraw-Hill, New York, 1990.

- [RoB26] ROS, M. and BRUNNER, J.: "Die Knicksicherheit von an beiden Enden gelenkig gelagerten Stäben aus Konstruktionsstahl". Eidg. Materialprüfungsanstalt an der E.T.H.. 1926
- [ROC02] ROMERO, J. L., ORTEGA, M. A. y CORRALES, J. M.: "Estudio y resolución del modelo de viga de Timoshenko. Algoritmo de acciones equivalentes", V Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería. Madrid, 3-6 de Junio de 2002
- [RoM68] ROBINSON, J. R. and MODJABI, S. S.: "La prevision des charges de flambement des poteaux en beton arme par la methode de M. P. Faessel", Annales de L'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics. 1968.
- [RoO98] ROMERO, J. L. y ORTEGA, M. A.: "Acciones equivalentes y solución en desplazamientos interpolada en la viga de Bernoulli-Euler", Informes de la Construcción, Vol. 49. N° 454, pp. 5-27, 1998.
- [RoO99] ROMERO, J. L. y ORTEGA, M. A. : "Splines generalizados y solución nodal exacta en el método de elementos finitos", Informes de la Construcción, Vol. 51. N° 464, pp. 41-85, 1999.
- [Ros85] ROSA, E. de la : "Ecuaciones en derivadas parciales. Introducción al Método de los Elementos Finitos". Servicio de publicaciones Resvista de Obras Públicas. E.T.S. Ingenieros de Caminos de Madrid. 1985
- [SaL72] SABIR, A. B. and LOCK, A. C.: "The application of finite elements to the larger-deflection geometrically non-lineart behaviour of cylindrical shells", Proc. Int. Conf on Var. Meth in Engng., Southampton Univ., Session VII, 67-76 1972
- [SaR03] SARKER, P. K. and RANGAN, B. V.: "Reinforced concrete columns under unequal load eccentricities", ACI, Structural Journal July-August, 2003
- [Sat73] SATTINGER, D. H.: Topics in stability and bifurcation theory, Springer-Verlag Lecture Notes in Math. 309, 1973.
- [SBG94] SUN, C. H., BRADFORD, M. A. and GILBERT, R. I.: "A Reliable Numerical Method for Simulating the Post-Failure Behaviour of Concrete Frame Structures". Computers and Structures. 1994.
- [Sch66] SCHWEIKERT, D. G.: "An interpolation curva using a spline in tension", J. Math. & Physics, Vol. 45, pp. 312-317, 1966.
- [Sch73] SCHULTZ, M. H.: Spline Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.

- [Sch81] SCHUMAKER, L. L.: Spline Functions: Basic Theory, John Wiley & Sons, New York, 1981.

- [SeA94] SENDOV, B. and ANDREEV, A.: "Approximation and interpolation theory", en Handbook of Numerical Analysis, Vol. III, (CIARLET, P. G. y LIONS, J. L., Editors), North-Holland, 1994.

- [Sel67] SELNA, L. G.: "Time Dependent Behaviour of Reinforced Concrete Structures". UC-SESM Report 67-19. Division fo structural engineering and structural Mechanics. University of California. Berkeley. 1967.

- [Sey77] SEYDEL, R.: "Numerishe Berechnung von Verzweigungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen", Ph. D. Thesis. Report TUM 7736, Mathem. Institut, Technical Univ. Munich. 1977.

- [Sey79a] SEYDEL, R.: "Numerical computation of branch points in ordinary differential equations", Numer. Math. 32, 51-68.

- [Sey79b] SEYDEL, R.: "Numerical computation of parimary bifurcarion points in ordinary differtential aquations". Constructive methods for Nonlinear Boundary Value Problems and Nonlineas Oscillations". eds. Albrecht, J., Collats, L. and Kirchgässner, K.. 1978.
- [Sey79c] SEYDEL, R.: "Numerical computation of branch points in nonlinear equations", Numer. Math. 33, 339-352. 1979.

- [Sey84] SEYDEL, R.: "A continuation algorithm with step control", In numerical Methods for Bifurcation Problemes. Proceedings of a Conference in Dortmun. Eds. Küpper, T., Mittelman, H. D. and Weber, H. ISM 70, 480-494.1984.

- [Sha46] SHANLEY, F. R.: "The column Paradox". Journal of the Aeronautical Science. 1946

- [Sha47] SHANLEY, F. R.: "Inelastic column Theory". J. Aero. Science. 1947.

- [ShP71] SHARIFI, P. and POPPV, E. P.: "Non linear buckling analusis of sandwich arches, Proc. Asce, J. Engng Mech. Div, 97. 1397-1411. 1971.

- [SmG88] SMITH, I. M. and GRIFFITHS, D. V.: Programming the Finite Element Method. John Wiley & Sons, 1988.

- [Spä69] SPÄTH, H.: "Interpolation by certain quintic splines", Computer J. 12, pp. 292-293, 1969.

- [Spä95] SPÄTH, H.: One Dimensional Spline Interpolation Algorithms, A K Peters Wellesley, MA,1995.

- [Sta71] STAKGOLD, I.: "Branching of solutions of nonlinear equations", SIAM Rev. 13, 289, 1971

- [Sta73] STAKGOLD, I.: Nonlinear problems in the physical sciences and biology, Springer-Verlag Lecture Notes in Math. 322, 1973.

- [Sta79] STAKGOLD, I.: Green's Functions and Boundary Value Problems, John Wiley & Sons, New York,1979.

- [Ste98] STEEN, E.: "Application of the Paerturbation Method to Plate Buckling Problems". University of Oslo.1998

- [Ste99] STEEN, E.: "Buckling of Stiffened Plates using a Shanley Model Approach". University of Oslo. 1999

- [StF73] STRANG, G. and FIX, J.: An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall,Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1973.

- [TDM60] TURNNER, M. J., DILL, E. H., MARTIN H. C. and MELOSH, R. J.: "Large deflection analysis of complex structures subjected to heating and external loads", J. Aerospace Sci., 27. 1960.

- [Tho39] THOMAS, F. G.: "Studies in Reinforced Concrete. VIL The Strength of Long Reinforced Concrete Columns in Short Period Test to Destruction", Department of Scientific and Industrial Research, Building Research Technical Papers N° 24. London 1939.

- [TiG61] TIMOSHENKO, S. P. and GERE, J. M.: Theory of Elastic Stability, Mc Graw-Hill, New York, 1961.

- [Tim53] TIMOSHENKO, S. P.: Teoría de la estabilidad elástica,EDIAR, 1953.

- [Tim83] TIMOSHENKO, S. P.: History of Strength of Materials, Dover Publ. Inc., New York, 1983.
- [TiM84] TIN, B. and MOCKRY, E. F.: "Beam on elastic foundation finite element", Journal of Structural Engineering, Vol. 110, No. 10, pp. 2324-2339, 1984.
- [Tin82] TIN, B.: "Finite beam on elastic foundation with restraints", Journal of Structural Division ASCE, pp. 611-621, 1982.
- [TiR75] TICHY, M. and RAKOSNIC, J.: "Calcul Plastique des ossatures en béton". Eyrolles. Paris 1975.
- [TLC86] THAM, L. G., LI, W. Y. and CHEUNG, Y. K.: "Bending of skew plates by spline-finite-strip method", Computers & Structures, Vol. 22, No. 1, pp. 31-38, 1986.
- [Ton69] TONG, P.: "Exact solution of certain problems by finite-element method", AIAA Journal, Vol. 7, No. 1, pp. 178-180, 1969.
- [Tru75] TRUESDELL, C.: Ensayos de Historia de la Mecánica. E. Tecnos. 1975
- [Var71] VARGA, R. S.: Functional Analysis and Approximation Theory in Numerical Analysis, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1971.
- [Vil97] VILLAGGIO, P.: Mathematical models for Elastic Structures. Cambridge University Press. 1997.
- [Voi93] VOIGT, W.: "Über eine anscheinend notwendige Erweiterung der Theorie der Elasticität". Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1893
- [Wem71] WEMPNER, G. A.: "Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids". Int. J. Structures. (1971).
- [WeO28] WESTERGAARD, H. M. and OSGOOD, W. R.: "Strength of Steel Columns". Trans. Of the Amer. Soc. of Mech. Engineers. 1928.

- [Wol78] WOLFE, M. A.: Numerical methods for Unconstrained Optimisation. An introduction, Van Nostran Reinhold. 1978.
- [WoW97] WONG, K. W. and WARNER, R. F.: "Non-linear analysis of concrete frames using direct stiffness line element approach". Research Report N° R-158. Department of Civil and Environmental Engineering. University of Adelaide. 1997.
- [WYW88] WONG, K. W., YEO, M. F. and WARNER, R. F.: "Non-linear Behaviour of Reinforced Concrete Frames". Civil Engineering Transactions, Institution of Engineers, Australia. 1988.
- [Yam88] YAMAGUCHI, F.: Curves and Surface in Computer Aided Geometric Design, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988.
- [Zei87] ZEIDLER, E.: Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Springer-Verlag, 1987.
- [Zie82] ZIENCKIEWICZ, O. C.: El método de los Elementos finitos, Reverte. 1982
- [ZiT94] ZIENKIEWICZ, O. C. y TAYLOR, R. L.: El Método de los Elementos Finitos, Vol. 1 McGraw-Hill, 1994.

CURRICULUM VITAE

CURRICULUM VITAE

1. DATOS PERSONALES.

-NOMBRE: Miguel Angel
-APELLIDOS: Ortega Sánchez
-D.N.I.: 51.323.337
-FECHA DE NACIMIENTO: 30 de Septiembre de 1954.

-LUGAR DE NACIMIENTO: Castillejo de Robledo. PROVINCIA: Soria.
-ESTADO CIVIL: Soltero

-DOMICILIO: C/ Capitán Blanco Argibay Nº 21-E 1º B. Tno: (91) 5-71-79-86
-POBLACIÓN: Madrid. Dto.: 28029 PROVINCIA: Madrid.

2. ESTUDIOS Y TITULACIÓN.

-TITULACIÓN: Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.
-CENTRO EN EL QUE CURSO LOS ESTUDIOS: E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid

-CALIFICACIÓN DEL PROYECTO FIN DE CARRERA: Sobresaliente.

3. CURSOS DE FORMACIÓN

-CURSOS DE DOCTORADO:

- ♦ NUMERO DE CURSOS: Dos (curso 1978-79 y curso 1980-81)
- ♦ NUMERO DE ASIGNATURAS IMPARTIDAS: Ocho.

4. OPOSICIONES

- ♦ PROFESOR AGREGADO DE MATEMÁTICAS DE ENSEÑANZA SECUNDARIA.
FECHA DE NOMBRAMIENTO: 31 de octubre de 1985. Situación actual en excedencia voluntaria.

5. CURSOS DE PERFECCIONAMIENTO

- CURSO BÁSICO DE INGENIERIA SÍSMICA

AÑO 1981.

CENTRO: E.T S de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos (Santander).

- METODOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL PARA C. N. (centrales nucleares).

PERIODO: Curso 1982-83.

CENTRO: Universidad Pontificia Comillas. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales ICAI.

- ANÁLISIS DE SISTEMAS DE TUBERIAS PARA C. N.

PERIODO: Curso 1982-83.

CENTRO: Universidad Pontificia de Comillas. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales ICAI.

- ANÁLISIS PROBABILISTICO DE RIESGOS.

PERIODO: Curso 1984-85.

CENTRO: Universidad Pontificia Comillas. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales ICAI.

- GESTIÓN INFORMATIZADA DE PROYECTOS.

PERIODO: Curso 1984-85.

CENTRO: Universidad Pontificia Comillas. Escuela, Técnica Superior de Ingenieros Industriales ICAI.

- NUEVOS MÉTODOS PARA EL ANÁLISIS DE PROBLEMAS GEOTÉCNICOS.

PERIODO: Curso 1979-79.

CENTRO: E. T. S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos Madrid.

- CURSO DE CÁLCULO Y DISEÑO DE CIMENTACIONES POR ORDENADOR.

PERIODO: Curso 1993-93

CENTRO: Universidad Politécnica de Madrid. Fundación general de la U.P.M..

- CURSO DE CAOS Y FRACTALES.

PERIODO: Curso 1999-99

CENTRO: Universidad Autónoma de Madrid.

6. EXPERIENCIA PROFESIONAL.

6.1. EMPRESAS PARA LAS QUE SE DESARROLLO LA ACTIVIDAD PROFESIONAL:

- CENTUNION

TIPO DE EMPRESA: Empresa dedicada al proyecto y dirección de obra en el área civil de plantas industriales (refinerías, fábricas de cemento, petroquímicas, industrias químicas, etc.).

TRABAJOS DESEMPEÑADOS: Diseño y cálculo de distintos elementos de la obra civil (estructuras de edificios, cimentaciones, racks y tracks para tuberías, etc.) pertenecientes a la refinería que esta empresa construía en Dumahy (Indonesia).

PERIODO DE TRABAJO: 1 de Febrero de 1982 a 1 de Noviembre de 1982.

▪ **TÉCNICAS REUNIDAS S. A.:**

TIPO DE EMPRESA: Empresa dedicada al proyecto, coordinación y dirección de la construcción de plantas químico-industriales (refinerías, centrales térmicas y nucleares, industrias de procesos químicos, etc.). En su sección nuclear forma parte del grupo Empresarios Agrupados cuya actividad está especializada en el proyecto y dirección de obra de centrales térmicas y nucleares.

TRABAJOS DESEMPEÑADOS: En la sección de cálculo del departamento civil de Empresarios Agrupados se diseñaron y calcularon algunos de los elementos del área civil de las centrales nucleares de Trillo y Valdecaballeros: cálculo dinámico de edificios, obtención de espectros, diseño de soportado de cables eléctricos y H.V.A.C. (High Velocity Air Conditioned), conduits, etc..

PERIODO DE TRABAJO: 1 de Febrero de 1983 a 1 de Febrero de 1984.

▪ **EMPRESARIOS AGRUPADOS S. A.:**

TIPO DE EMPRESA: Empresa especializada en el proyecto y dirección de obra de la construcción de centrales nucleares y térmicas así como en la oferta de distintos servicios relacionados con la explotación y mantenimiento de este tipo de instalación.

En el campo de las centrales nucleares participó en el proyecto y dirección de obra de las centrales de Almaraz, José Cabrera, Cofrentes, Trillo y Valdecaballeros.

TRABAJOS DESEMPEÑADOS: En la sección de cálculo del departamento civil de Empresarios Agrupados se diseñaron y calcularon distintos elementos del área civil de los edificios (Combustible, Auxiliar, Diesel, etc.) de la C. N. de Valdecaballeros: Cálculo dinámico de los edificios, obtención de espectros, diseño del soportado de cables eléctricos y H.V.A.C., conduits, etc.

PERIODO DE TRABAJO: 1 de Febrero de 1984 a 6 de Octubre de 1985.

6.2. COMO COLABORADOR Y ASESOR TÉCNICO DE LAS EMPRESAS SIXGROUP S.A. Y GRUPO DE INGENIERIA DIEZ S.A., PARTICIPÓ EN LA ELABORACIÓN Y CONTROL DE LOS PROYECTOS QUE SE INDICAN A CONTINUACIÓN:

1) Control de proyecto y cálculo de las modificaciones de proyecto, control de forjados, etc., de las siguientes obras:

- Ampliación y Reforma de la Facultad de Ciencias Políticas, Sociología y Escuela de Trabajo Social de la Universidad Complutense de Madrid (V-1989). SIXGROUP S. A..

- Proyecto de Ejecución del Edificio de Apartamentos Turísticos, Locales, Cine y Garajes. C\ Marques de Urquijo Nº 23 (Madrid). (IX-1989).

- Construcción del Edificio de la Facultad de Matemáticas en la Ciudad Universitaria de Madrid. (IX-1990). SIXGROUP S. A..

- Proyecto de Ejecución del Centro BUP de 24 Uds. situado en la Urbanización "Las Suertes " de Villalba (Madrid). (I-1991).

- Ampliación de la E. T. S. de I. de Telecomunicación. (III-91). SIXGROUP S. A..
- Proyecto de Ejecución del Pabellón de Servicios de 16 Uds. situado en el Centro Escolar Jacinto Benavente de Galapagar (Madrid). (XI-1991).
- Proyecto de Ejecución del Centro de Educación Primaria de 4 Uds. en Daganzo (Madrid). (III-1993).
- Proyecto de ejecución del centro de Educación Infantil y Primaria (3+6) Uds. en Villalvilla (Madrid). (X-1994).
- Proyecto Básico y de Ejecución del Centro de Enseñanza Secundaria 8+4+0 en Belmonte (Cuenca). (VII-1995).
- Proyecto de Ejecución del centro de Enseñanza Secundaria (16+6) Uds. en Santa Cruz de Mudela (Ciudad Real). (IX-1995).
- Proyecto de Ejecución del Centro de Educación Primaria de 4 Uds. Arquitecto Churriguera en Leganes (Madrid). (X-1995).
- Proyecto de Ejecución del Centro de Educación Primaria de 4 Uds. Arquitecto Peridis en Leganes (Madrid). (X-1995).
- Proyecto de Ejecución del centro de Educación Infantil y Primaria (3+6) Uds. en Paracuellos del Jarama (Madrid). (IV-1996).
- Proyecto de Ejecución del Centro de enseñanza secundaria 16+0+0 Uds. en los "Alpajes". Aranjuez (Madrid). (VII-1996).
- Proyecto de Ejecución del Centro de BUP de 24 Unidades situado en Galapagar (Madrid). (VIII-1996).
- Proyecto de Ejecución del Centro de Enseñanza Infantil y Primaria 6+12 Uds. en Epila (Zaragoza). (X-1997).
- Proyecto de Obras de Centro de Enseñanza Secundaria 12+4+0 en Valmojado (Toledo). (XI-1997).
- Proyecto de Ampliación de Centro de Educación Secundaria de 0+6+2/2 en Corrales de Buelna (Cantabria). (VIII-1998).
- Proyecto de Centro de Educación Secundaria Completa de 12+4 Uds. en "San Pedro del Pinatar" (Murcia). (IX-1998).

2) Cálculos de estructura, cimentaciones y control de proyecto:

- Cálculo de elementos estructurales para el Proyecto de Acondicionamiento de los Locales Comerciales para Onda-Cero en el Edificio situado en la Calle Pintor Rosales Nº 76. (VIII-1990).

- Proyecto de Aparcamiento en la Iglesia de San José C\ Colombia a C\ V. A Méjico. Barrio de Valleagudo de Coslada (Madrid). (XII-1991). SIXGROUP S.A.

- Proyecto Parroquia de San José C\ Colombia a C\ V. A Méjico. Barrio de Valleagudo de Coslada (Madrid). (I-1992). SIXGROUP S.A.

- Ampliación de la Facultad de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid. (I-1992). SIXGROUP S. A.

- Control de Proyecto de la Estructura metálica presentada por la empresa METALES PERFILADOS para la Nave de ACUINOVA S.A. en MERCAMADRID. (VIII-1992).

- Control de Proyecto de la Estructura metálica presentada por la empresa GRUPO CASTELO Y PUJOL para la Nave de ACUINOVA S.A. en MERCAMADRID. (IX-1992).

- Proyecto de Ejecución del Centro Experimental para el Instituto Universitario del Centro de Investigación del Automóvil. Complejo Politécnico de Campus Sur. (X-1992).

- Proyecto de Seminarios en el I.B. de San Lorenzo del Escorial. (X-1992)

- Proyecto de Ejecución del Centro Infantil y Primaria (6+12) Uds. en el Polígono Valdelázaro (Santa Mónica) de Rivas Vaciamadrid. (XI-1992). (SIXGROUP).

- Proyecto de Ejecución para la Ampliación de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Madrid. C\ Ronda de Valencia Nº 3 (Madrid). (V-1993).

- Proyecto de Ejecución de Pabellón de Cocina-comedor en el Centro Escolar Vicente Alexandre I de Torrejón de Ardoz. (IV-1993).

- Proyecto de Ejecución, Centro de Enseñanza Completa (20+6) Uds. Ave. Felipe II en Parla. (IX-1993). (SOCIEDAD DE INGENIERIA DIEZ).

- Proyecto de Ejecución de los Edificios Infantil y Primaria (6+12) Uds. En la unidad de actuación 5 del T. M. de Villa viciosa de Odón. (XII-1993). (SOCIEDAD DE INGENIERIA DIEZ).

- Proyecto de Ejecución de adaptación de espacios en el C. P. Campo hermoso de Humanes (Madrid). (I-1994). (SIXGROUP).

- Proyecto de Ejecución de Ampliación del I. B. Gabriel García Márquez en 8 Uds. más Aulas Taller y Música en Hortaleza (Madrid). (VI-1994). SOCIEDAD DE INGENIERIA DIEZ.

- Proyecto de Ejecución del Centro de Enseñanza Secundaria (16+6) Uds. y F. P. en Villarejo de Salvanes. (VIII-1994). SOCIEDAD DE INGENIERIA DIEZ.

- Proyecto de 6 Uds. en el Grupo Escolar Alonso Quijano de Alcalá de Henares (Madrid). (IX-1994).

- Proyecto de adaptación de espacios a LOGSE en el I.B. de la calle Aguado en Valdemoro. (XI-1994). (SOCIEDAD DE INGENIERIA DIEZ).

- Proyecto de Ejecución de Ampliación de Espacios en el I. B. Vega del Jarama de San Fernando de Henares. (XI-1994). (SIXGROUP S. A.).

- Proyecto de Ejecución de la cimentación del Torno Vertical en la Factoría de Construcciones Aeronáuticas de San Fernando de Henares (Madrid). (XII-1994).

- Proyecto de Ejecución de Ampliación de Aulas Taller y Obras de Adecuación en el I. B. María Moliner de Coslada (Madrid). (III-1995). SOCIEDAD DE INGENIERIA DIEZ.

- Proyecto de Ejecución de Adaptación e implantación de F.P. en el I. E. S. Miguel Catalán de Coslada (Madrid). (V-1995). SOCIEDAD DE INGENIERIA DIEZ.

Proyecto de Ejecución Ampliación e Implantación de F. P. en el I. B. Tierno Galván de Parla. (VII-1995). SIXGROUP.

- Centro de Formación de Profesores Miguel de Cervantes en Parla. (VII-1995).

- Proyecto de Ejecución de Viviendas, Apartamentos y Garaje en la C\ Juan Pantoja Nº 22 (Madrid). (VI-1996).

- Cálculo de Edificio Industrial para la empresa SEUR en el Polígono Industrial deVallecas (Madrid). (VII-1996).

- Proyecto de Ejecución del Colegio Público San Marcos en San Martín de la Vega. (Madrid). (II-1996).

- Proyecto de Ejecución del Centro de Enseñanza Secundaria (16+6) Uds. en Navas del Marques (Avila). (VII-1996).

- Proyecto de Ejecución del Centro de Enseñanza Infantil y Primaria (3+6) Uds. en el T.M. de Moraleja de Enmedio (Madrid). (II-1997).

- Proyecto de Ejecución de Rampa en el I.E.S. Pablo Picasso de Alcalá de Henares (Madrid). (IV-1997).

- Proyecto de Ejecución del Centro de Educación Infantil y Primaria (9+18) Uds. en Valdevernardo-Vicálvaro. (VI-1997).

- Cálculo y dimensionamiento de la estructura correspondiente al edificio de ascensor del I.E.S. "Laguna Joatzel" de Getafe (Madrid). ((VII-1997).

- Proyecto de Ejecución del Centro de Educación Secundaria (16+6+6) Uds. en Calatayud (Zaragoza). (VIII-1997).

- Proyecto de Ampliación de Ciclos Formativos en el I.E.S. Siglo XXI en Leganes (Madrid). (V-1998).

- Proyecto de Ejecución del Centro de Enseñanza Secundaria (8+0+0) Uds. en la Urbanización "El Encinar" de Terradillos (Salamanca). (XI-1998).

3) Trabajos para el ESTUDIO DE ARQUITECTURA de MIGUEL ANGEL SANTIBÁÑEZ LLINAS (C\ de la Cruzada-1):

- Proyecto Básico y de Ejecución de Pabellón Escolar en Cabeza de Buey (Badajoz). Congregación H.H. Carmelitas. (VI-1993).
- Proyecto Básico y de Ejecución del Edificio de Viviendas en Barcarrota Badajoz. (X-1996).
- Proyecto Básico y de Ejecución de Vivienda Unifamiliar de la Congregación de las H.H. Carmelitas en Navalonguilla (Avila). (VI-1996).
- Proyecto Básico y de Ejecución de Residencia de Ancianos. Patronato de San Miguel en Sancti Spiritus. (Badajoz). (IV-1995)
- Proyecto Básico y de Ejecución de Vivienda Unifamiliar. Propietario Juan Ramón Gandía Granade. Móstoles (Madrid). (IX-1995).
- Proyecto Básico y de Ejecución del Centro Parroquial en el Parque Coimbra de la Diócesis de Getafe XII-1994).

4) Trabajos para el Arquitecto Eduardo de la Torre Alejano del Estudio ARQUITECTURA y REHABILITACIÓN:

- Proyecto de Construcción de un centro de Educación Infantil y Primaria (3+8) Uds. en Pola de Siero (Asturias). (VII-1998).
- Proyecto de Construcción de un Centro de Educación Secundaria 12+4+0 Uds. en Horcajo de Santiago (Cuenca). (IX-1998).

5) Trabajos para la empresa PROCESOS CONSTRUCTIVOS S.A.:

- Remodelación de las Naves Industriales situadas en el P.K. 32 de la CTRA de Andalucía. (I-1996).

6) Cálculo de estaciones de servicio para la empresa REPSOL.

- Estación de Servicio en Insua (Lugo). (X-1192).
- Estación de Servicio en Villaquilambre (León). (X-1992).
- Area de Servicios Complementarios de la Estación de Servicios Nº. 34617 C-607 P.K. 29+810 T.M. de Colmenar Viejo (Madrid). (V-1994).
- Estación de Servicio en la Autopista de la Coruña-Carballo Margen Izq. P.K. 15+390 T.M. de Arteixo (La Coruña). (VI-1994).
- Estación de Servicio Nº. 13.172 en la CRTA. F-36 P.K. 11 del T. M. de Cartagena (Murcia). (II-1995).

- Estación de Servicio Nº 13.061 CTRA. N-232 P.K. 363+800 Margen derecha T.M. de Calahorra (La Rioja). (III-1995).
- Estación de Servicio de la AVD. Pintor Portela de Cartagena (Murcia). (V-1995).
- Estación de Servicio de la CRA. MV-611 P.K. 3-650 de Nonduerma a La Paloma en el T.M. de Murcia (V-1995).
- Estación de Servicio en Gumiel de Hizan (Burgos). (VI-1995).
- Estación de Servicio en la CRTA. de Molins del Rey C\ Villadomat T.M. de Sabadell (Barcelona). (I-1996).
- Estación de Servicio de la variante Este Margen Norte T.M. de Bilbao (Vizcaya). (II-1996).
- Estación de Servicio en la AUT. A7 P.K. 86+100 del T.M. de Maçanet de la Selva (Gerona). (IV-1996).
- Proyecto de Ejecución para E. S. En CTRA. N-1 Acceso a S.S. de los Reyes (Madrid). (II-1998).

7) Control de estructuras de madera laminada encolada.

- Comprobación de la estructura de madera laminada encolada de la cubierta del I.B. Cervantes (Madrid). (II-1990).
- Comprobación de la estructura de madera laminada encolada de la cubierta del Centro de Enseñanza Secundaria Completa (20+6) Uds. en la AVD. Felipe II Coslada (Madrid). (IX-1994).

8) Rehabilitación y refuerzo de estructuras:

- Estudio del Estado de la Estructura y Cimentación del Edificio de la Facultad de Estomatología de la Universidad Complutense y Comprobación de su nivel de seguridad y dimensionamiento del refuerzo de la misma para la creación de entreplantas. (III-1990)
- Proyecto de Refuerzo de la Estructura de la E.T. S. de Ing. de Montes de la Universidad Politécnica de Madrid. (V-1994).
- Informe de resultados obtenidos en el análisis de la seguridad de la estructura del edificio de la C\ Juan Esplandiú Nº 12 de Madrid. (X-1996).
- Estudio del nivel de Seguridad y Refuerzo de los pilares de la Planta baja de la Nave almacén de materiales de construcción en Noblejas (Toledo). (X-1997).
- Comprobación del nivel de seguridad del forjado de una vivienda unifamiliar en Guadalix de la Sierra (Madrid). (IV-1998).
- Análisis del nivel de seguridad del forjado de Cubierta de la obra correspondiente al proyecto de ejecución de 15 viviendas unifamiliares en el Piornal (Cáceres). (II-1996).
- Proyecto de Ejecución del Refuerzo de la Estructura Horizontal del I.E.M. Andrés de Vandelvira de Albacete. (VI-1998).

6.3 TRABAJOS EN EL AREA DE CENTRALES TERMICAS DE CICLO COMBINADO:

Diseño, cálculo y dimensionamiento de estructuras y cimentaciones para centrales de ciclo combinado en el Departamento Civil de Empresarios Agrupados desde el mes de junio de 1999:

- Central Térmica de C.C. de Castellon.
- Central Térmica de C.C. de San Roque.
- Central Térmica de C.C. de Tarragona.
- Central Térmica de C.C. de Castejon.
- Central Térmica de C.C. de Santurzi.
- Central Térmica de C.C. Lavrion (Grecia)
- Proyecto Civil de la Central C. C. Standar de General Electric.
- Central Térmica de Granadilla (Canarias)

6.4. DESARROLLO DE PROGRAMAS INFORMATICOS.

- Participación en el desarrollo del programa ADINOL para el análisis dinámico no lineal de estructuras.
- Autor de programas de cálculo de estructuras referentes a:
 - Forjados unidireccionales de hormigón armado.
 - Cálculo de estructuras reticuladas planas.
 - Comprobación y cálculo de elementos de hormigón
 - Cálculo de cimentaciones flotantes.

7. ARTÍCULOS.

- ♦ ACCIONES EQUIVALENTES Y SOLUCIÓN EN DESPLAZAMIENTOS INTERPOLADA EN LA VIGA DE BERNOUILLI-EULER. Revista: Informes de la Construcción. Marzo/Abril 1998.
- ♦ SPLINES GENERALIZADOS Y SOLUCIÓN NODAL EXACTA EN EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS. Revista: Informes de la Construcción. Noviembre/Diciembre 1999.
- ♦ ESTUDIO Y RESOLUCIÓN DEL MODELO DE VIGA DE TIMOSHENKO. ALGORITMO DE ACCIONES EQUIVALENTES. V Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, Madrid 2002.

8. OTROS DATOS DE INTERÉS.

- ♦ Experiencia en el manejo de programas de cálculo de estructuras (CYPE, TRICAL y TREBOL V.5.) y Elementos Finitos (ANSI, SAP90).
- ♦ Conocimientos en programas de geotécnia como Z_SOIL, PLAXIS, FB-PIER entre otros.
- ♦ Experiencia en la utilización del programa AUTOCAD en distintas versiones: AUTOCAD-12, AUTOCAD-14 y AUTOCAD-2000.
- ♦ Conocimientos en el uso de programas de cálculo matemático: MATLAB, MAPLE-V Y DERIVE
- ♦ Miembro de la ASOCIACIÓN CIENTIFICO-TECNICA DEL HORMIGON ESTRUCTURAL (ATEP)

9. ACTIVIDAD DOCENTE DESEMPEÑADA

Como Profesor Agregado de Matemáticas de Enseñanza Secundaria: Ha impartido docencia de las siguientes materias en todos niveles durante 15 años.

- Matemáticas.
- Informática.

Como colaborador docente en cursos de Doctorado sobre Elementos Finitos en la Facultad de Informática y en la E.T.S. de Caminos Canales y Puertos de la UPM durante varios años.

